

В данном файле содержатся примеры заданий, которые будут встречаться на смене «Абитуриент». Это далеко не полный список задач и он необходим для того, чтобы вы смогли оценить сложность заданий, которые будут разбираться на смене.

Математический анализ

Задача 1. Вычислить производную функции

$$1. f(x) = e^{x \arcsin x} \cdot \ln x;$$

$$2. f(x) = x^x.$$

Задача 2. Вычислить интеграл

$$1. \int x^2 e^x dx;$$

$$2. \int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$3. \int \arccos^2 x dx.$$

Задача 3. Решить уравнение $z^3 = \bar{z}$.

Задача 4. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$|z - 2 + i| \geq |z + 3 - 4i|.$$

Задача 5. Доказать, что последовательность $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ ограничена, найти её \sup и \inf .

Задача 6. Вычислить предел последовательности

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 4n + 5}{5n^3 + 6n^2};$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Задача 7. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}.$$

Задача 8. Исследовать функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

на непрерывность в точке $x_0 = 0$.

Общая Физика

Кинематика материальной точки

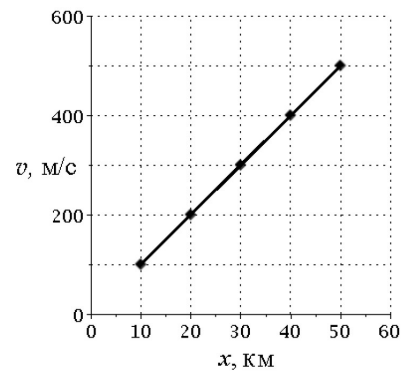
Задача 9. Материальная точка движется в плоскости xoy по закону:

$$x = A \sin \omega t \quad y = B \cos \omega t,$$

где A и ω — положительные постоянные. По какой траектории движется материальная точка? Найдите путь, проходимый точкой за время τ , а также ускорение, с которым она движется.

Задача 10. Узкий луч света от фонаря, вращающегося с угловой скоростью ω относительно вертикальной оси, попадает на вертикальную стену. Световое пятно бежит по стене по горизонтальной прямой. Расстояние от фонаря до стены L . Найдите скорость пятна в произвольной точке A . Скорость света считайте бесконечной.

Задача 11. Неопознанный летающий объект в момент обнаружения находился на расстоянии $x_0 = 10$ км от радиолокационной станции и удалялся от нее по прямой линии. Измерения показали линейную зависимость скорости объекта от расстояния до станции (см. график). Определите, через какое время после обнаружения объект окажется на расстоянии $x_1 = 50$ км от станции. С каким ускорением он будет в этот момент двигаться?



Задача 12. Имеется однородный шнур из взрывчатого вещества. Скорость распространения реакции взрыва вдоль шнура V , скорость распространения взрывной волны по воздуху c . Найдите форму линии, по которой надо расположить шнур, чтобы волна от всех точек шнура пришла в заданную точку одновременно. Можно ли сделать то же самое для поверхности со взрывчаткой и получить сходящуюся сферическую волну с большой концентрацией энергии?

Задача 13. Найдите радиус кривизны эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в произвольной точке. Рассмотрите эллипс как движение материальной точки с законом движения:

$$x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t$$

Найдите значение радиуса кривизны в точках пересечения эллипса большой и малой осью.

Динамика материальной точки

Задача 14. Лодка под парусом развила скорость v_0 . Как будет убывать во времени скорость движения лодки по стоячей воде после спуска паруса, если сопротивление воды движению лодки пропорционально первой степени скорости лодки? Как долго будет двигаться лодка, и какой путь она пройдет до остановки?

Задача 15. На столе лежит тонкое однородное кольцо радиусом r . При поступательном движении кольца с постоянной скоростью v сила торможения кольца равна F_0 . Пусть при движении центра кольца с той же скоростью v оно еще и вращается с угловой скоростью $\omega = v/r$ вокруг оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной его плоскости. Коэффициент трения кольца о стол не зависит от его скорости и типа движения. Определите силу торможения F .

Задача 16. На врытый в землю столб навита веревка. За один конец веревки тянут с силой $F = 10000$ Н. Какую силу надо приложить к другому концу веревки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения веревки о столб $k = 1/\pi$. Вережка обвита вокруг столба 2 раза.

Удары. Момент импульса

Задача 17. По теории, разработанной Г. Герцем (1882 г.), при столкновении упругих шаров сила взаимодействия пропорциональна деформации в степени $3/2$, т.е. $F = kx^{3/2}$. Рассмотреть лобовое столкновение шаров одинакового радиуса с одинаковой упругой константой k , но разными массами m и $m/3$. Начальные скорости v_0 и $-v_0$. Определите величину максимальной деформации шаров x_{\max} .

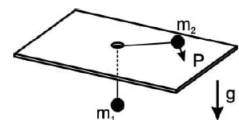
Задача 18. Две частицы, массы которых равны m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжёлая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол $\alpha = 30^\circ$ в лабораторной системе отсчёта или на угол $\beta = 60^\circ$ в системе центра масс. Определите отношение m_1/m_2 .

Задача 19. Вычислите минимальное значение K_α кинетической энергии α -частиц, необходимой для осуществления реакции



если реакция идёт с поглощением энергии $Q = 2,85$ МэВ (литий неподвижен).

Задача 20. Через отверстие в гладком столе пропущена невесомая нить, к концам которой прикреплены массы m_1 и m_2 . Масса m_2 лежит на расстоянии r_0 от отверстия (см. рис.). Ей сообщают импульс P перпендикулярно нити. Найдите максимальное удаление массы m_2 от отверстия.



Законы Кеплера

Задача 21. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по эллиптической орбите со скоростью $v_1 = 8$ км/с в перигее и $v_2 = 7$ км/с в апогее. Определите длину большой оси $2a$ эллиптической орбиты спутника. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Задача 22. Два заряда $Q > 0$ и $q < 0$ находятся в вакууме на расстоянии R . Заряд Q закреплен, заряду q сообщают скорость v направленную перпендикулярно линии их соединяющей. Найдите наименьшее расстояние между зарядами. Масса заряда m . Излучением заряда q пренебречь.

Задача 23. Космический корабль «Венера-экспресс», пройдя ровно 50% пути от Земли к Венере, затратил на это 55,1% времени. Корабль двигался по орбите, касающейся практически круговых орбит Земли и Венеры. Определите период обращения Венеры вокруг Солнца. Влиянием поля планет на корабль пренебречь, считая, что он движется только под действием поля тяготения Солнца