10

Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

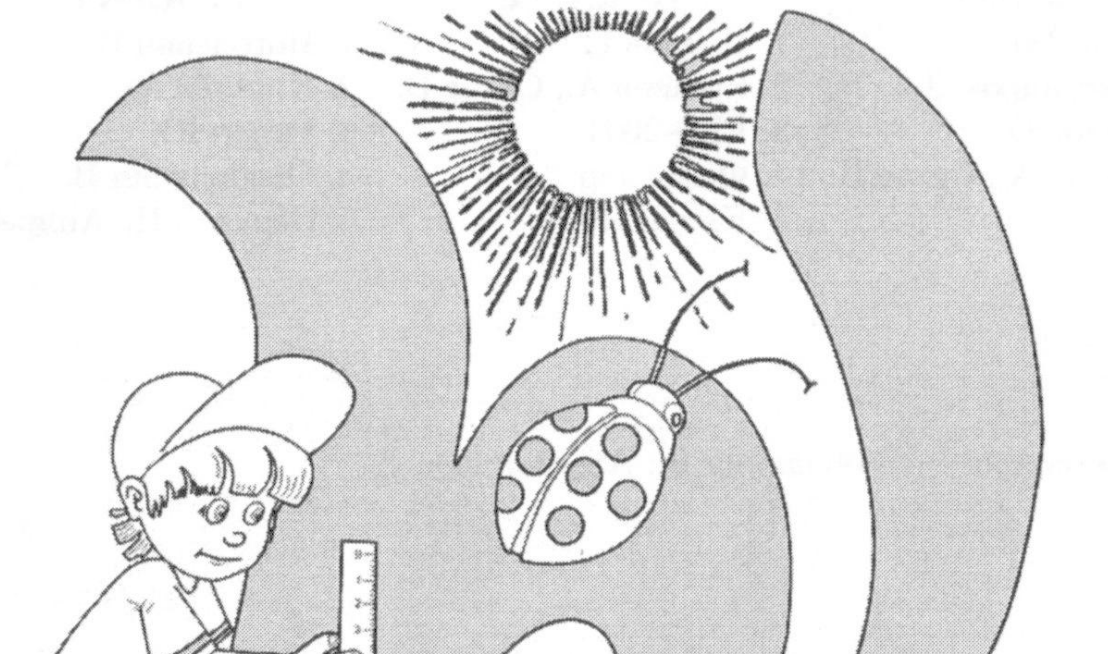
XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

+

Теоретический тур

Методическое пособие



1998г

МФТИ, 2006/2007 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

7 класс

1. Александров Д.
2. Подлесный Д.
3. Фольклор
4. Фольклор

8 класс

1. Фольклор
2. Слободянин В.
3. Фольклор
4. Подлесный Д.

9 класс

1. Фольклор
2. Александров Д.
3. Шведов О.
4. Русаков А., Сухов В.

10 класс

1. Иванов Г.
2. Русаков А., Сухов В.
3. ЕГЭ-2004
4. Фольклор
5. Калда Я.

11 класс

1. Иоголевич И.
2. Киселёв А.
3. Радар Ю.
4. Слободянин В.
5. Перунов Н., Андреев И.

Общая редакция — Слободянин В., Александров Д.

Оформление и вёрстка — Андреев И., Гусихин П., Гущин И., Ерофеев И., Федотов Ю.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 13 января 2007 г. в 03:03.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

7 класс

Задача 1. Турист

Турист первую треть всего времени движения шёл по грунтовой дороге со скоростью $v_1 = 3$ км/ч. Следующую треть времени он перемещался по шоссе со скоростью $v_2 = 6$ км/ч. Последний участок, длиной в треть всего пути, турист шёл со скоростью v_3. Вычислите скорость v_3. Найдите, при какой скорости v он прошёл бы тот же путь за то же время, двигаясь равномерно.

Задача 2. Непредвиденная ситуация

Автобус, двигавшийся со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, простоял перед закрытым железнодорожным переездом $t = 6$ мин. Если бы водитель не потерял указанное время, то, продолжая движение с той же скоростью, на ближайшую остановку он прибыл бы вовремя. Чтобы не выбиться из расписания водитель должен увеличить скорость движения автобуса. Сможет ли автобус прибыть в пункт назначения по расписанию, если расстояние от переезда до остановки маршрута $L = 15$ км, а на этом участке установлено ограничение скорости $v_2 = 90$ км/ч?

Задача 3. Два кубика

Имеются два кубика одинаковой массы. Первый изготовлен из платины, второй — из алюминия. Объём какого кубика больше? Во сколько раз отличаются их линейные размеры, например высоты? Плотность платины $\rho_{\text{п}} = 21600$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_{\text{а}} = 2700$ кг/м^3.

Задача 4. Разбавление кислоты

В дистиллированную воду аккуратно вливают серную кислоту. Получившийся раствор имеет плотность $\rho_{\text{р}} = 1200$ кг/м^3 и массу $m = 120$ г. Объём раствора равен сумме объёмов воды и кислоты. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м^3, плотность кислоты $\rho_{\text{к}} = 1800$ кг/м^3. Какова масса $m_{\text{к}}$ кислоты, влитой в воду?

8 класс

Задача 1. Средняя скорость

Турист первую треть всего времени движения шёл по грунтовой дороге со скоростью $v_1 = 2$ км/ч, затем треть всего пути перемещался по шоссе со скоростью v_2. В конце второго участка пути он встретил грузовик, на котором и вернулся в исходную точку по той же дороге. Известно, что на грузовике он ехал с постоянной скоростью v_3. Вычислите среднюю (путевую) скорость v_0 туриста. Укажите минимальное возможное значение скорости v_2.

Задача 2. Паутинка

Пауки Stegodyphus pacificus, обитающие в Южной Азии, создают самую тонкую в мире паутину. Её диаметр 10 нм (1 нм $= 10^{-9}$ м). Оцените длину паутины, которую мог бы сделать такой паук массой 0,2 г. Масса вещества, из которого образуется паутина, составляет 10% от массы паука. Плотность паука и паутины считайте приблизительно равными 10^3 кг/м^3.

Примечание. В физике понятие «оценить» означает, что вычисления следует делать приближённо. Например, оценим объём шара диаметром 3 см. Искомый объём немного меньше объёма куба со стороной 3 см. Объём куба равен 27 см^3. Следовательно, оценочно, объём шара 10 см^3.

Задача 3. Растворимость газов

Экспериментатор Глюк проводил опыты по исследованию растворимости различных газов в воде. Для этого он с помощью тонкой теплоизолирующей трубки пропускал через воду, находящуюся в калориметре при температуре $t_1 = 16$ °C, исследуемый газ. По мере всплытия пузырьки газа растворялись, не доходя до поверхности воды. После того, как раствор становился насыщенным, пузырьки переставали растворяться и всплывали на поверхность.

Глюк обнаружил, что водяной пар (взятый при температуре $t_2 = 100$ °C) тоже «растворяется» в воде. Какую растворимость пара он измерил?

Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C).

Примечание. Растворимость — это отношение максимальной массы растворённого вещества к массе растворителя.

Задача 4. Система в равновесии

Система, состоящая из двух однородных стержней, трёх невесомых нитей и блока, находится в равновесии (рис. 1). Трение в оси блока отсутствует. Все нити вертикальны. Масса верхнего стержня $m_1 = 0{,}5$ кг. Найдите массу m_2 нижнего стержня.

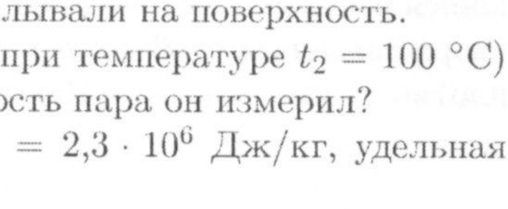


Рис. 1

Кинем. I

Стат. I

9 класс

Задача 1. Средняя скорость

Турист первую треть всего времени движения шёл по лесу на юг со скоростью $v_1 = 3$ км/ч, затем треть всего пути перемещался по полю на восток со скоростью v_2, и, наконец, по кратчайшему пути по просеке вернулся в исходную точку. Вычислите среднюю (путевую) скорость v_0 туриста. Укажите минимальное возможное значение скорости v_2.

Задача 2. Парашют

Для снабжения полярной экспедиции несколько связанных между собой небольших мешков с грузом сбрасывают на парашюте с самолёта ~~в хорошую безветренную погоду~~. На улице стоит безветренная погода. Установившаяся скорость падения мешков оказалась равной $v_1 = 6$ м/с. Один из мешков оторвался от связки, а у парашюта с оставшимся грузом постепенно установилась новая скорость падения $v_2 = 4$ м/с. За какое время t после отрыва мешка скорость парашюта уменьшится на $\Delta v = 10$ см/с? Оцените точность вашего результата. Силу сопротивления воздуха считайте пропорциональной скорости парашюта.

Задача 3. Выравнивание температуры (1)

Сосуд с водой имеет форму трёхгранной призмы, нижнее ребро которой горизонтально (рис. 2). В начальный момент времени температура воды линейно зависит от высоты. В самой нижней точке температура воды $t_1 = 4$ °C, а на поверхности она достигает $t_2 = 13$ °C. С течением времени температура во всём сосуде выравнялась. Вычислите значение установившейся температуры t_0. Считайте, что стенки сосуда и крышка не проводят и не поглощают тепло.

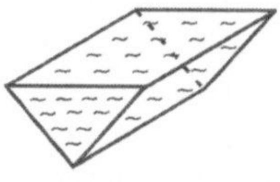


Рис. 2

Задача 4. Ток через ребро

Наличие рисунка не освобождает от необходимости читать условие.

Из тонких однородных листов жести спаяли полый куб, к двум противоположным вершинам большой диагонали которого припаяли проводники (рис. 3). Сопротивление куба между этими проводниками оказалось равным $R = 7$ Ом. Вычислите силу электрического тока, пересекающего ребро AB куба, если проводники подключены к источнику напряжения $U = 42$ В.

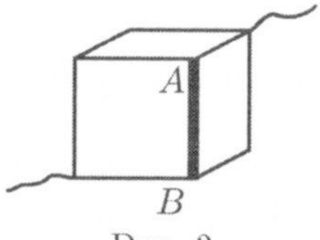


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Столкновение бусинок (1)

По гладкой горизонтальной спице навстречу друг другу скользят две группы одинаковых маленьких бусинок (рис. 4). В первой группе их число — n, во второй — m. Все скорости бусинок разные, причём в первой группе $v_1 > v_2 > \ldots > v_n$, а во второй $u_1 > u_2 > \ldots > u_n$. В некоторый момент времени t_0 расстояние как между первыми из сближающихся бусинок, так и между каждой парой соседних бусинок оказалось равным L. Вычислите следующие величины:

1. Число соударений N бусинок друг с другом, если удары абсолютно упругие.
2. Время τ, прошедшее от момента t_0 до последнего соударения.

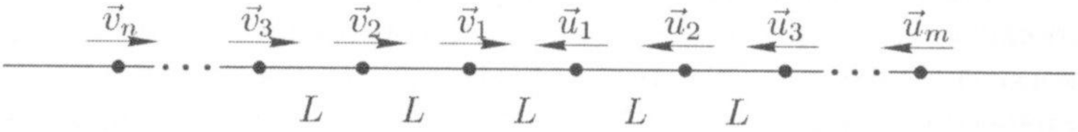


Рис. 4

Задача 2. Столкновение бусинок (2)

На гладкую горизонтальную спицу надеты две бусинки массами m и $2m$, связанные лёгкой нитью длиной $2L$. К середине нити прикреплён груз массой m. Сначала груз удерживают так, что бусинки на спице отстоят друг от друга на расстоянии $2L$. Затем груз отпускают без толчка (рис. 5). Вычислите скорости бусинок на спице перед их соударением. Известно, что в течение всего времени движения системы нити не провисают.

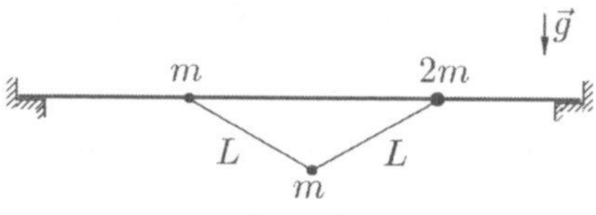


Рис. 5

Задача 3. Выравнивание температуры (2)

Теплоизолированный сосуд разделён теплопроводящей неподвижной перегородкой на две части одинакового объёма. В одной части сосуда находится $\nu_1 = 1$ моль неона $^{20}_{10}$Ne, а в другой — $\nu_2 = 5$ моль гелия $^{4}_{2}$He. В начальный момент средняя квадратичная скорость атомов неона в 2 раза больше средней квадратичной скорости атомов гелия. Определите отношение давления p_1 гелия в начальный момент времени к его давлению p_2 после установления теплового равновесия.

Задача 4. Тяжёлый поршень

Поршень массой m и площадью S делит герметичный теплопроводящий цилиндр, лежащий на столе, на две равные части. Если цилиндр медленно перевернуть и установить вертикально на одно из его оснований (рис. 6), то отношение объёмов, занимаемых воздухом под поршнем и над поршнем, будет равно β. Найдите давление p_0 воздуха в цилиндре в исходном состоянии. Трением между стенками цилиндра и поршнем пренебречь.

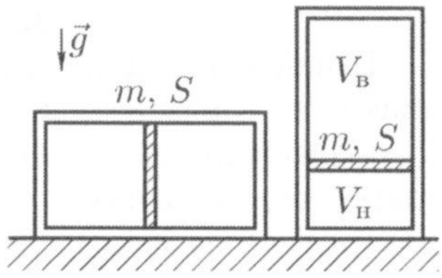


Рис. 6

Задача 5. Измерительные приборы

К клеммам приведённой на схеме электрической цепи (рис. 7) приложено напряжение $U = 9$ В. Если к вольтметру подключить параллельно резистор R, то показания вольтметра уменьшатся в 2 раза, а показания амперметра увеличатся в 2 раза. Какое напряжение показывал вольтметр до и после подключения резистора?

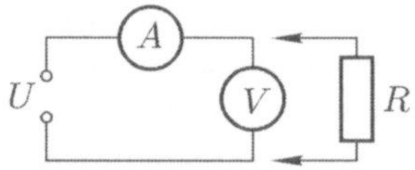


Рис. 7

11 класс

Задача 1. Теннисный шарик

Теннисный шарик, падающий с высоты $h_0 = 1.0$ м, после удара о неподвижную горизонтальную ракетку подпрыгивает на высоту $h_1 = 0.8$ м. С какой скоростью u нужно двигать ракетку навстречу шарику в момент удара, чтобы, падая с той же высоты, он после отскока от ракетки снова подпрыгнул на высоту h_0? Считайте, что потери механической энергии происходят только при соударении (а не за счёт трения шарика о воздух) и доля теряемой энергии всегда одна и та же. Масса ракетки значительно больше массы шарика.

Задача 2. Вертушка

Вертушка (тонкая пластина с большим количеством отверстий) прикреплена к вертикальной оси (рис. 8). Такую вертушку раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На любую единичную площадку пластины (но не на отверстия) действует сила сопротивления воздуха, создающая избыточное давление, которое, из-за наличия в вертушке отверстий, пропорционально скорости этой площадки. Коэффициент пропорциональности α для всех элементарных площадок одинаков. Вычислите число оборотов N, которое совершит вертушка до полной остановки. Масса единичной площадки пластины (без дыр) равна ρ. Трением в опорах оси пренебречь.

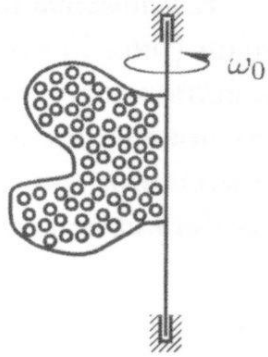


Рис. 8

Задача 3. Необычный способ надувания шарика

Под колокол воздушного насоса поместили завязанный резиновый воздушный шарик, содержащий некоторое количество воздуха (рис. 9). Затем насосом стали откачивать воздух из-под колокола. При достижении вакуума под колоколом натяжение резины достигло предела прочности, и шарик (круглой формы) лопнул. Вычислите отношение массы воздуха, который был в шарике, к массе самого шарика, если предел прочности резины (натяжение, при котором происходит разрыв) $\sigma = 6 \cdot 10^7$ Н/м^2, её плотность $\rho = 1200$ кг/м^3. При растяжении плотность резины не меняется. Считайте, что температура воздуха в шарике равна $t = 27$ °C, а его молярная масса $\mu = 29$ г/моль.

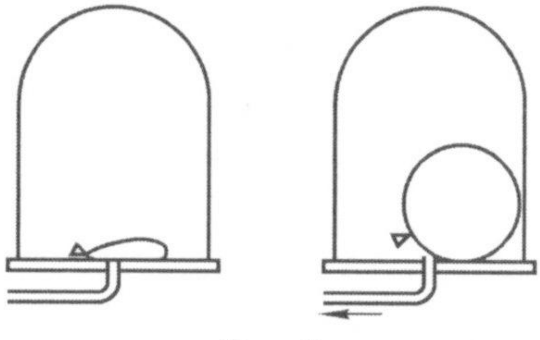


Рис. 9

Задача 4. Несимметричная схема

В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 10, сопротивления резисторов равны: $R_1 = 1{,}50$ кОм, $R_2 = 2{,}87$ кОм, $R_3 = 3{,}62$ кОм. Сила тока, протекающего через амперметр, равна $I = 2$ мА. Какое напряжение показывает вольтметр, включённый между клеммами D и E? Вольтметр и амперметр считайте идеальными.

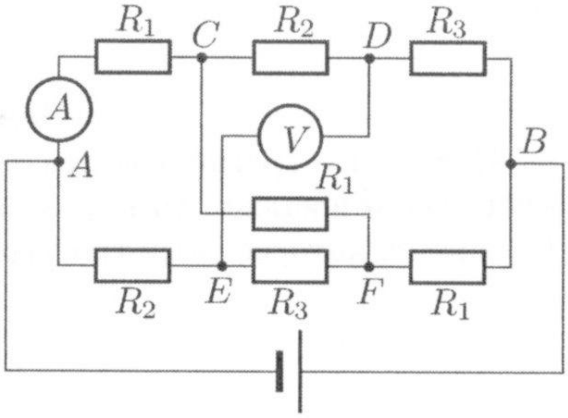


Рис. 10

Задача 5. Три кольца

Три одинаковых проводящих кольца радиуса r спаяны между собой в точках a, b, c, d, e и f и помещены в изменяющееся во времени вертикальное однородное магнитное поле с индукцией $B = B_0 + kt$ (рис. 11), причём плоскость вертикального кольца перпендикулярна плоскостям двух других колец. Сопротивление колец на единицу длины ρ. Найдите силы токов и их направление в каждом из участков колец, если угол между вектором $\vec{B}$ и плоскостями наклонных колец — α (рис. 12).

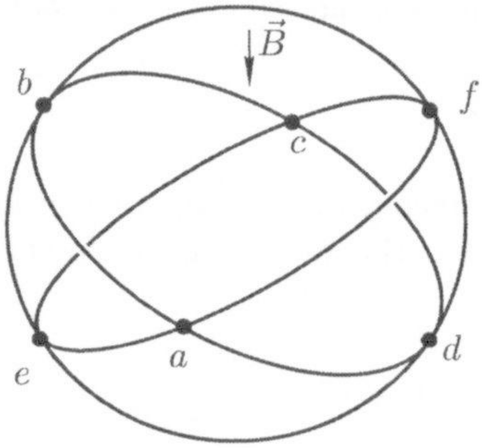


Рис. 11. Вид в перспективе

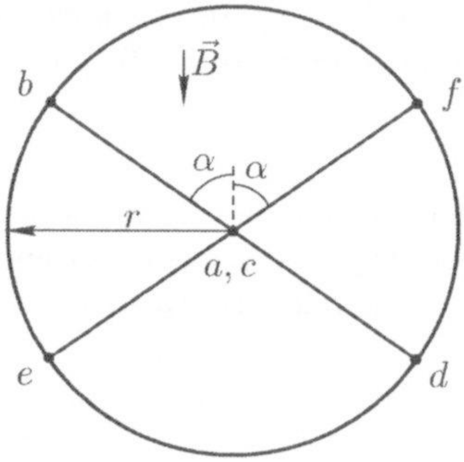


Рис. 12. Вид в направлении точек a и c

Возможные решения
7 класс

Задача 1. Турист

Поскольку третий участок составляет треть пути, и он был пройден за треть всего времени, то $v_3 = v$. Пусть S — весь путь, пройденный туристом, t — время, которое затратил турист на весь путь. Тогда

$$v_1\frac{t}{3} + v_2\frac{t}{3} + \frac{S}{3} = S,$$

$$\text{откуда} \qquad v_3 = v = \frac{S}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 4{,}5\ \text{км/ч}.$$

Система оценивания

Выражение для всего пути через скорости v_1 и v_2 4
Выражения для v_3 3
Выражение для v 3

Задача 2. Непредвиденная ситуация

Пусть t_1 — время, за которое автобус должен по расписанию доехать от переезда до остановки. Тогда

$$t_1 = \frac{L}{v_1}.$$

Чтобы успеть приехать на остановку по расписанию, автобус должен доехать от переезда до остановки за время $t_2 = t_1 - t$. Вычислим среднюю скорость, которую должен иметь автобус:

$$v_{\text{ср}} = \frac{L}{t_2} = \frac{Lv_1}{L - v_1 t} = 100\ \text{км/ч}.$$

Поскольку $v_{\text{ср}} > v_2$, то автобус не успеет доехать вовремя.

Система оценивания

Выражение для t_1 2
Выражение для t_2 2
Выражение для $v_{\text{ср}}$ 3
Ответ 3

Задача 3. Два кубика

Пусть m — масса каждого кубика, $V_\text{п}$, $V_\text{а}$ — объёмы платинового и алюминиевого кубиков соответственно, $a_\text{п}$, $a_\text{а}$ — длины рёбер платинового и алюминиевого кубиков соответственно. Тогда

$$V_\text{п} = \frac{m}{\rho_\text{п}}, \qquad V_\text{а} = \frac{m}{\rho_\text{а}}.$$

Поскольку $\rho_п > \rho_а$, то $V_п < V_а$. Поскольку $V_п = a_п^3$, $V_а = a_а^3$, то

$$\frac{a_а}{a_п} = \sqrt[3]{\frac{V_а}{V_п}} = \sqrt[3]{\frac{\rho_п}{\rho_а}} = 2.$$

Система оценивания

Выражение для $V_п$ через $\rho_п$ 1
Выражение для $V_а$ через $\rho_а$ 1
Нахождение $V_п < V_а$ 3
Выражение для $V_п$ через $a_п$ 1
Выражение для $V_а$ через $a_а$ 1
Выражение для отношения линейных размеров 3

Задача 4. Разбавление кислоты

Пусть $V_к$ — объём кислоты, влитой в воду, $V_в$ — объём воды, $V_р$ — объём раствора. Тогда

$$V_р = V_к + V_в, \qquad m = m_к + m_в, \tag{1}$$

где $m_в$ — масса воды в растворе. Поскольку

$$V_р = \frac{m}{\rho_р}, \qquad V_к = \frac{m_к}{\rho_к}, \qquad V_в = \frac{m_в}{\rho_в},$$

то с учётом (1) получаем:

$$\frac{m}{\rho_р} = \frac{m_к}{\rho_к} + \frac{m - m_к}{\rho_в},$$

$$\text{откуда} \qquad m_к = m\frac{\rho_к(\rho_р - \rho_в)}{\rho_р(\rho_к - \rho_в)} = 45 \text{ г.}$$

Система оценивания

Получение $V_р = V_к + V_в$ 1
Получение $m = m_р + m_в$ 1
Связь между $V_р$ и m 1
Связь между $V_к$ и $m_к$ 2
Связь между $V_в$ и $m_в$ 2
Окончательное выражение для $m_к$ 3

8 класс

Задача 1. Средняя скорость

Пусть a — расстояние, пройденное туристом по грунтовой дороге, b — по шоссе(рис. 13). Тогда на грузовике турист проезжает расстояние $a+b$. По условию справедливо $a+b+(a+b)=3b$, откуда $b=2a$.

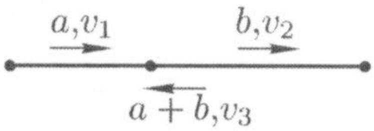


Рис. 13

Время, за которое турист проходит грунтовую дорогу, $t_1 = a/v_1$. Пусть полное время движения T. По условию $T = 3t_1$. Тогда среднепутевая скорость:

$$v_0 = \frac{a+b+(a+b)}{T} = \frac{6a}{3t_1} = 2\cdot\frac{a}{t_1} = 2v_1 = 4 \text{ км/ч}.$$

При этом время, которое турист идёт по шоссе, $t_2 < T - t_1 = 2t_1$. Поскольку $t_2 = b/v_2$, то

$$v_2 = \frac{b}{t_2} = 2\cdot\frac{a}{t_2} > 2\cdot\frac{a}{2t_1} = v_1 = 2 \text{ км/ч}.$$

Система оценивания

Соотношение $b=2a$ 2
Идея нахождения v_0 2
Численное значение v_0 2
Идея нахождения v_2 2
Численное значение v_2 2

Задача 2. Паутинка

Масса вещества паутины $M = m\cdot 10\% = 0{,}2 \text{ г}\cdot 0{,}1 = 0{,}02$ г. Следовательно, максимальный объём паутины

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{0{,}02\cdot 10^{-3}\text{ кг}}{10^3 \text{ кг/м}^3} = 2\cdot 10^{-8}\text{ м}^3.$$

Объём паутины равен произведению её длины L на площадь сечения S. Для оценки площадь сечения S можно полагать равной d^2. Тогда объём паутинки $V = LS = Ld^2$, откуда её длина оценочно

$$L = \frac{V}{d^2} = \frac{2\cdot 10^{-8}}{(10^{-8})^2} = 2\cdot 10^8 \text{ м} = 200000 \text{ км}.$$

Как видно, максимальная длина паутины в пять раз превышает длину земного экватора.

Система оценивания

Оценка массы паутины 2
Оценка объёма паутины 2
Выражение для L 3
Численный ответ 3

Задача 3. Растворимость газов

Водяной пар перестанет «растворяться», когда его давление сравняется с давлением насыщенного пара воды при данной температуре, то есть когда температура воды за счёт нагревания достигнет температуры пара t_2.

Пусть масса воды до начала измерений m, масса растворившегося пара M. Пар, сконденсировавшись, отдал теплоту $Q = L \cdot M$, которая перешла воде. Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q = L \cdot M = c \cdot m \cdot (t_2 - t_1), \qquad \text{откуда} \qquad \frac{M}{m} = \frac{c(t_2 - t_1)}{L} \approx 0{,}15.$$

Система оценивания

Идея решения 3
Уравнение теплового баланса 4
Численный ответ 3

Задача 4. Система в равновесии

Изобразим силы, действующие на веревки (рис. 14). Запишем правило моментов для стержней относительно точек O_1 и O_2. Так как в система находится в равновесии, то сумма моментов равна нулю:

$$O_1 : -T_1 L + T_2 L = 0, \qquad O_2 : -T_3 l + T_2 l = 0,$$

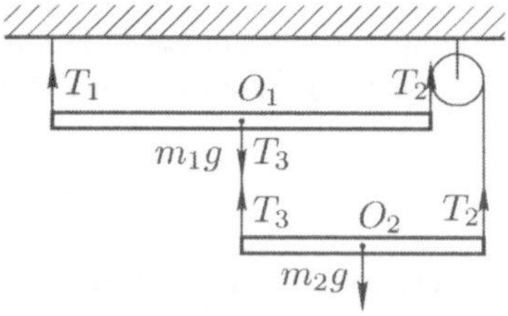


Рис. 14

где $2l$ — длина второго стержня. Таким образом $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Рассмотрим равенство сил для первого стержня в проекции на вертикальную ось

$$T_1 + T_2 = m_1 g + T_3,$$

$$T = m_1 g.$$

И, аналогично, для второго стержня

$$T_3 + T_2 = m_2 g,$$

$$2T = m_2 g.$$

Окончательно получим

$$m_2 = 2m_1 = 1 \text{ кг}.$$

Система оценивания

Правило моментов для первого стержня 2
Правило моментов для второго стержня 2
Условие равновесия для первого стержня 2
Условие равновесия для второго стержня 2
Ответ 2

9 класс

Задача 1. Средняя скорость

Пусть a — расстояние, пройденное туристом по лесу, b — по полю (рис. 15). Тогда по теореме Пифагора турист проходит по просеке расстояние $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. По условию задачи полный путь, пройденный туристом, $S = a + b + c = 3b$, откуда $c = 2b - a$:

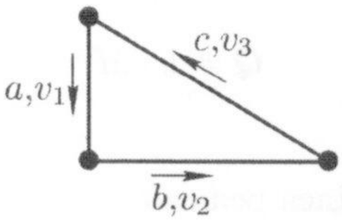


Рис. 15

$$a^2 + b^2 = 4b^2 - 4ba + a^2 \qquad \text{и} \qquad b = \frac{4}{3}a, \qquad c = \frac{5}{3}a.$$

Время, в течение которого турист идёт по лесу $t_1 = a/v_1$. Обозначим полное время движения T. По условию $T = 3t_1$.

Тогда средняя (путевая) скорость туриста:

$$v_0 = \frac{a+b+c}{T} = \frac{a + \frac{4}{3}a + \frac{5}{3}a}{3t_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{t_1} = \frac{4}{3} \cdot v_1 = 4 \text{ км/ч}.$$

При этом время, которое турист идёт по полю, $t_2 < T - t_1 = 2t_1$. Поскольку $t_2 = b/v_2$, то

$$v_2 = \frac{b}{t_2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{t_2} > \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{2t_1} = \frac{2}{3} \cdot v_1 = 2 \text{ км/ч}.$$

Система оценивания

Нахождение соотношений между сторонами треугольника 2
Идея нахождения v_0 2
Численное значение v_0 2
Идея нахождения минимального значения v_2 2
Численный ответ для минимально возможного значения v_2 2

Задача 2. Парашют

Пусть сила сопротивления воздуха $F = \alpha v$. Найдём отношение k массы оторвавшегося мешка к полной массе грузов. По второму закону Ньютона, если скорость тела не меняется, то сумма приложенных к нему сил равна нулю:

$$Mg = \alpha v_1, \qquad (1-k)Mg = \alpha v_2,$$

$$\text{откуда} \qquad k = 1 - \frac{v_2}{v_1}.$$

Поскольку изменение скорости $\Delta v \leqslant v_1$, то можем считать силу сопротивления вохдуха постоянной. Запишем второй закон Ньютона для момента сразу после отрыва мешка:

$$(1-k)Ma = -\alpha v_1 + (1-k)Mg,$$

$$\text{откуда} \qquad a = \frac{(1-k)Mg - \alpha v_1}{(1-k)M} = \left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) g.$$

Тогда время, за которое скорость связки уменьшится на Δv, будет равно

$$t = \frac{\Delta v}{|a|} = \frac{v_2}{v_1 - v_2} \cdot \frac{\Delta v}{g} = 0{,}02 \text{ с.}$$

Чтобы оценить погрешность, найдём, какое бы время потребовалось связке для замедления при движении со скоростью $v_1 - \Delta v$:

$$t' = \frac{\Delta v}{|a'|} = \frac{v_2}{v_1 - \Delta v - v_2} \cdot \frac{\Delta v}{g} = \frac{2}{95} \text{ с.}$$

И погрешность:

$$\Delta t = t' - t \approx 0{,}001 \text{ с.}$$

Система оценивания

Второй закон Ньютона до отрыва мешка 2
Второй закон Ньютона после установления новой скорости 2
Второй закон Ньютона сразу после отрыва мешка 2
Окончательная формула для t 1
Численное значение t 1
Идея метода оценки погрешности 1
Численное значение погрешности 1

Задача 3. Выравнивание температуры (1)

Разобъём воду в сосуде на n горизонтальных слоёв с массами $m_1,...,m_n$ (рис. 16) и запишем уравнение энергетического баланса (t_0 — установившаяся температура воды): $c(m_1t_1 + \ldots + m_nt_n) = c(m_1 + \ldots + m_n)t_0$,

$$\text{откуда} \qquad t_0 = \frac{m_1t_1 + \ldots + m_nt_n}{m_1 + \ldots + m_n},$$

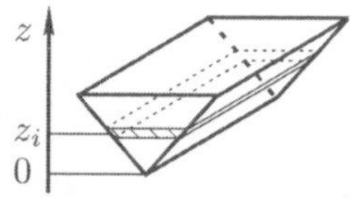


Рис. 16

где c — теплоёмкость воды.

По условию температура каждой из масс линейно зависит от её высоты: $t_i = A + B \cdot z_i$. Обозначим высоту сосуда h. Так как известна температура у основания и на поверхности воды, то мы можем найти неизвестные коэффициенты A и B:

$$t_1 = A + B \cdot 0, \qquad t_2 = A + B \cdot h,$$

$$\text{откуда} \qquad A = t_1, \qquad B = \frac{t_2 - t_1}{h}.$$

Тогда для конечной температуры получим:

$$t_0 = \frac{m_1(A + B \cdot z_1) + \ldots + m_n(A + B \cdot z_n)}{m_1 + \ldots + m_n} = A + B \cdot \frac{m_1z_1 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Несложно заметить, что коэффициент перед B является координатой z_c по оси z центра масс воды. Как известно, центр масс треугольника находится на пересечении медиан, которые делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины. Следовательно, $z_c = h \cdot 2/3$, и окончательно:

$$t_0 = A + B \cdot \frac{2}{3}h = t_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} \cdot h = 10\ °\text{C}.$$

Система оценивания

Уравнение энергетического баланса 2
Определение A 1
Определение B 1
Определение z_c 2
Окончательная формула для t_0 2
Численный ответ 2

Задача 4. Ток через ребро

Рассмотрим рёбра куба AB, BC, CD, DE, EF и FA (рис. 17, 18). Поскольку они опоясывают весь куб, то сумма сил токов, протекающих через них, равна $I_\Sigma = U/R = 6$ А. Поскольку рассматриваемые рёбра расположены симметрично, то силы токов, протекающих через них, равны, следовательно, искомая сила тока $I = I_\Sigma/6 = 1$ А.

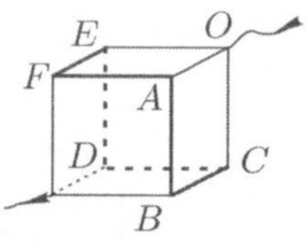


Рис. 17

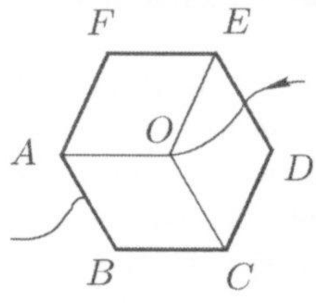


Рис. 18

Система оценивания

Выражение для I_Σ 2
Выражение для I 6
Численный ответ 2

10 класс

Задача 1. Столкновение бусинок (1)

Запишем законы сохранения энергии и импульса для лобового столкновения двух одинаковых бусинок, движущихся навстречу друг другу со скоростями u и v:

$$\begin{cases} mu - mv = mu' + mv', \\ \frac{mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{mu'^2}{2} + \frac{mv'^2}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} u' = -v, \\ v' = u, \end{cases}$$

то есть бусинки просто обмениваются скоростями. С другой стороны, если до столкновения одна бусинка двигалась вправо со скоростью v, а вторая — влево со скоростью u, после столкновения ничего не изменится, то есть, если пренебречь размерами бусинок, можно считать, что столкновения не было, а бусинки «прошли» сквозь друг друга.

При рассмотрении столкновений с этой точки зрения становится понятно, что каждая такая «прозрачная» бусинка из первого набора столкнётся со всеми из второго набора, поэтому всего столкновений будет $N = mn$.

Завершающее столкновение произойдёт между самыми последними, то есть самыми медленными, «прозрачными» бусинками. В момент t_0 расстояние между ними $(m+n-1)L$, поэтому искомое время:

$$\tau = (m+n-1)\frac{L}{v_n + v_m}.$$

Система оценивания

Идея «прозрачности» бусинок 4
Выражение для N 2
Выражение для τ 4

Задача 2. Столкновение бусинок (2)

Пусть проекции скоростей бусинок массами m и $2m$ на ось x перед соударением равны u и $-v$ соответственно (рис. 19). Нити в этот момент вертикальны, поэтому скорость груза может иметь только горизонтальную составляющую, а так как в любой момент времени груз расположен на одной вертикали с серединой отрезка, соединяющего верхние бусинки, проекция его скорости на ось x равна среднему арифметическому проекций скоростей бусинок, то есть $(u-v)/2$.

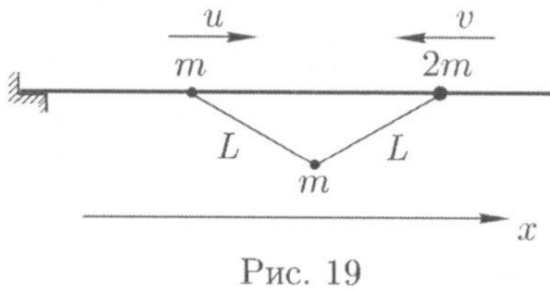


Рис. 19

Запишем законы сохранения импульса в проекции на ось x и энергии:

$$\begin{cases} mu - 2mv + m\frac{u-v}{2} = 0, \\ \frac{mu^2}{2} + \frac{2mv^2}{2} + \frac{m(u-v)^2}{8} = mgL; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 3u - 5v = 0, \\ 5u^2 + 9v^2 - 2uv = 8gL; \end{cases}$$

Решив систему, получаем, что $u = 5\sqrt{gL/22}$, $v = 3\sqrt{gL/22}$.

Система оценивания

Выражение для скорости груза перед соударением 2

Закон сохранения энергии 2

Закон сохранения импульса 2

Выражение для скорости первой бусинки 2

Выражение для скорости второй бусинки 2

Задача 3. Выравнивание температуры (2)

Пусть m_1 и m_2 — массы молекул неона и гелия соответственно. Тогда отношение этих масс равно отношению молярных масс неона и гелия, то есть $m_1/m_2 = 5$. Рассмотрим температуру гелия в начале эксперимента. Поскольку

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \qquad \text{то} \qquad T_0 = \frac{m_2 v_2^2}{3k}.$$

Рассмотрим суммарную энергию всех частиц.

$$E_\Sigma = (\nu_1 N_A)\frac{m_1 v_1^2}{2} + (\nu_2 N_A)\frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где N_A — число Авогадро.

После того, как установится тепловое равновесие, энергии всех частиц будут одинаковы и равны E_Σ/N, где $N = (\nu_1 + \nu_2)N_A$ — суммарное число всех частиц. Тогда установившаяся температура запишется в виде

$$T_1 = \frac{2(E_\Sigma/N)}{3k} = \frac{\nu_1 m_1 v_1^2 + \nu_2 m_2 v_2^2}{3(\nu_1+\nu_2)k}.$$

Но так как для гелия произошедший процесс был изохорическим, то

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{\nu_1 m_1 v_1^2 + \nu_2 m_2 v_2^2}{(\nu_1+\nu_2)m_2 v_2^2} = \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right) + 1} = 4{,}16.$$

Система оценивания

Выражение для T_0 2

Выражение для E_Σ 2

Энергия одной молекулы после установления теплового равновесия 2

Выражение для T_1 2

Окончательная формула для отношения давлений 1

Численный ответ 1

Задача 4. Тяжёлый поршень

Согласно закону Бойля–Мариотта

$$\nu RT = p_0 V_0 = p_{\text{в}} V_{\text{в}} = p_{\text{н}} V_{\text{н}}, \tag{2}$$

где индекс «н» относится к нижней, а индекс «в» — к верхней части вертикально установленного цилиндра. По условию задачи $V_н/V_в = \beta$. С учётом (2) получим:

$$\frac{V_н}{V_в} = \frac{p_в}{p_н} = \beta. \tag{3}$$

Из условия постоянства объёма цилиндра следует: $2V_0 = V_н + V_в = (1+\beta)V_в$, откуда находим

$$V_0 = V_н + V_в = \frac{1+\beta}{2} V_в, \tag{4}$$

а из (4) и (2) следует:

$$p_0 = \frac{\nu RT}{V_0} = \frac{\nu RT}{V_в} \frac{2}{(1+\beta)}. \tag{5}$$

Давление в нижней части цилиндра определяется давлением в верхней части цилиндра и весом поршня:

$$p_н = \frac{\nu RT}{V_н} = p_в + \frac{mg}{S} = \frac{\nu RT}{V_в} + \frac{mg}{S}.$$

С учётом (3) получим:

$$\frac{mg}{S} = \frac{\nu RT}{V_н} - \frac{\nu RT}{V_в} = \frac{\nu RT}{V_в} \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right).$$

Подставив это соотношение в (5), найдём:

$$p_0 = \frac{2\beta}{(1-\beta^2)} \frac{mg}{S}.$$

Система оценивания

Закон Бойля–Мариотта 2
Условие постоянства объёма цилиндра 2
Выражение для $p_н$ 3
Ответ 3

Задача 5. Измерительные приборы

Пусть первоначальные показания амперметра и вольтметра — I и V соответственно, а их сопротивления — R_A и R_V. Тогда $U = IR_A + V$. После подключения резистора: $U = 2IR_A + V/2$. Выразив из первого уравнения IR_A и подставив во второе, получим $V = 2/3 \cdot U = 6$ В. Итак, ответ: 6 В и 3 В.

Система оценивания

Связь между V и I до подключения резистора 3
Связь между V и I после подключения резистора 3
Показания вольтметра до подключения резистора 2
Показания вольтметра после подключения резистора 2

11 класс

Задача 1. Теннисный шарик

Обозначим скорость шарика до удара v, после удара — v'. Тогда

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}. \tag{6}$$

Так как доля теряемой энергии в системе отсчёта, где ракетка покоится, всегда одна и та же, то это соотношение верно для любых v и v'.

Пусть перед ударом ракетка движется со скоростью u, а теннисный шарик, летящий ей навстречу, со скоростью v_0. Перейдём в систему отсчёта, связанную с ракеткой. В ней шарик движется со скоростью $(v_0 + u)$. Скорость v_0 найдём из закона сохранения энергии: $v_0 = \sqrt{2gh_0}$. Согласно (6), скорость шарика относительно ракетки после удара $v_1 = (v_0+u)\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$. Чтобы после отскока от ракетки шарик снова подпрыгнул на высоту h_0, его скорость относительно Земли должна быть равна v_0, то есть

$$u + v_1 = v_0 = \sqrt{2gh_0}.$$

Таким образом,

$$u + \left(u + \sqrt{2gh_0}\right)\sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{2gh_0},$$

откуда

$$u = \sqrt{2gh_0}\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0} + \sqrt{h_1}} = 0{,}25 \text{ м/с}.$$

Система оценивания

Соотношение между скоростями шарика сразу до и сразу после удара 1
Переход в систему отсчёта, связанную с ракеткой 2
Рассмотрение удара в системе отсчёта, связанной с ракеткой 3
Переход в систему отсчёта, связанную с Землёй 1
Окончательное выражение для u 2
Численное значение u 1

Задача 2. Вертушка

Рассмотрим маленькую площадку S без отверстий отдельно от вертушки. Пусть её угловая скорость равна ω, и она находится на расстоянии R от оси вращения, следовательно, линейная скорость равна $v = \omega R$. Тогда можно связать тангенциальное ускорение площадки с силой сопротивления:

$$\rho S\frac{dv}{dt} = -\alpha S v, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{\rho}v.$$

Рассмотрим малый промежуток времени Δt. Из предыдущего выражения следует, что для этого промежутка выполняется соотношение:

$$\Delta v = -\frac{\alpha}{\rho}v\Delta t = -\frac{\alpha}{\rho}L,$$

где Δv — изменение скорости за время Δt, L — путь, пройденный площадкой за время Δt. Для движения по окружности $\Delta v = \Delta\omega R$, $L = \Delta\varphi R$, где $\Delta\omega$ — изменение угловой скорости, а $\Delta\varphi$ — угол, на который поворачивается площадка за время Δt, откуда

$$\Delta\omega = -\frac{\alpha}{\rho}\Delta\varphi,$$

поэтому соотношение для угла поворота φ площадки:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{\alpha}{\rho}\varphi, \quad \text{и окончательно}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\rho\omega_0}{2\pi\alpha}.$$

Так как этот результат не зависит от радиуса N, он справедлив для любой площадки, а поэтому и для всей вертушки.

Система оценивания

Второй закон Ньютона для малой площадки 2
Пропорциональность ускорения линейной скорости 2
Пропорциональность угла поворота изменению угловой скорости 3
Окончательная формула для N 3

Задача 3. Необычный способ надувания шарика

Пусть радиус шарика перед тем, как он лопнул, равен r, а толщина его стенок — d, V — объём стенок шарика. Рассмотрим маленький кусочек поверхности (рис. 20). Условие его равновесия:

$$\sigma \cdot 2\pi r_1 d \sin\alpha = p \cdot \pi r_1^2,$$

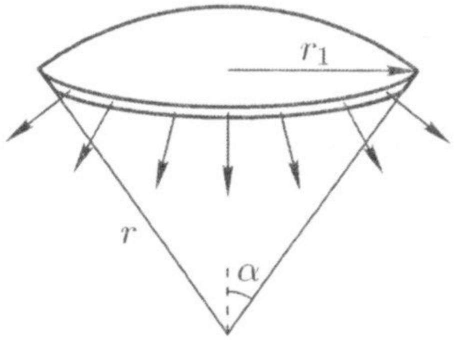


Рис. 20

где p — давление воздуха в шарике. Поскольку $r_1 = r\sin\alpha$, то

$$p = \frac{2\sigma d}{r}. \tag{7}$$

Из условия постоянства плотности резины $\rho V = 4\pi\rho r^2 d$, откуда с учётом (7)

$$p = \sigma\frac{V}{2\pi r^3}.$$

Уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$p\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \nu RT, \qquad \text{или} \qquad \frac{2}{3}\sigma V = \nu RT, \qquad \text{откуда} \qquad V = \frac{3}{2}\frac{\nu RT}{\sigma}.$$

Масса шарика равна $M = \rho V$, отсюда находим искомое отношение:

$$\frac{\mu\nu}{M} = \frac{2\mu\sigma}{3\rho RT} \approx 0{,}4.$$

Система оценивания

Условие равновесия куска поверхности шарика 3
Постоянство плотности резины 1
Уравнение Клапейрона–Менделеева 1
Выражение для массы шарика 1
Окончательное выражение для отношения масс 2
Численный ответ 2

Задача 4. Несимметричная схема

Пусть на участке AC сила тока равна I_1, на участке AF — I_2, а на участке CF — I_3. Мысленно поменяем полярность подключения источника ЭДС. При этом схема перейдёт сама в себя, сила тока на участке BF будет равна I_1, а на участке BC будет равна I_2. Поскольку в исходной схеме все токи будут течь в противоположную сторону, а силы токов будут такими же, то на участке CB сила тока равна I_2, а на участке EB равна I_1. По правилу Кирхгофа для контура $ADEA$

$$I_1R_1 + I_2R_2 - U_{DE} - I_2R_2 = 0,$$

откуда

$$U_{DE} = I_1R_1 = 3 \text{ В}.$$

Система оценивания

Равенство сил тока на участках AC и FB 2
Правило Кирхгофа для контура $ADEA$ 2
Равенство сил тока на участках AF и CB 2
Окончательная формула для U_{DE} 2
Численный ответ 2

Задача 5. Три кольца

Повернём всю систему на 180°. При этом, с одной стороны, система колец перейдёт сама в себя, а с другой, направление токов в вертикальном кольце изменится на противоположное. Отсюда следует, что токи, текущие по любой дуге вертикального кольца, равны нулю (рис. 21). Из аналогичных соображений можно понять, что токи, текущие по любой дуге каждого из наклонных колец, равны. Обозначим их через I.

Выберем некоторый контур, например, кольцо, плоскость которого находится под углом α к вектору магнитной индукции. Выражение для потока, пронизывающего контур, запишется в виде

$$\Phi = BS\cos(\pi/2-\alpha) = \pi r^2 B\sin\alpha,$$

следовательно, ЭДС индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2\frac{dB}{dt}\sin\alpha = -\pi r^2 k\sin\alpha.$$

С другой стороны, по закону Кирхгофа

$$\mathscr{E} = IR = 2\pi r\rho I.$$

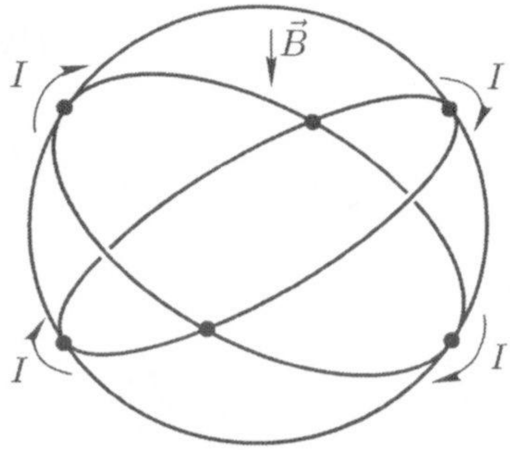


Рис. 21. Вид в перспективе

Окончательно получим

$$I = -\frac{rk}{2\rho}\sin\alpha.$$

Знак минус означает, что при $k>0$ направление токов противоположно указанному на рисунке.

Система оценивания

Равенство нулю силы тока в вертикальном кольце 2
Равенство сил тока в наклонных кольцах 1
Выражение для потока через наклонные кольца 1
Выражение для ЭДС индукции 1
Закон Кирхгофа для наклонных колец 1
Окончательная формула для I 2
Направление токов в кольцах 2