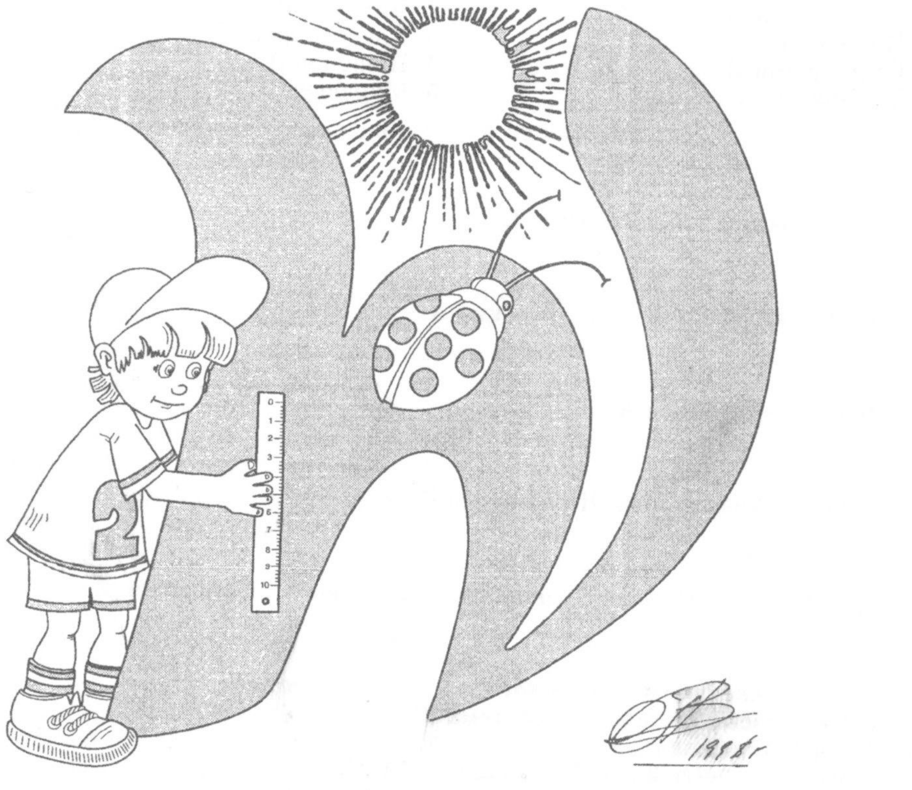
Министерство образования Российской Федерации
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2002/2003 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования Российской Федерации
Тел.: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: vip@pop3.mipt.ru

Авторы задач

8 класс	9 класс
1. Александров Д.	1. Чудновский А.
2. Слободянин В.	Мех I 2. Ефимов В.
3. Шеронов А.	3. Шеронов А.
4. Подлесный Д.	4. Подлесный Д.

10 класс	11 класс
1. Муравьев В.	1. Муравьев В.
2. Слободянин В.	2. Чивилев В.
3. Чивилев В.	3. Александров Д.
4. Слободянин В.	4. Шеронов А.
5. Чудновский А.	5. Муравьев В.

Общая редакция — Слободянин В.

Техническая редакция — Чудновский А.

Коррекция — Алябьев А.

Рецензия — Александров Д., Чивилев В.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А., Самокотин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 2 декабря 2002 г. в 21:27.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

Условия

8 класс

Задача 1. Тайна рождения Буратино

Последние исследования историков показали, что Буратино был изготовлен не из одного, а из двух поленьев. Его голову Папа Карло выточил из дуба, а остальные части тела выстругал из сосны. Известно, что плотность дуба $\rho_1 = 690$ кг/м^3, вес изготовленной из него части тела составляет треть от веса Буратино, а объем — только четверть. Найдите плотность ρ_2 соснового полена.

Задача 2. Пешеход Глюк

Экспериментатор Глюк шел в лабораторию вдоль железнодорожного полотна со скоростью $u = 4$ км/ч. Он заметил, что по путям идут две встречные электрички, одна из которых составлена из $n_1 = 9$ вагонов, а другая — из $n_2 = 10$ вагонов. Глюк обратил внимание на то, что головные вагоны поравнялись друг с другом как раз напротив него. Это ему показалось удивительным. Но еще больше Глюк удивился, когда увидел, что и последние вагоны разошлись тоже строго напротив него. Глюку стало любопытно, с какой скоростью v идут электрички. А вы можете ответить на этот вопрос? Считайте, что скорости обеих электричек одинаковы.

Задача 3. Парафиновое кольцо

В ванну, заполненную водой, опустили кольцо из парафина (рис. 1). Площадь поперечного сечения отверстия кольца $S = 300$ см^2, а его высота $H = 5$ см. Какую массу бензина можно влить внутрь кольца так, чтобы он не попал наружу? Известны: $\rho_в = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $\rho_п = 900$ кг/м^3 — плотность парафина, $\rho_б = 700$ кг/м^3 — плотность бензина.

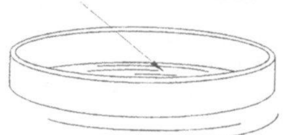


Рис. 1

Задача 4. Чай с кубиками льда

Теплота I

В калориметр с горячим чаем бросили кубик льда, имеющий температуру 0°C. К моменту установления теплового равновесия температура чая понизилась на $\Delta t_1 = 12$°C. Когда в калориметр бросили другой такой же кубик льда, температура чая понизилась еще на $\Delta t_1 = 10$°C. Найдите массу кубика льда. Первоначальная масса чая $M = 100$ г. Теплоемкостью калориметра, теплообменом с окружающей средой и примесями заварки в чае пренебречь.

9 класс

Задача 1. Источник в зазеркалье (1)

Оптическая система состоит из точечного источника S, идеальной собирающей линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала конечных размеров (рис. 2). Источник находится на двойном фокусном расстоянии от центра O линзы и лежит на ее главной оптической оси. Зеркало параллельно этой оси, касается линзы, а его края находятся на расстояниях $a = 3F/2$ и $b = 5F$ от плоскости линзы. Найдите все изображения источника в системе. Для каждого изображения укажите области в плоскости рисунка, из которых можно увидеть это изображение.

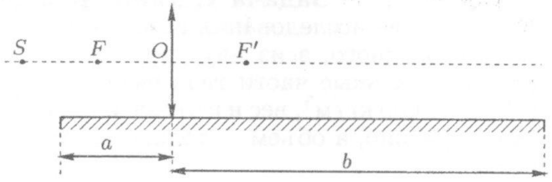


Рис. 2

Задача 2. Путевая скорость

Камень бросили вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время после начала полета абсолютная величина его мгновенной скорости станет равна путевой скорости? Сопротивление воздуха не учитывать, считать ускорение свободного падения $g = 10$ м/с.

Примечание. Путевая скорость определяется как отношение пройденного пути ко времени прохождения этого пути.

Задача 3. Липовое кольцо

Известно, что бензин растекается по поверхности воды, а брусок из липы в бензине не тонет. В ванну, заполненную водой, опустили кольцо из липы (рис. 3). Площадь поперечного сечения отверстия кольца $S_к = 300$ см^2, а его высота $H = 5$ см. Какую массу бензина можно влить внутрь кольца так, чтобы он не попал наружу? Плотность липы $\rho_л = 500$ кг/м^3.

Рис. 3

Задача 4. Чай со льдом

В калориметр с горячим чаем бросили кубик льда, имеющий температуру 0°C. После установления теплового равновесия температура чая понизилась на $\Delta t_1 = 12$°C. Когда в калориметр бросили другой такой же кубик льда, температура чая понизилась еще на $\Delta t_1 = 10$°C. Насколько понизится температура чая, если в него бросить точно такой же третий кубик? Теплоемкостью калориметра, теплообменом с окружающей средой и примесями заварки в чае пренебречь.

10 класс

Задача 1. Потерянное направление

Материальная точка движется в однородном силовом поле (рис. 4). В точке A ее скорость $v_A = 5$ м/с. Построением с помощью циркуля и линейки с делениями определите направление вектора ускорения этой материальной точки и вычислите его модуль. Найдите скорость v_B в точке B. Длина шкалы под графиком соответствует 6 м. Необходимые построения делайте на рисунке 4. Текст условия сдайте вместе с решением задачи.

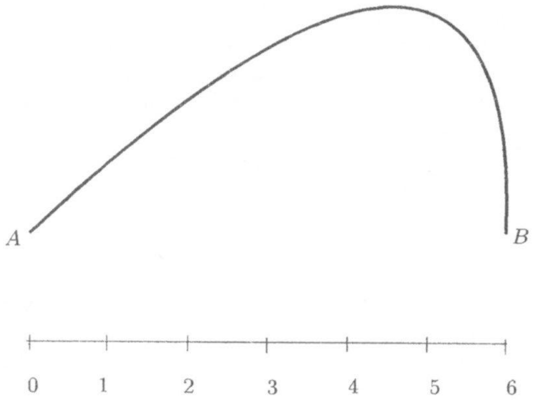


Рис. 4

Задача 2. Катушка на склоне

Сначала катушку с нитками положили на наклонную плоскость и свободный конец нити закрепили так, что прямой участок нити оказался параллелен склону (рис. 5). При этом со стороны нити на катушку действовала сила T. В другой раз катушку установили так, как показано на рисунке 6. Прямой участок нити вновь оказался параллелен склону. В обоих случаях катушка неподвижна. Радиусы обода и оси катушки соответственно равны R и r. Найдите величины и направления сил трения F_1 и F_2, действующих на катушку, в первом и втором случаях.

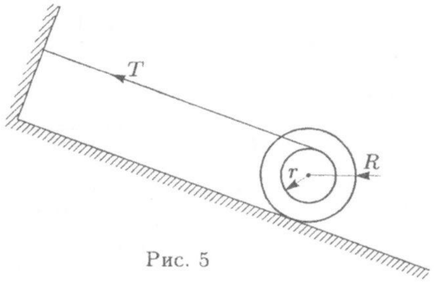


Рис. 5

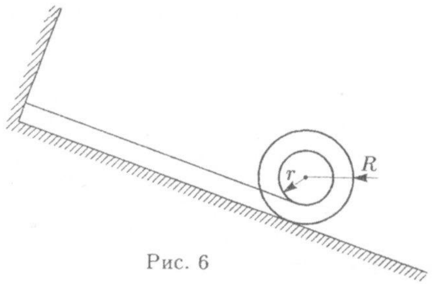


Рис. 6

Задача 3. Трубка на карусели (1)

Тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с открытыми вертикально расположенными коленами закреплена на горизонтальной платформе (рис. 7). Вертикальные колена трубки высотой $2H$ расположены на расстояниях R и $3R$ от вертикальной оси OO'. В трубку наливают жидкость плотностью ρ до высоты H. Затем левое колено закрывают пробкой и платформу приводят во вращение. При вращении вокруг оси OO' с постоянной угловой скоростью в коленах устанавливается разность уровней жидкости $H/2$.

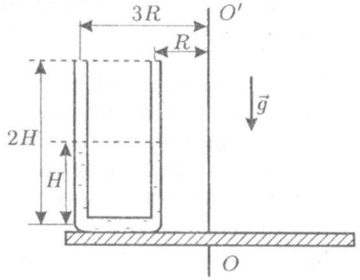


Рис. 7

1. Найдите давление воздуха под пробкой.
2. Найдите угловую скорость вращения.

Атмосферное давление P_0 известно. Давление насыщенных паров жидкости не учитывать.

Задача 4. Температура в центре цикла

Циклический процесс $ABDCA$, совершаемый над идеальным газом, состоит из двух изохор (AB и CD) и двух изобар (AC и BD). Темпереатура газа в точках A, B и C соответственно равна T_A, T_B и T_C. Найдите температуру T_D в точке D и температуру T_O в точке O, лежащей на пересечении диагоналей (рис. 8).

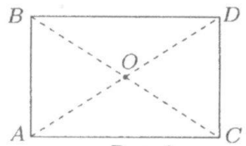


Рис. 8

Задача 5. Источник в зазеркалье (2)

Оптическая система состоит из точечного источника S, идеальной рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала конечных размеров (рис. 9). Источник находится на двойном фокусном расстоянии от центра O линзы и лежит на ее главной оптической оси. Зеркало параллельно этой оси, касается линзы, а его края находятся на расстояниях $a = 3F/2$ и $b = F$ от плоскости линзы. Найдите все изображения источника в системе. Для каждого изображения укажите области в плоскости рисунка, из которых можно увидеть это изображение. Каждую область постройте на отдельном рисунке.

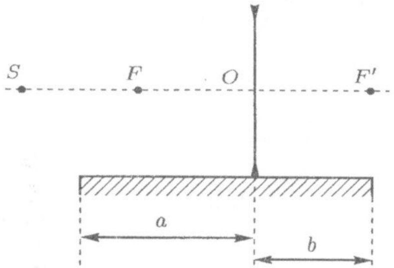


Рис. 9

11 класс

Задача 1. К вопросу о ширине петли

По рельсам катится вагонетка. Радиус ее колеса равен r, а радиус реборды (выступающей части обода колеса, предохраняющей его от схода с рельса) составляет R (рис. 10). Траектория точки A реборды имеет вид, показанный на рис. 11. Определите ширину «петли» δ.

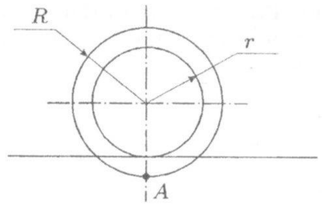


Рис. 10

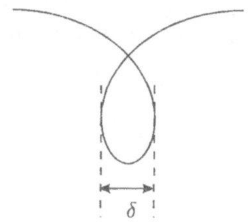


Рис. 11

Задача 2. Трубка на карусели (2)

На горизонтальной платформе закреплена тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с открытыми вертикально расположенными коленами (рис. 12). Вертикальные колена трубки высотой $2H$ расположены на расстояниях R и $5R$ от вертикальной оси OO'. В трубку наливают жидкость плотностью ρ до высоты H. Затем левое колено закрывают пробкой и плаформу приводят во вращение. При вращении вокруг оси OO' с постоянной угловой скоростью в коленах устанавливается разность уровней жидкости $H/3$.

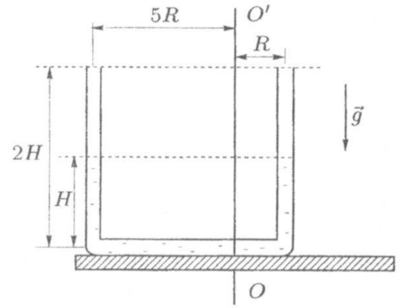


Рис. 12

1. Найти давление воздуха под пробкой.
2. Найти угловую скорость вращения.

Атмосферное давление P_0 известно. Давление насыщенных паров жидкости не учитывать.

Задача 3. Неидеальный газ

Для определения значения постоянной адиабаты $\gamma = c_p/c_V$ неидеального газа экспериментатор Глюк провел изобарический 1-2 и изохорический 1-3 процессы, в ходе которых внутренняя энергия газа изменялась на одну и ту же малую величину (рис. 13). Оказалось, что в изохорическом процессе изменение температуры вдвое больше, чем в изобарическом, и что в изобарическом процессе треть теплоты, полученной газом, пошла на совершение работы против внешних сил. Чему равно значение γ для исследуемого Глюком газа?

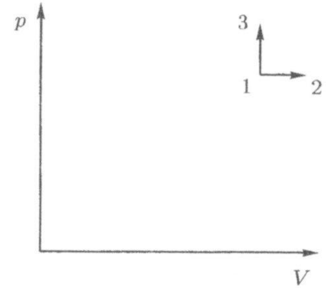


Рис. 13

Задача 4. Разные вольтметры

Вольтметр V_{me} магнитоэлектрической системы подключен к четырем источникам тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $\mathcal{E}_3 = 3$ В, $\mathcal{E}_4 = 4$ В (рис. 14). Для ограничения токов в схему включены резисторы. Их сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм. Если вольтметр V_{me} заменить на электростатический вольтметр V_{es}, то показания последнего окажутся в 2 раза больше, чем у V_{me}. Найдите величину тока, протекающего через вольтметр V_{me} в первом эксперименте. Указание: электростатический вольтметр является идеальным вольтметром в отличие от магнитоэлектрического, который имеет конечное внутренее сопротивление.

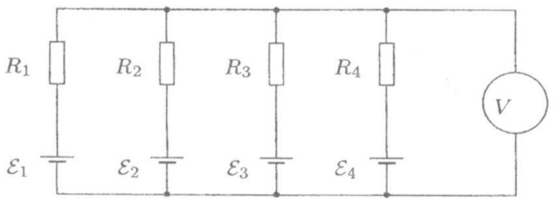


Рис. 14

Задача 5. Заряд шара

Шар радиуса R через катушку индуктивности L соединен с землей (рис. 15). Из бесконечности на него налетает пучок электронов. Определите максимальный заряд шара и постройте график зависимости силы тока, текущего через катушку, от времени. Считайте, что изначально шар был не заряжен, плотность электронов в налетающем пучке n, а их скорость $v \ll c$, где c — скорость света.

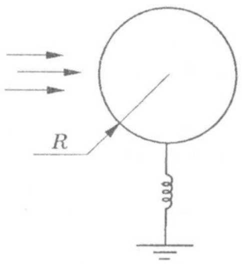


Рис. 15

Возможные решения

8 класс

Задача 1. Тайна рождения Буратино

Пусть масса дуба m_1, его объем V_1, масса сосны m_2, объем сосны V_2, масса Буратино m, его объем V, средняя плотность Буратино ρ. Тогда

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m}{3} : \frac{V}{4} = \frac{4}{3}\frac{m}{V} = \frac{4}{3}\rho. \tag{1}$$

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{2m}{3} : \frac{3V}{4} = \frac{8}{9}\frac{m}{V} = \frac{8}{9}\rho. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим

$$\rho_2 = \frac{8}{9}\rho = \frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}\rho_1 = \frac{2}{3}\rho_1 = 460\ \text{кг/м}^3.$$

Задача 2. Пешеход Глюк

Первый способ. Наиболее короткое решение получается, если перейти в систему отсчета, связанную с Глюком. В этом случае скорость одной электрички $v_1 = v - u$, а скорость другой составляет $v_2 = v + u$. Пусть l — длина одного вагона, тогда длина первой электрички $L_1 = n_1 l$, а второй $L_2 = n_2 l$. Обе электрички пройдут мимо Глюка за одно и то же время

$$t = \frac{n_1 l}{v - u} = \frac{n_2 l}{v + u}.$$

Из этого уравнения следует, что скорость электричек

$$v = u\frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} = 76\ \text{км/ч}.$$

Второй способ. В системе отсчета, связанной с железнодорожным полотном, за время t первая электричка пройдет путь $L_1 = n_1 l + ut$, а вторая — путь $L_2 = n_2 l - ut$. Поскольку скорости электричек одинаковы, то и $L_1 = L_2$. Из этого равенства находим $l = 2ut(n_2 - n_1)$. Скорость электричек $v = L_1/t = (2n_1 + 1)u = 76$ км/ч.

Задача 3. Парафиновое кольцо

Пусть s — площадь горизонтального сечения парафинового кольца (рис. 16). Вес кольца уравновешивает сила гидростатического давления: $mg = ps$, где $m = \rho_п sH$, $p = \rho_в gh$, а h — глубина погружения кольца. Отсюда

$$\rho_п gH = \rho_в gh. \tag{1}$$

При заполнении внутренней части кольца бензином гидростатическое давление на уровне нижнего края кольца остается постоянным. Поскольку плотность $\rho_б$ бензина меньше плотности $\rho_в$ воды, общая высота слоя бензина и воды внутри кольца будет больше высоты h воды снаружи кольца. Так как парафин в бензине тонет, бензин, в конечном счете, станет переливаться через верхний край кольца. Пусть x — максимальная толщина слоя бензина, влитого внутрь кольца, тогда $(H - x)$ — толщина слоя воды внутри кольца. Запишем в аналитическом виде установленное нами равенство гидростатических давлений:

$$\rho_{б} g x + \rho_{в} g (H - x) = \rho_{в} g h. \qquad (2)$$

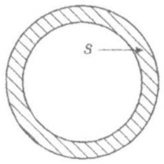


Рис. 16

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим:

$$x = H\frac{\rho_{в} - \rho_{п}}{\rho_{в} - \rho_{б}} = \frac{5}{3}\ \text{см} \approx 1{,}67\ \text{см}.$$

Объем влитого бензина $V = Sx = 500\ \text{см}^3$. Масса влитого бензина $m_{б} = \rho_{б} V = 0{,}35$ кг.

Задача 4. Чай с кубиками льда

Запишем уравнение теплового баланса для первого случая:

$$cM\Delta t_1 = m\lambda + cm(t_1 - \Delta t_1),$$

где m — масса кубика льда, λ — удельная теплота плавления льда, c — удельная теплоемкость воды, t_1 — исходная температура чая. Отсюда

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \frac{\lambda}{c} + t_1. \qquad (1)$$

В случае бросания в чай второго кубика мы можем записать уравнение, аналогичное уравнению (1):

$$\left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \frac{\lambda}{c} + t_1. \qquad (2)$$

Исключая из (1) и (2) правые части, получим:

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2),$$

откуда легко найти отношение масс:

$$\frac{M}{m} = \frac{2\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 10, \qquad \text{следовательно,} \qquad m = 10\ \text{г}.$$

9 класс

Задача 1. Источник в зазеркалье (1)

Источник имеет два первичных изображения: S_1 — в зеркале и S_2 — в линзе. S_2 симметрично S относительно плоскости линзы, так как источник находится на двойном фокусном расстоянии (рис. 17). S_3 есть изображение источника S_1 в линзе, а S_4 — источника S_2 в зеркале. Других изображений нет. Области, из которых можно увидеть изображения, определяются пучками лучей, образующих эти изображения. Изображение S_1 можно увидеть из области 1 верхней полуплоскости (рис. 18). Изображение S_3 видно из области 3, ограниченной лучами, преломившимися на краях линзы. Изображение S_2 видно из области 2, которая ограничена лучами от линзы и краем зеркала. Область видимости S_4 задается теми лучами, которые попали на зеркало от источника S_2 после линзы.

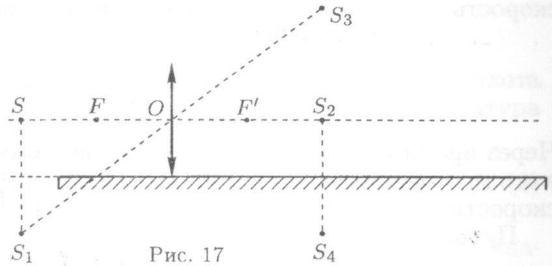


Рис. 17

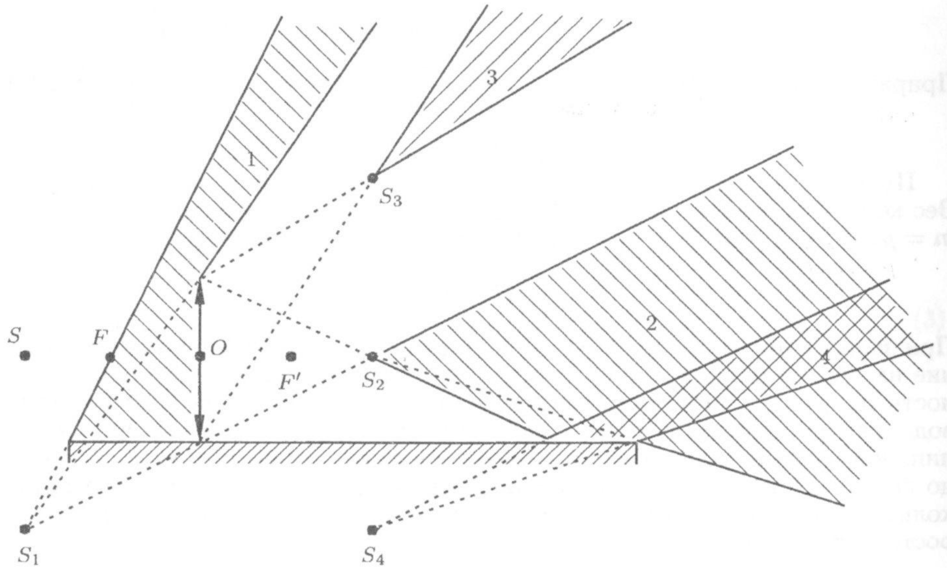


Рис. 18

Задача 2. Путевая скорость

Из графика (рис. 19) видно, что при движении камня вверх его средняя скорость $v_{\text{ср}}$ всегда больше мгновенной скорости, так как

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v}{2} = v + \frac{gt_1}{2}.$$

Через время $t_0 = v_0/g$ камень достигнет максимальной высоты $H = v_0^2/(2g)$, а его мгновенная скорость обратится в ноль. При $t > t_0$ величина мгновенной скорости $v = g(t - t_0) = gt - v_0$. (1)

Путь, пройденный камнем за время t,

$$S = H + \frac{g(t-t_0)^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} + \frac{gt^2}{2} - v_0 t.$$

Отсюда находим путевую скорость

$$v_{\text{п}} = \frac{S}{t} = \frac{v_0^2}{gt} + \frac{gt}{2} - v_0. \qquad (2)$$

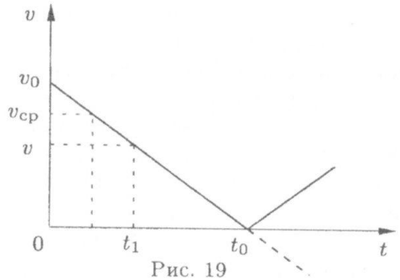


Рис. 19

Приравнивая (1) и (2), получим $\dfrac{gt}{2} = \dfrac{v_0^2}{gt}$, откуда $t = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{2} \approx 1{,}4$ с.

Задача 3. Липовое кольцо

Пусть s — площадь горизонтального сечения парафинового кольца (рис. 20). Вес кольца уравновешивает сила гидростатического давления: $mg = ps$, где $m = \rho_{\text{л}} sH$, $p = \rho_{\text{в}} gh$, а h — глубина погружения кольца. Отсюда

$$\rho_{\text{л}} gH = \rho_{\text{в}} gh. \qquad (1)$$

При заполнении внутренней части кольца бензином гидростатическое давление на уровне нижнего края кольца остается постоянным. Поскольку плотность $\rho_{\text{б}}$ бензина меньше плотности $\rho_{\text{в}}$ воды, общая высота слоя бензина и воды внутри кольца будет больше высоты h воды снаружи кольца. Так как липа в бензине не тонет, бензин, в конечном счете, станет подтекать под кольцо снизу. Пусть x — максимальная толщина слоя бензина, влитого внутрь кольца. Запишем в аналитическом виде установленное нами равенство гидростатических давлений:

$$\rho_{\text{б}} gx = \rho_{\text{в}} gh. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим:

$$x = H\rho_{\text{л}}/\rho_{\text{б}}.$$

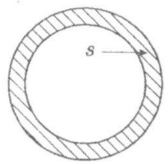


Рис. 20

Объем влитого бензина $V = Sx = SH\rho_{\text{л}}/\rho_{\text{б}}$.
Масса влитого бензина $m_{\text{б}} = \rho_{\text{б}} V = SH\rho_{\text{л}} = 0{,}75$ кг.

Задача 4. Чай со льдом

Запишем уравнение теплового баланса для первого случая:

$$cM\Delta t_1 = m\lambda + cm(t_1 - \Delta t_1),$$

где M — исходная масса чая, m — масса кубика льда, λ — удельная теплота плавления льда, c — удельная теплоемкость воды, t_1 — исходная температура чая. Отсюда

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \frac{\lambda}{c} + t_1. \qquad (1)$$

В случае бросания в чай второго кубика мы можем записать уравнение, аналогичное уравнению (1):

$$\left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \frac{\lambda}{c} + t_1. \qquad (2)$$

Исключая из (1) и (2) правые части, получим:

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2),$$

откуда легко найти отношение масс:

$$\frac{M}{m} = \frac{2\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 10.$$

В случае бросания в чай третьего кубика получим:

$$\left(\frac{M}{3m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) = \frac{\lambda}{c} + t_1. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), найдем

$$\Delta t_3 = \frac{2}{1 + 3m/M}\Delta t_1 - \Delta t_2 \approx 8{,}5^\circ\text{C}.$$

10 класс

Задача 1. Потерянное направление

Запишем для движущейся материальной точки кинематические уравнения в векторном виде:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{a}t, \qquad (1)$$

$$\vec{S}_{AB} = \vec{v}_A t + \vec{a}\frac{t^2}{2}, \qquad (2)$$

где $\vec{a}$ — искомое ускорение, t — время движения из A в B, $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ — скорости в точках A и B соответственно. Подставляя $\vec{a}t$ из (1) в (2), получим:

$$\vec{S}_{AB} = (\vec{v}_A + \vec{v}_B)\frac{t}{2}, \qquad (3)$$

$$\vec{a}\frac{t^2}{2} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A)\frac{t}{2}. \qquad (4)$$

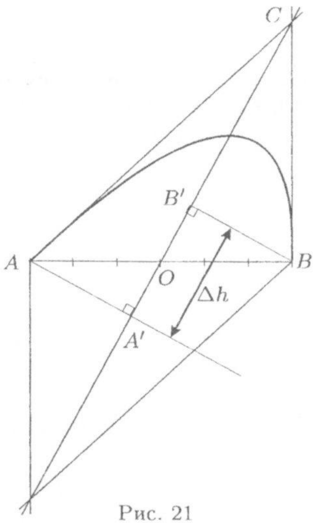


Рис. 21

Из (3) следует, что вектор $\vec{S}_{AB}$ параллелен вектору $\vec{v}_A + \vec{v}_B$, а из (4) замечаем, что ускорение $\vec{a}$ параллельно вектору $\vec{v}_B - \vec{v}_A$. В точках A и B проведем касательные к траектории (рис. 21). Пусть C — точка их пересечения, тогда длина $AC = v_A t/2$, а длина $CB = v_B t/2$. Измерим линейкой отрезки AC, CB и найдем скорость

$$v_B = v_A \frac{CB}{AC} \approx 3{,}4 \text{ м/с}.$$

Векторы $\vec{S}_{AB}$ и $\vec{a}t^2/2$ являются диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{v}_A t/2$ и $\vec{v}_B t/2$. Известно, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, вектор, проведенный из точки C к середине стороны AB, будет параллелен ускорению $\vec{a}$. Скалярно перемножим уравнения (4) и (3):

$$\vec{a}\vec{S}_{AB} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}. \qquad (5)$$

Длина проекции вектора $\vec{S}_{AB}$ на направление CO составляет

$$\Delta h \approx 2{,}9 \text{ м}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует:

$$a = \left|\frac{v_B^2 - v_A^2}{2\Delta h}\right| \approx 2{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2. Катушка на склоне

Тело находится в равновесии, если сумма всех действующих на него сил и сумма моментов этих сил равны нулю. За положительное направление сил примем вектор $\vec{T}$. Возьмем в качестве полюса точку O на оси катушки и будем считать момент силы $\vec{T}$ положительным. Пусть m — масса катушки, g — ускорение свободного падения, α — угол наклона плоскости к горизонту.

1. Запишем уравнение моментов для первого случая (рис. 22):

$$Tr - F_1 R = 0, \qquad \text{откуда} \qquad F_1 = T\frac{r}{R}.$$

2. Уравнение моментов для второго случая:

$$-T'r - F_2 R = 0, \qquad \text{откуда} \qquad F_2 = -T'\frac{r}{R}.$$

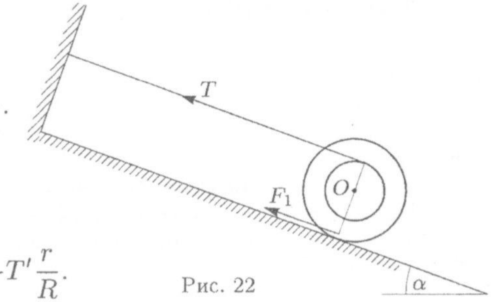


Рис. 22

Заметим, что сила $\vec{F}_2$ противонаправлена $\vec{T}$ (рис. 23). Запишем уравнение сил для обоих случаев:

$$T + F_1 - mg\sin\alpha = 0,$$

$$T' + F_2 - mg\sin\alpha = 0.$$

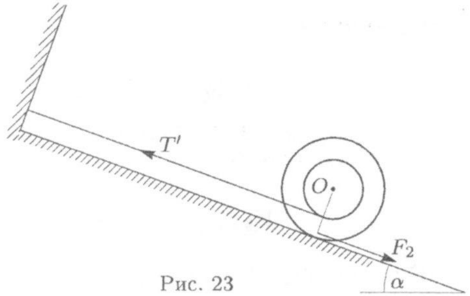


Рис. 23

Легко видеть, что

$$T\cdot\frac{R+r}{R} = mg\sin\alpha = T'\cdot\frac{R-r}{R}, \qquad \text{откуда} \qquad T' = T\cdot\frac{R+r}{R-r}.$$

Подставив T' в выражение для F_2, получим $\qquad F_2 = T\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{R+r}{R-r}.$

Задача 3. Трубка на карусели (1)

Высоты столба воздуха под пробкой и жидкости в левом и правом коленах равны $3H/4$, $5H/4$ и $3H/4$ соответственно. По закону Бойля-Мариотта для воздуха под пробкой $p\cdot 3H/4 = p_0 H$. Отсюда давление под пробкой $p = 4p_0/3$. Давление у левого и правого изгибов трубки

$$p_1 = p + \rho g\cdot\frac{5}{4}H = \frac{4}{3}p_0 + \frac{5}{4}\rho gH, \qquad p_2 = p_0 + \frac{3}{4}\rho gH.$$

Выделим мысленно в горизонтальном колене горизонтальный цилиндр из жидкости длиной $3R - R = 2R$ и сечением S. Масса этого цилиндра $m = 2\rho RS$, а его центр масс находится на расстоянии $r = (3R + R)/2 = 2R$

от оси OO'. По второму закону Ньютона для выделенного цилиндра $p_1S - p_2S = m\omega^2 r$, где ω — угловая скорость. Подставив в последнее равенство записанные выше выражения для p_1, p_2, m и r, получим уравнение

$$\frac{p_0}{3} + \frac{\rho g H}{2} = 4\rho\omega^2 R^2.$$

Отсюда угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p_0 + 3\rho g H}{6\rho R^2}}.$$

Задача 4. Температура в центре цикла

Точки A и C лежат на одной изобаре. Им соответствует давление p_A и объемы V_A и V_C. Применительно к этим точкам уравнение Менделеева-Клапейрона имеет вид:

$$p_A V_A = \nu R T_A, \qquad p_A V_C = \nu R T_C.$$

Поделив почленно эти уравнения друг на друга, получим

$$V_A/V_C = T_A/T_C. \qquad (1)$$

Аналогичное соотношение можно получить для точек B и D:

$$V_A/V_C = T_B/T_D. \qquad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), найдем

$$T_D = \frac{T_B T_C}{T_A}.$$

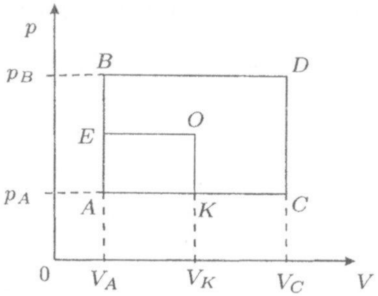


Рис. 24

Проведем через точку O изохору KO и изобару EO. Точка K делит изобару AC пополам (рис. 24), то есть

$$V_K = \frac{1}{2}(V_A + V_C).$$

Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона

$$T_K = \frac{p_A V_K}{\nu R} = \frac{p_A V_A + p_A V_C}{2\nu R} = \frac{1}{2}(T_A + T_C).$$

Аналогичным образом найдем

$$T_E = \frac{1}{2}(T_A + T_B).$$

Температуру T_O найдем по тому же алгоритму, что и T_D:

$$T_O = \frac{T_E T_K}{T_A} = \frac{1}{4}(T_A + T_B + T_C + T_D).$$

Заметим, что T_O определяется как среднее арифметическое температур в углах цикла.

Задача 5. Источник в зазеркалье (2)

Источник имеет два первичных изображения: S_1 — в зеркале и S_2 — в линзе. S_3 есть изображение источника S_1 в линзе, а S_4 — источника S_2 в зеркале. S_5 — это изображение источника S_3 в зеркале. Других изображений нет. Области, из которых можно увидеть изображения, определяются пучками лучей, образующих эти изображения. Изображение S_1 можно увидеть из области 1 верхней полуплоскости (рис. 25). Изображения S_2 и S_3 видны из областей 2 и 3, которые ограничены лучами от линзы и краем зеркала. Области видимости S_4 и S_5 задаются теми лучами, которые попали на зеркало после преломления в линзе. На последнем рисунке показан ход лучей, образующих границу видимости источника S_5. Заметим, что все изображения мнимые.

Примечание. Для решения задачи не требуется знание формулы тонкой линзы.

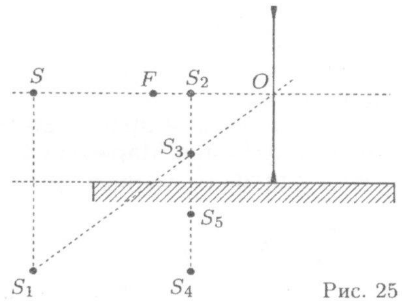


Рис. 25

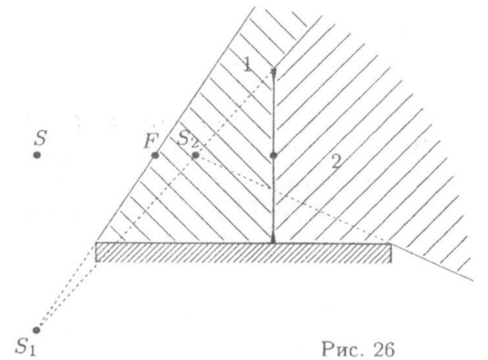


Рис. 26

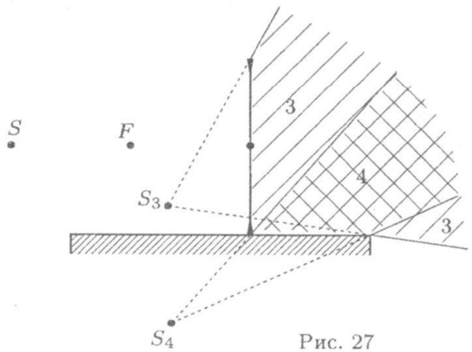


Рис. 27

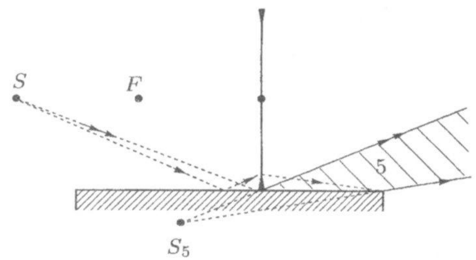


Рис. 28

11 класс

Задача 1. К вопросу о ширине петли

В моменты, когда точка A проходит крайнее левое и крайнее правое положения «петли», ее скорость v направлена вертикально, то есть $\cos\varphi = v_0/u = (\omega r)/(\omega R) = r/R$ (рис. 29). Здесь u — скорость точки A в системе отсчета, связанной с вагонеткой. Время между прохождениями двух крайних положений

$$t = \frac{2\varphi}{\omega} = 2\frac{r}{v_0}\arccos\frac{r}{R}, \qquad (1)$$

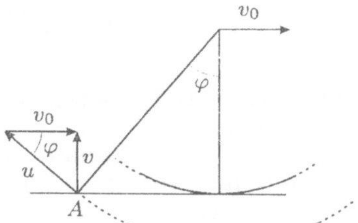


Рис. 29

где ω — угловая скорось колеса, v_0 — скорость вагонетки. Величину δ находим как сумму двух перемещений: одно — перемещение центра колеса относительно рельса, а другое — движение точки A относительно центра колеса O:

$$\delta = 2R\sin\varphi - vt = 2\sqrt{R^2 - r^2} - 2r\arccos\frac{r}{R}.$$

Задача 2. Трубка на карусели (2)

Высоты столба воздуха под пробкой и жидкости в левом и правом коленах равны $5H/6$, $7H/6$, $5H/6$ соответственно. По закону Бойля-Мариотта для воздуха под пробкой $P = 6P_0/5$. Давление у левого и правого изгибов трубки

$$P_1 = P + \rho g\cdot\frac{7}{6}H = \frac{6}{5}P_0 + \frac{7}{6}\rho gH, \qquad P_2 = P_0 + \frac{5}{6}\rho gH.$$

Выделим мысленно в горизонтальном колене горизонтальный цилиндр из жидкости длиной $6R$ и сечением S. Масса этого цилиндра $m = 6\rho RS$, а его центр масс находится на расстоянии $r = 2R$ от оси OO'. По второму закону Ньютона для выделенного цилиндра $P_1S - P_2S = m\omega^2 r$. С учетом выражений для P_1, P_2, m и r, находим угловую скорость вращения

$$\omega = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3P_0 + 5\rho gH}{5\rho R^2}}.$$

Задача 3. Неидеальный газ

В изохорическом процессе теплота ΔQ_V, полученная газом, пошла на увеличение его внутренней энергии:

$$\Delta Q_V = \Delta U = C_V\cdot 2\Delta T, \qquad \text{откуда} \qquad C_V = \frac{\Delta U}{2\Delta T}.$$

В изобарическом процессе теплота ΔQ_p, полученная газом, пошла на увеличение внутренней энергии и работу против внешних сил:

$$\Delta Q_p = \Delta U + \Delta A_p = \Delta U + \frac{\Delta Q_p}{3}, \qquad \text{откуда} \qquad \Delta Q_p = \frac{3}{2}\Delta U.$$

По определению $\quad C_p = \dfrac{\Delta Q_p}{\Delta T} = \dfrac{3\Delta U}{2\Delta T}.$

Таким образом, $\quad \gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = 3.$

Задача 4. Разные вольтметры

Пусть I_i — ток через резистор R_i. Из закона Ома для контура, содержащего $\mathcal{E}_i$, R_i и вольтметр, выразим показания вольтметра

$$U = \mathcal{E}_i - I_iR_i, \qquad \text{откуда} \qquad I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R_i} - U\frac{1}{R_i}. \qquad (1)$$

Через вольтметр течет ток $\quad I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \qquad (2)$

Пусть R — сопротивление вольтметра, тогда $\quad I = U/R. \qquad (3)$

Из (1), (2) и (3) находим $\quad U = \dfrac{\sum\frac{\mathcal{E}_i}{R_i}}{\frac{1}{R} + \sum\frac{1}{R_i}}, \qquad (4)$

Учтем, что R_{me} конечное, а $R_{es} = \infty$, и запишем условие $U_{es} = 2U_{me}$:

$$\frac{\sum\frac{\mathcal{E}_i}{R_i}}{\sum\frac{1}{R_i}} = U_{es} = 2U_{me} = 2\frac{\sum\frac{\mathcal{E}_i}{R_i}}{\frac{1}{R_{me}} + \sum\frac{1}{R_i}}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{1}{R_{me}} = \sum\frac{1}{R_i}.$$

Подставив (4) в (3), получим для вольтметра магнитоэлектрической системы

$$I_{me} = \frac{U_{me}}{R_{me}} = \frac{1}{R_{me}}\cdot\frac{\sum\frac{\mathcal{E}_i}{R_i}}{\frac{1}{R_{me}} + \frac{1}{R_{me}}} = \frac{1}{2}\sum\frac{\mathcal{E}_i}{R_i} = 2\text{ мА}.$$

Задача 5. Заряд шара

Пусть Q — заряд шара в некоторый момент времени, I — ток, протекающий через катушку индуктивности, тогда напряжение на катушке:

$$U = L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (1)$$

Из закона сохранения заряда $dQ = ne\pi R^2 v dt - I dt$ находим

$$I = ne\pi R^2 v - \frac{dQ}{dt}. \qquad (2)$$

Продифференцируем (2) по времени и подставим dI/dt в (1):

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 RL}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 RL}}. \qquad (4)$$

В начальный момент $\quad Q|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = Q_{max}\omega = ne\pi R^2 v, \quad (5)$

откуда $\quad Q = Q_{max}\sin\omega t, \quad$ где $\quad Q_{max} = ne\pi R^2 v\sqrt{4\pi\varepsilon_0 RL}. \quad (6)$

Продифференцировав (6) по времени и подставив в (2), получим (рис. 30)

$$I = ne\pi R^2 v(1 - \cos\omega t).$$

На рисунке 30

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 RL}, \qquad I_m = ne\pi R^2 v.$$

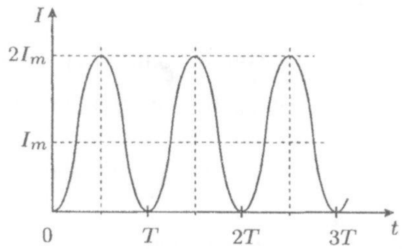


Рис. 30