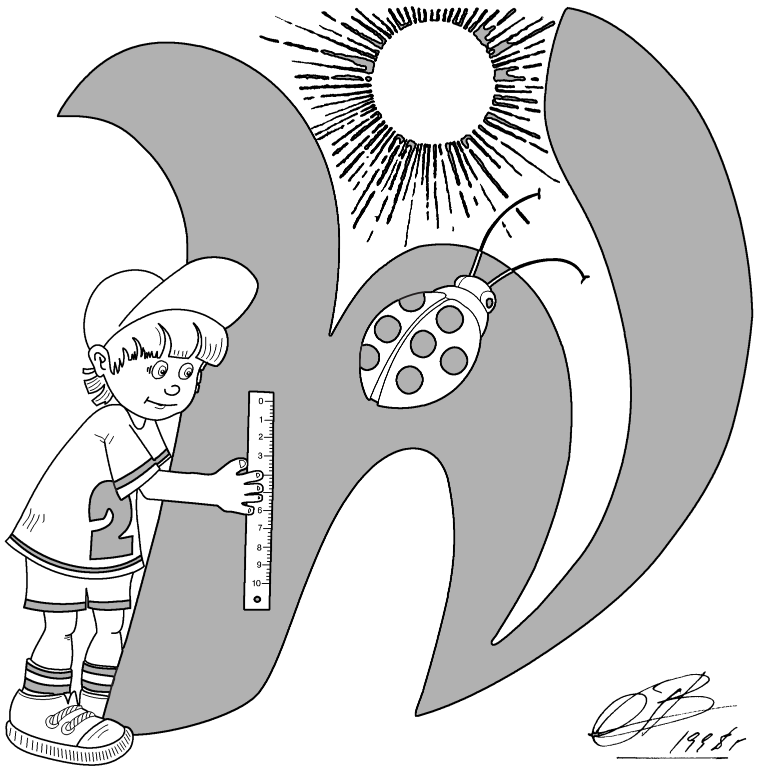
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2001/2002 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников Министерства образования и науки Российской Федерации

Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Шведов О.	1. Судаков О.	1. Подлесный Д.
2. Слободянин В.	2. Шведов О.	2. Шведов О.
3. Слободянин В.	3. Подлесный Д.	3. Мельниковский Л.
4. Слободянин В.	4. Чудновский А.	4. Слободянин В.
	5. Шведов О.	5. Подлесный Д.

Ответственные за классы

9 класс	10 класс	11 класс
Шведов О.	Мельниковский Л.	Чивилев В.

Общая редакция — Слободянин В.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:41.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Груз в воде

Система состоит из легкого неподвижного блока, длинной нерастяжимой нити, груза цилиндрической формы и длинной трубы с поршнем, опущенной в глубокий водоем. Плотность воды ρ_0, плотность материала груза ρ_1, высота цилиндра H, площади основания цилиндра и внутреннего сечения трубы одинаковы. Вначале нить удерживают так, что поршень и груз касаются воды, при этом нить натянута (рис. 1). В некоторый момент времени нить отпускают. Определите расстояние h, на которое груз опустится в воду после установления равновесия, в следующих случаях:

1. $\rho_1 = \rho_0$, $H = 1$ м;
2. $\rho_1 = 3\rho_0$, $H = 4$ м;
3. $\rho_1 = 1{,}5\rho_0$, $H = 16$ м.

Трением в системе пренебречь, нить и поршень считать легкими.

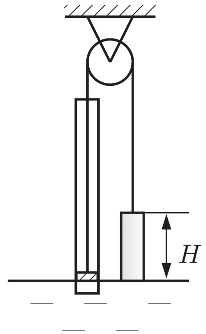


Рис. 1

Задача 2. Муха на пружине

Однородную пружину длины L разрезали на две части, одна из которых имеет длину l_1. Из получившихся кусков пружины, нерастяжимой нити и подвижного блока собрали систему (рис. 2). На верхний конец пружины длиной l_1 села муха Цокотуха. В некоторый момент времени блок начали поднимать вертикально вверх со скоростью v_0. С какой скоростью стала подниматься сидящая на конце пружины муха Цокотуха? Трения в блоке нет. Вес нити, пружины и блока можно не учитывать.

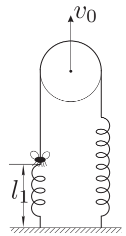


Рис. 2

Задача 3. Потерянный луч

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис. 3), на котором были изображены тонкая собирающая линза, ее фокусы и ход луча, идущего через линзу. От времени чернила выцвели, и на чертеже от луча остались видны только две точки A и B. Восстановите по этим данным ход луча.

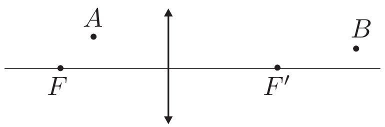


Рис. 3

Задача 4. Запутанная схема

Найдите сопротивление R_{AB} цепи между точками A и B (рис. 4). Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны $R = 5$ Ом.

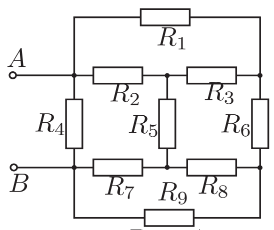


Рис. 4

10 класс

Задача 1. Проводящая сфера

Тонкостенная проводящая сфера, радиус которой равен радиусу Земли R, имеет толщину стенок $h = 1$ мм (рис. 5). Определите сопротивление r сферы между ее полюсами N и S. Удельное сопротивление материала сферы зависит от географической широты φ по закону $\rho(\varphi) = \rho_0 \cos\varphi$, где $\rho_0 = 0{,}2$ Ом·см.

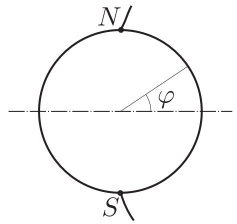


Рис. 5

Задача 2. Хоккеист на карусели

На карусели радиуса $R = 15$ м, вращающейся в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 0{,}5$ рад/с, на расстоянии $R_0 = 10$ м от центра стоит хоккеист. В некоторый момент времени он ударил клюшкой по шайбе. Шайба после его броска оставила на карусели след (рис. 6). Найдите величину начальной скорости шайбы относительно карусели и относительно Земли. Трением шайбы о карусель пренебречь.

Примечание. При малых значениях φ (когда угол φ выражен в радианах) можно считать $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$.

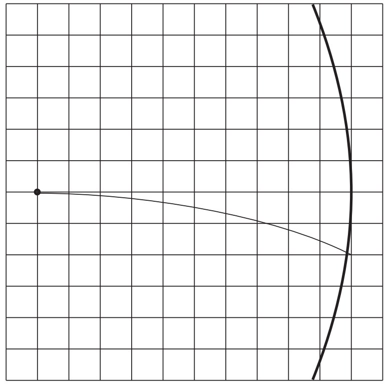


Рис. 6

Задача 3. Ломаная

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис. 7). От времени чернила выцвели, и на чертеже остался виден только луч, идущий через тонкую линзу, и две точки A и B пересечения его с передней и задней фокальными плоскостями. При помощи построения восстановите положение линзы и ее фокусы.

Рис. 7

Задача 4. Химическая реакция

Вещества X, Y и Z могут участвовать в следующей химической реакции: $3X + 2Y \to Z$. Температуры плавления и кипения этих веществ таковы, что $T_x^{\text{пл}} < T_y^{\text{пл}} < T_z^{\text{пл}} = 10°\text{C}$, $T_x^{\text{кип}} > T_y^{\text{кип}} > T_z^{\text{кип}} = 190°\text{C}$. В первом опыте вещества X и Y, взятые при температуре $T_z^{\text{пл}}$, поместили в герметичный теплоизолированный сосуд. Через некоторое время в сосуде осталось только вещество Z, причем половина его была в твердом состоянии, а половина — в жидком. Во втором опыте вещества X и Y снова поместили в герметичный теплоизолированный сосуд, но на этот раз при температуре $T_z^{\text{кип}}$. Через некоторое время в сосуде осталось только вещество Z, причем одна половина его была в жидком состоянии, а другая — в газообразном. Найдите молярную теплоемкость вещества Z в жидком состоянии. Молярные теплоемкости веществ X и Y в жидком состоянии $C_x = 55$ кДж/(кмоль·К), $C_y = 80$ кДж/(кмоль·К); для вещества Z молярная теплота плавления $\lambda_z = 5$ МДж/кмоль, теплота парообразования $r_z = 40$ МДж/кмоль.

Примечание. Считать, что теплоемкости веществ не зависят от температуры. Давление в сосуде в обоих опытах поддерживалось постоянным и одинаковым.

Задача 5. Емкости

В схеме (рис. 8) заряд конденсатора C известной емкости равен Q_0. Ключ замкнули. Зависимость от времени заряда Q_1 на конденсаторе C_1 неизвестной емкости изображена на графиках (рис. 9, 10). Найдите емкость конденсатора C_1 и сопротивления резисторов R_1 и R_2. Время τ известно.

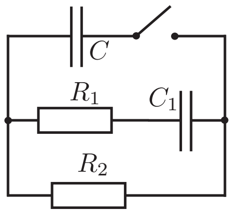


Рис. 8

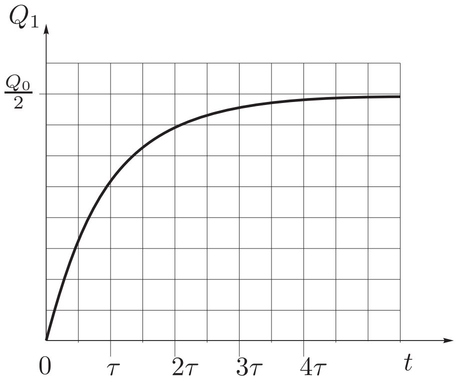


Рис. 9

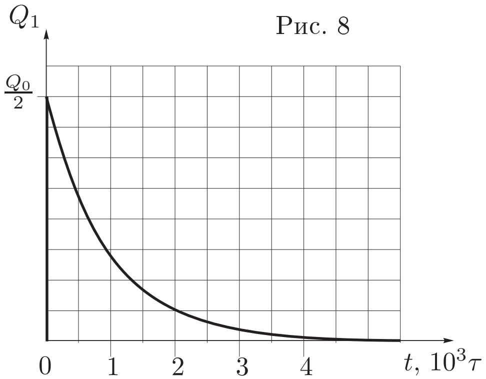


Рис. 10

11 класс

Задача 1. Катушка

Катушка массой M с намотанной на нее легкой нитью стоит на горизонтальном столе и упирается в два гвоздя, вбитых вертикально в стол. Один конец нити закреплен на катушке, а к свободному концу нити, свешивавшемуся в прорезь стола, привязан груз (рис. 11). При каких значениях массы m груза система будет в равновесии? Радиус барабанов катушки R, радиус намотки нити r. Коэффициент трения катушки о гвозди μ_1, коэффициент трения катушки о поверхность стола μ_2.

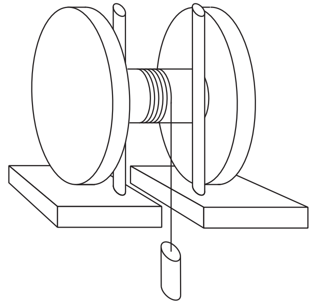


Рис. 11

Задача 2. Сопротивление воздуха

Тело, брошенное с поверхности Земли со скоростью v_0 вертикально вверх, к моменту падения потеряло за счет сопротивления воздуха $\varepsilon = 1\%$ своей кинетической энергии. Сколько процентов кинетической энергии потеряет к моменту падения это же тело, если бросить его вертикально вверх со скоростью $v_0/2$? Сила сопротивления пропорциональна k-й степени скорости тела, где $k > 0$.

Задача 3. Игрушечный поезд

Игрушечный электропоезд массой $m = 500$ г с двигателем постоянного тока питается через рельсы от источника тока с напряжением $U_0 = 5$ В и движется горизонтально. Поезд имел скорость $v_0 = 20$ см/с и разгонялся, когда источник отключили, а рельсы замкнули резистором с сопротивлением $R = 50$ Ом. Найдите тормозной путь L поезда, считая, что его колеса не проскальзывают. Сопротивлением обмоток электродвигателя и рельс, трением в подшипниках и другими потерями в двигателе пренебречь. Сопротивление воздуха не учитывать. Масса ротора двигателя и колес много меньше массы поезда.

Задача 4. Три точки

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис. 12). От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только 3 точки: оптический центр тонкой линзы O, точка A передней фокальной плоскости и точка B задней фокальной плоскости. Из пояснений к чертежу следовало, что точки A и B лежат на луче, идущем через линзу. Восстановите построением по этим данным ход луча, положение линзы и ее фокусы.

Рис. 12

Задача 5. Циклический процесс

В откачанный цилиндрический сосуд с поршнем впрыснули некоторое количество воды. Содержимое сосуда довели до равновесного состояния с температурой $t_1 = 76°\text{C}$, при этом объем сосуда составил $V_1 = 50$ л. Далее с содержимым сосуда совершают квазистатический круговой цикл, состоящий из:
1. изотермического расширения до объема $V_2 = 3V_1$, в результате которого давление в сосуде уменьшается в два раза;
2. изобарического сжатия до объема $V_3 = \frac{3}{2}V_1$;
3. изотермического сжатия до объема $V_4 = V_1$;
4. изохорического нагревания до начальной температуры.

Принимая во внимание зависимость давления насыщенных паров воды от температуры (рис. 13), найдите: максимальную и минимальную температуры в цикле; массу воды, впрыснутой в сосуд; работу, совершенную системой в цикле.

Примечание. При изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2 идеальный газ совершает работу: $A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$, где $\frac{m}{\mu}$ — количество молей газа, T — температура газа, R — универсальная газовая постоянная.

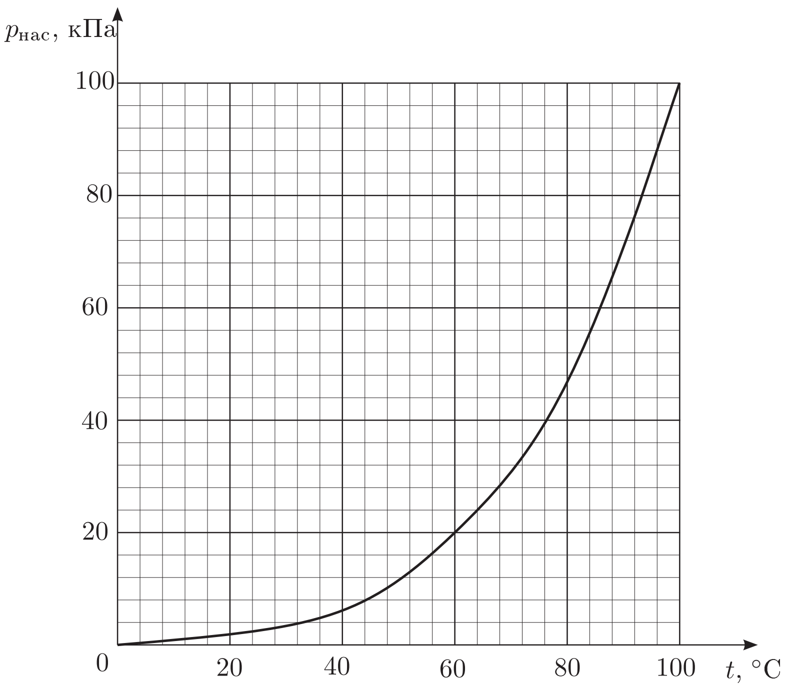


Рис. 13

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Груз в воде

Пусть площадь основания цилиндрического груза и площадь внутреннего сечения трубы равны S. После того как нить отпустят, груз начнет опускаться, а вода — подниматься по трубе за поршнем. Возможны два случая: груз опустится в воду либо полностью, либо частично. В этих случаях равнодействующая R сил тяжести и Архимеда будет равна

$$R = \rho_1 gSH - \rho_0 gSh \qquad \text{при} \qquad h \leqslant H;$$

$$R = (\rho_1 - \rho_0)gSH \qquad \text{при} \qquad h > H.$$

Сила R должна совпадать с весом жидкости в трубе, поднявшейся за поршнем: $R = \rho_0 gSH$.

В первом случае (при $\rho_1 < 2\rho_0$) $h = H\rho_1/(2\rho_0)$.

Во втором случае (при $\rho_1 > 2\rho_0$) $h = H(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0$.

Учитывая первое условие задачи, $h = H\rho_1/(2\rho_0) = 0{,}5$ м.

Аналогично, при втором условии $h = H(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 = 8$ м.

Применение полученных формул к условию 3 давало бы $h = 12$ м. Однако здесь мы стакиваемся с эффектом конечности атмосферного давления: при поднятии поршня на высоту более $H_0 = 10$ м вода выше уровня H_0 подниматься не будет.

Если цилиндр опускается в воду на глубину h не полностью, то сила атмосферного давления $p_{\text{атм}}S = \rho_0 gH_0 S$, действующая на поршень, должна уравновешивать силу натяжения нити:

$$\rho_0 gH_0 S = \rho_1 gSH - \rho_0 gSh.$$

Отсюда глубина погружения цилиндра при условии 3

$$h = \frac{\rho_1 H}{\rho_0} - H_0 = 14 \text{ м}.$$

Задача 2. Муха на пружине

Любой кусок пружины можно разбить на некоторое количество маленьких участков длиной Δx, каждый из которых удлиняется на одну и ту же величину, так как пружина однородна. Общее удлинение пропорционально числу участков, которое в свою очередь пропорционально первоначальной длине куска пружины.

Поскольку нить нерастяжима и в блоке нет трения, то оба куска пружины растягиваются одинаковой силой. Пусть Δx_1 и Δx_2 — удлинения кусков пружины, тогда:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{L - l_1}.$$

Пусть Δx_0 — смещение блока, тогда из кинематических соображений $2\Delta x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Исключая Δx_2 из этих двух условий, находим

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} = 2\frac{l_1}{L}.$$

Движение равномерно, поэтому $\Delta x_1/\Delta x_0 = v_1/v_0$, откуда $v_1 = 2v_0 l_1/L$.

Задача 3. Потерянный луч

Пусть A — точечный источник света. Найдем его изображение A'. Оно будет мнимым (рис. 14).

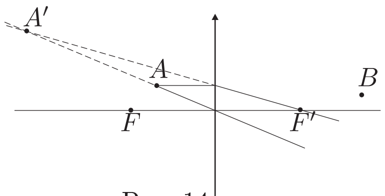


Рис. 14

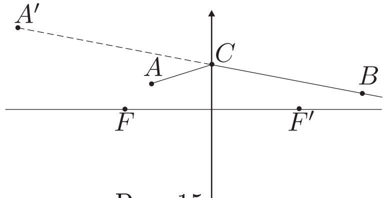


Рис. 15

Наблюдателю, находящемуся справа от линзы, будет казаться, что все лучи распространяются от точечного источника A'. Пусть прямая $A'B$ пересекает плоскость линзы в точке C (рис. 15), тогда AC и CB — части искомого луча.

Задача 4. Запутанная схема

Перерисуем исходную схему в несколько ином виде (рис. 16).

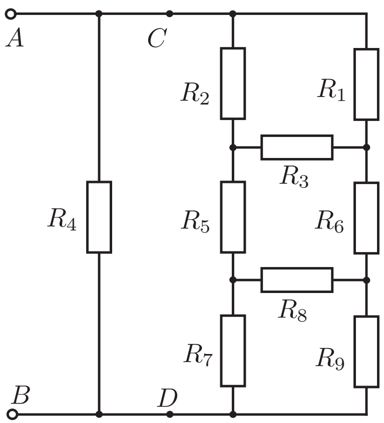


Рис. 16

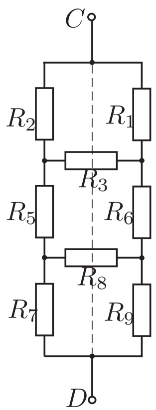


Рис. 17

Можно представить R_{AB} как два параллельно соединенных резистора R_4 и R_{CD}. В силу симметрии схемы относительно оси CD (рис. 17), ток через резисторы R_3 и R_8 течь не может, так как направления движения носителей слева направо и справа налево эквивалентны. Следовательно, эти резисторы можно исключить из схемы. Тогда $R_{CD} = 3R/2 = 7{,}5$ Ом,

$$R_{AB} = \frac{R_4 R_{CD}}{R_4 + R_{CD}} = 3 \text{ Ом}.$$

10 класс

Задача 1. Проводящая сфера

Присоединим источник тока к полюсам сферы. Поскольку ρ не зависит от долготы, параллели будут эквипотенциальны. Поэтому сферу можно рассматривать как набор последовательно соединенных колец, получаемых при разрезании сферы по параллелям.

Найдем сопротивление кольца между двумя близкими параллелями:

$$\Delta r = \frac{\rho R \Delta\varphi}{h \cdot 2\pi R \cos\varphi} = \frac{\rho_0 \Delta\varphi}{2\pi h}.$$

Здесь $\Delta\varphi$ — угловое расстояние между двумя близкими параллелями, выраженное в радианах, причем $\Delta\varphi \ll 1$. Полное сопротивление между полюсами складывается из сопротивлений последовательно соединенных колец:

$$r = N \cdot \Delta r = \frac{\pi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\rho_0 \Delta\varphi}{2\pi h} = \frac{\rho_0}{2h} = 1 \text{ Ом}.$$

Задача 2. Хоккеист на карусели

Рассмотрим движение шайбы относительно Земли. Выберем начало координат в центре карусели, ось Ox — по направлению к шайбе в момент удара, ось Oy — в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси Ox. В данной системе отсчета шайба движется прямолинейно и равномерно. Обозначим проекции скорости шайбы на координатные оси через v_x и v_y.

В первом приближении можно считать, что участок карусели вблизи хоккеиста в начальный момент времени движется вдоль оси Oy со скоростью ωR_0. Для того, чтобы шайба оставила на карусели след, направленный вдоль оси Ox (как показано на рисунке), необходимо, чтобы проекция скорости шайбы на ось Oy также равнялась ωR_0, то есть $v_y = 5$ м/с.

Более удаленные от центра участки карусели движутся с большей скоростью, поэтому след шайбы не будет точно прямолинейным. Действительно, точка карусели, находившаяся в начальный момент времени на оси Ox на расстоянии $R_0 + a$ от центра, сместится в направлении оси Oy за время t на расстояние $\omega(R_0 + a)t$, шайба же сместится лишь на расстояние $\omega R_0 t$. Это проявляется в смещении следа шайбы вниз на расстояние $\omega a t$. Подставляя вместо t время a/v_x, необходимое шайбе для смещения на расстояние a в горизонтальном направлении, получаем, что вертикальное смещение следа шайбы равно $b = \omega a^2/v_x$.

Как видно из рисунка, данного в условии, при $a = 2{,}5$ м $b = 0{,}25$ м, а при $a = 5$ м $b = 1$ м. Отсюда получаем: $\omega/v_x = 0{,}04$ м$^{-1}$.

Окончательно, скорость шайбы и ее проекции относительно Земли:

$$v_x = 12{,}5 \text{ м/с}, \qquad v_y = 5 \text{ м/с}, \qquad v \approx 13{,}5 \text{ м/с}.$$

Начальная скорость шайбы относительно хоккеиста была направлена от центра карусели и равна 12,5 м/с.

Задача 3. Ломаная

Рассмотри отдельно случаи собирающей и рассеивающей линз.

1. Собирающая линза. Все лучи, вышедшие из точки в фокальной плоскости, после линзы идут параллельно. Поэтому через точки A и B проведем прямые, параллельные преломленному и падающему лучам соответственно (рис. 18). Луч AK не преломился, следовательно он прошел через оптический центр линзы. Аналогично, луч BE прошел через тот же центр. Следовательно, точка O их пересечения является оптическим центром линзы. Через точку P преломления луча и точку O проведем прямую, которая будет пересечением плоскости линзы и плоскости рисунка. Прямая MN, перпендикулярная PO и проходящая через точку O, является главной оптической осью линзы. Фокусы линзы — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на MN.

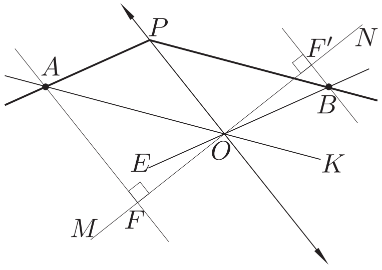


Рис. 18

2. Рассеивающая линза. Плоскость линзы расположена посередине между фокальными плоскостями и параллельна им. Поэтому точка C (середина отрезка AB) находится в плоскости линзы (рис. 19). Через точку P преломления луча и точку C проведем прямую, которая будет пересечением плоскости линзы и плоскости рисунка. Через точки A и B проведем прямые, параллельные PC. Они являются пересечениями фокальных плоскостей с плоскостью рисунка. Продолжим луч PB до пересечения с фокальной плоскостью в точке D. Изображение точки A в линзе находится на отрезке DP. Можно показать, что оно будет на расстоянии $f/2$ от линзы, где f — ее фокусное расстояние. Следовательно, мнимым изображением точки A является точка A' — середина DP. Луч AK не преломляется, значит, он проходит через оптический центр O линзы, которым является точка пересечения прямой AL с плоскостью линзы. Прямая MN, перпендикулярная PO и проходящая через точку O, является главной оптической осью линзы. Фокусы линзы — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на MN.

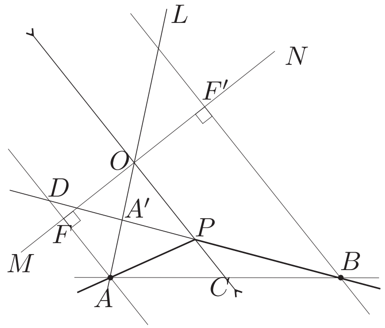


Рис. 19

Задача 4. Химическая реакция

Пусть вещества X и Y в количестве 3ν и 2ν соответственно находятся при температуре $T_z^{\text{пл}}$. И пусть мы хотим получить из них вещество Z при температуре $T_z^{\text{кип}}$, причем так, чтобы половина его была в жидком состоянии, а половина — в газообразном. В соотвествии с данными в условии результатами двух опытов это можно сделать, например, следующими двумя способами. Можно сначала провести химическую реакцию, а затем, нагревая полученное вещество Z, довести его до конечного состояния. А можно первоначально нагреть вещества X и Y до температуры $T_z^{\text{кип}}$, а потом провести химическую

реакцию. Оба процесса имеют одинаковые начальные и конечные состояния и идут при постоянном давлении, поэтому подводимое тепло в них одинаково:

$$\frac{\nu}{2}\lambda_z + \nu C_z(T_z^{\text{кип}} - T_z^{\text{пл}}) + \frac{\nu}{2}r_z = (3\nu C_x + 2\nu C_y)(T_z^{\text{кип}} - T_z^{\text{пл}}),$$

откуда

$$C_z = 3C_x + 2C_y - \frac{\lambda_z + r_z}{2(T_z^{\text{кип}} - T_z^{\text{пл}})} = 200\ \text{кДж}/(\text{кмоль}\cdot\text{К}).$$

Примечание. Температура вещества Z после реакций, указанных в условии, окажется $T_z^{\text{пл}}$ и $T_z^{\text{кип}}$, так как в сосуде будут находиться в равновесии два агрегатных состояния вещества Z. Заметим, что из неравенств для температур плавления и кипения следует, что вещества X и Y не претерпевают фазовых переходов, а находятся все время в жидком состоянии. При парообразовании объем увеличивается, а значит, совершается работа против сил врешнего давления, но эта работа учтена в значении r_z.

Задача 5. Емкости

Как видно из графиков, через время порядка 5τ после замыкания ключа заряд распределяется примерно поровну между конденсаторами, и это состояние сохраняется в течение времени порядка 100τ. Следовательно,

$$C_1 = C, \qquad R_2 \gg R_1.$$

То есть, рассматривая процессы при $t \sim \tau$, можно пренебречь сопротивлением R_2. Из первого графика видно, что при $t < \tau$ заряд на конденсаторе C_1 линейно возрастает со временем:

$$I_1 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{Q_0}{2\tau}.$$

С другой стороны:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{Q_0}{CR_1},$$

откуда

$$R_1 = \frac{2\tau}{C}.$$

В дальнейшем конденсаторы C и C_1 разряжаются через резистор R_2. Из второго графика видно, что при $t \sim 100\tau$ заряд на конденсаторе C_1 линейно уменьшается со временем:

$$I_2 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = -\frac{Q_0}{2000\tau}.$$

С другой стороны ток через резистор R_2 вдвое больше I_2, так как разряжаются оба конденсатора:

$$2I_2 = \frac{U}{R_2} = -\frac{Q_0}{2CR_2},$$

откуда

$$R_2 = \frac{500\tau}{C}.$$

11 класс

Задача 1. Катушка

Допустим, что существует масса m_0 такая, что для массы груза $m > m_0$ катушка начнет проскальзывать. При массе груза $m = m_0$ (рис. 20):

$$F_1 = \mu_1 N_1, \qquad F_2 = \mu_2 N_2. \qquad (1), (2)$$

Запишем для катушки второй закон Ньютона в проекции на координатные оси:

$$Ox: \qquad F_2 - N_1 = 0, \qquad (3)$$

$$Oy: \qquad N_2 + F_1 - Mg - T = 0. \qquad (4)$$

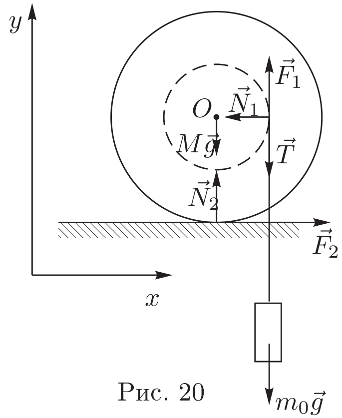


Рис. 20

Натяжение нити

$$T = m_0 g. \qquad (5)$$

Момент приложенных к катушке сил относительно полюса O, лежащего на оси катушки, равен нулю, так как катушка находится в равновесии:

$$Tr - F_1 r - F_2 R = 0. \qquad (6)$$

Решая систему уравнений (1) – (6), получим:

$$m_0 = M\frac{\mu_2(1 + \frac{r}{R}\mu_1)}{\frac{r}{R} - \mu_2}.$$

Таким образом, если $\mu_2 < \frac{r}{R}$, то система будет в равновесии при

$$m < m_0 = M\frac{\mu_2(1 + \frac{r}{R}\mu_1)}{\frac{r}{R} - \mu_2},$$

а при $m > m_0$ катушка будет вращаться.

Если увеличивать μ_2, приближая его к r/R, то m_0 будет неограниченно возрастать; при $\mu_2 = r/R$ система находится в равновесии при любых m. При $\mu_2 \geqslant r/R$ равновесие не нарушится ни при каком m.

Задача 2. Сопротивление воздуха

Как вытекает из условия задачи, сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала по сравнению с силой тяжести. Поэтому при вычислении работы силы сопротивления в первом приближении можно считать, что скорость тела на высоте z равна $\sqrt{v_0^2 - 2gz}$. Следовательно, сила сопротивления зависит от высоты z следующим образом:

$$F_{\text{сопр}} = \alpha(v_0^2 - 2gz)^{k/2},$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Потеря кинетической энергии равна удвоенной работе сил сопротивления воздуха на участке от высоты 0 до высоты $v_0^2/2g$: $\Delta E = -2A$.

Разобьем участок $0 \leqslant z \leqslant \frac{v_0^2}{2g}$ на большое число N маленьких участков длиной $\Delta z = \frac{v_0^2}{2gN}$ точками $z_j = \frac{v_0^2}{2g}\frac{j}{N}$. Тогда

$$A = \alpha\sum_{j=1}^{N}(v_0^2 - 2gz_j)^{k/2}\Delta z = \alpha\frac{v_0^{k+2}}{2g}\sum_{j=1}^{N}(1 - j/N)^{k/2}\frac{j}{N}.$$

Следовательно, $A \sim v_0^{k+2}$.

Таким образом, при уменьшении начальной скорости в 2 раза потери энергии уменьшатся в 2^{k+2} раз, а начальная энергия — в 4 раза. Следовательно, при начальной скорости $v_0/2$ тело потеряет энергию $\Delta E = 2^{-k}\varepsilon E_0$, где E_0 — начальная энергия.

Задача 3. Игрушечный поезд

В двигателе постоянного тока установлен постоянный магнит, в поле которого вращается ротор. ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения магнитоного потока через рамку, поэтому напряжение на клеммах двигателя пропорционально скорости движения поезда: $U = U_0 v/v_0$. Мощность, которую вырабатывает двигатель работающий в режиме генератора, целиком выделяется на резисторе (трением пренебрегаем) и определяется законом Джоуля-Ленца:

$$P = U\frac{U}{R} = \frac{U_0^2}{R v_0^2}v^2. \qquad (1)$$

Легко заметить, что формула (1) означает, что тормозящая сила пропорциональная скорости:

$$F = -\frac{U_0^2}{R v_0^2}v.$$

Таким образом, полный импульс силы за время торможения и тормозной путь связаны следующим соотношением:

$$mv_0 = \frac{U_0^2}{Rv_0^2}L, \qquad L = \frac{Rmv_0^3}{U_0^2} = 8 \text{ мм}.$$

Задача 4. Три точки

Плоскость линзы расположена посередине между фокальными плоскостями и параллельна им. Поэтому точка C (середина отрезка AB) находится в плоскости линзы (рис. 21). Проведем прямую OC, которая будет пересечением плоскости линзы с плоскостью рисунка. Прямая MN, перпендикулярная OC и проходящая через точку O, является главной оптической осью линзы. Фокусы линзы — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на MN. Заметим, что задача не имеет однозначного решения, так как линза может быть как собирающей, так и рассеивающей.

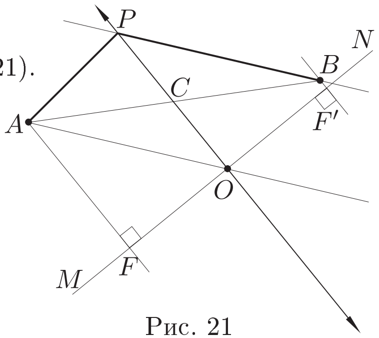


Рис. 21

1. Собирающая линза. Проведем непреломляющийся луч AO и прямую BP, параллельную AO. Луч AB преломляется в точке P, так как A — точка в фокальной плоскости, то есть все лучи из A после линзы идут параллельно. Таким образом, ход искомого луча APB восстановлен.

2. Рассеивающая линза. Из формулы тонкой линзы следует, что мнимое изображение A' точки A будет на расстоянии $f/2$ от линзы, где f — фокусное расстояние, то есть оно будет в середине отрезка AO. Продолжение любого преломленного луча, вышедшего из A, будет проходить через точку A'. Проведем прямую BA'. В точке P ее пересечения с плоскостью линзы луч AB преломляется. Таким образом, ход искомого луча APB восстановлен (рис. 22).

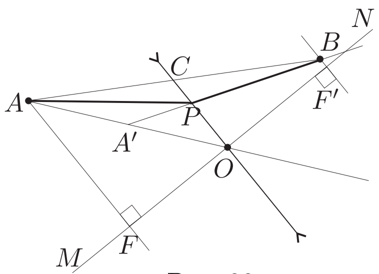


Рис. 22

Задача 5. Циклический процесс

Рассмотрим сначала процесс качественно. В начальный момент при температуре t_1 в сосуде находится смесь воды и ее насыщенных паров. В процессе изотермического расширения вся вода испаряется, и пар становится ненасыщенным. В ходе изобарического сжатия температура пара начинает уменьшаться до некоторого значения T_{min}. При достижении этой температуры пар становится насыщенным, и дальнейшее изобарическое сжатие происходит при этой минимальной температуре. При последующем изотермическом сжатии насыщенного пара его давление изменяться не будет. Наконец, после изохорического нагревания содержимого сосуда система вода-пар возвращается в исходное состояние. Таким образом, рассматриваемый круговой процесс на pV-диаграмме имеет вид (рис. 23).

Из данного в условии графика $p_{\text{нас}}(t)$ находим начальное давление $p_1 = 40$ кПа. Из того же графика находим температуру, соответствующую давлению насыщеных паров $p_2 = p_1/2$. Это будет минимальная температура во всем процессе: $T_{min} = 333$ К$=$ $= 60$°C. Максимальной температурой является начальная температура $T_{max} = T_1 =$ $= 349$ К$= 76$°C.

Массу впрыснутой воды найдем из уравнения состояния, например, для точки 2, в которой точно нет жидкой фазы:

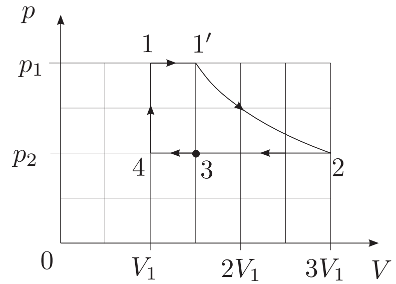


Рис. 23

$$p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2, \qquad m = \frac{P_2V_2\mu}{RT_2} = \frac{3P_1V_1\mu}{2RT_1} \approx 19 \text{ г.}$$

Работа пара в цикле равна сумме работ на каждом участке:

$$A = A_{11'} + A_{1'2} + A_{234} + A_{41}.$$

В точке $1'$ вода полностью испаряется, а на участке $1' - 2$ пар ведет себя как идеальный газ, при этом объем в точке $1'$ равен $3V_1/2$, что следует из уравнений состояния, записанных для точек $1'$ и 2. Имеем:

$$A_{11'} = P_1(\frac{3}{2}V_1 - V_1) = \frac{1}{2}P_1V_1, \qquad A_{1'2} = \frac{m}{\mu}RT_1 \ln\frac{3V_1}{\frac{3}{2}V_1} = \frac{3}{2}P_1V_1\ln 2,$$

$$A_{234} = -\frac{P_1}{2}(3V_1 - V_1) = -P_1V_1, \qquad A_{41} = 0.$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}P_1V_1(3\ln 2 - 1) \approx 1$ кДж.