7 класс

1. Среднее сближение.
Две машины едут по прямому участку дороги навстречу друг другу. Графики зависимости скоростей машин от времени приведены на рис. 1 и рис. 2.

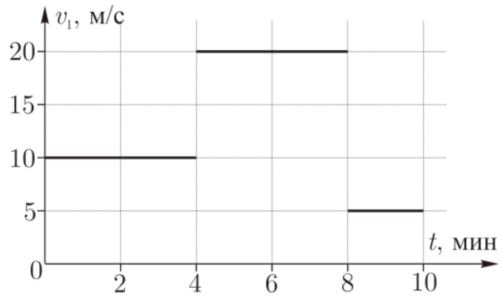


Рис. 1

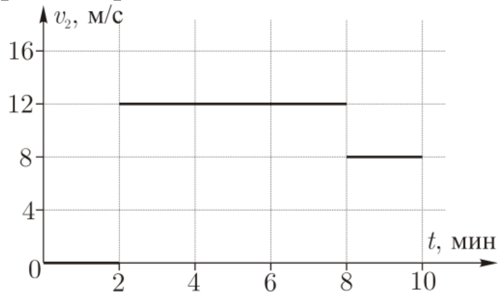


Рис. 2

Чему равна средняя скорость сближения машин за первые 10 минут? Считайте, что вначале машины были на большом расстоянии и не успели встретиться.

Указание: **скорость сближения –** это отношение изменения расстояния между телами ко времени, за которое расстояние изменялось.

Возможное решение. Замятнин М.
Можно искать скорости сближения машин на отдельных интервалах движения и их усреднять. Но проще найти общее изменение расстояния между машинами и разделить его на время движения. Пройденное расстояние равно площади под графиком скорости от времени. Для первой машины S = (40+80+10)(м · мин)60 (с/мин) = 7800 м. Для второй (72+16)(м · мин)60 (с/мин) = 5280 м. Таким образом, средняя скорость сближения $\frac{13080}{600}\frac{\text{м}}{\text{с}} = 21{,}8$ м/с.

Возможная система оценивания

1. Определение расстояния пройденного первой машиной	4 балла
2. Определение расстояния пройденного второй машиной	4 балла
3. Определение суммарного сближения	1 балл
4. Расчет скорости сближения	1 балл

2. Разные пятна.

В двух крупных лабораториях в Кембридже (рис. 3) и в Дубне (рис. 4) проводили похожие эксперименты по изучению пятен. Сравните, в какой лаборатории получилось пятно большей площади? 1 дюйм = 25,4 мм.

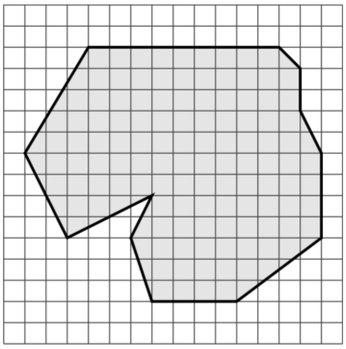


Рис. 3
Кембридж
(1 клетка = 0,5 дюйма)

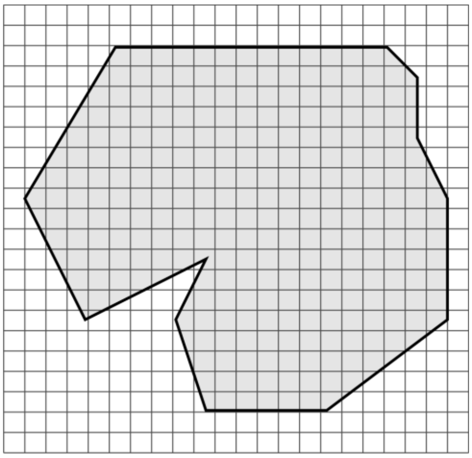


Рис. 4
Дубна
(1 клетка = 10 мм)

Возможное решение. Иванов М.

Можно по-честному посчитать клетки и умножить полученное число на площадь одной английской клетки (161,3 мм^2) и российской (100 мм^2), соответственно.

Но, нетрудно заметить, что пятна подобны, поэтому достаточно подсчитать отношение клеток в одном ряду (примерно 14/20), возвести его в квадрат (умножить на себя), получится 0,49. Это будет отношение числа клеток. Далее это число надо умножить на отношение площадей одной клетки 1,61. Английское пятно имеет площадь всего лишь 0,8 от отечественного.

Возможная система оценивания

1. Определение каким-либо способом отношения числа клеток	4 балла
2. Нахождение площадей одной клетки в одной размерности	3 балла
3. Сравнение площадей пятен	3 балла

3. Заполнение бака.

В кубический бак, доверху заполненный жидкостью, имеющей плотность ρ, опустили четыре меньших кубика плотностью 10ρ и с стороной в три раз меньшей, чем у бака. Излишки жидкости вылились (рис. 5). Какой стала средняя плотность бака с кубиками и жидкостью? Массой стенок бака пренебречь.

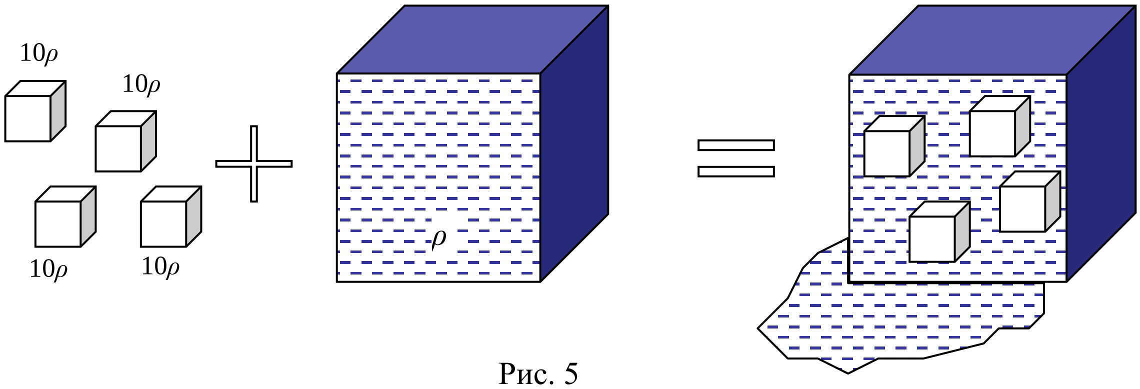


Рис. 5

Возможное решение. Иванов М.

Средняя плотность – это отношение всей массы ко всему объему. Пусть начальная масса куба с жидкостью $m = a \cdot a \cdot a \cdot \rho$, тогда масса маленького кубика заполненного жидкостью $m/27$, а масса одного кубика из более плотного вещества $m/2{,}7$. Тогда средняя плотность равна

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m - 4 \cdot \frac{m}{27} + 4 \cdot \frac{m}{2{,}7}}{a^3} = \rho\left(1 - \frac{4}{27} + \frac{4}{2{,}7}\right) = \frac{7}{3}\rho.$$

Возможная система оценивания

1. Определение массы маленького кубика 4 балла
2. Определение массы вытесненной жидкости 3 балла
3. Расчет средней плотности 3 балла

4. Плотность камня.

Мензурка была частично заполнена водой (рис. 6) В неё полностью погрузили камушек на ниточке, не касаясь им дна. Часть воды при этом вылилась. Камушек вынули. В мензурке остался новый объем воды (рис. 7). Чему равна плотность камня, если его масса 56 г?

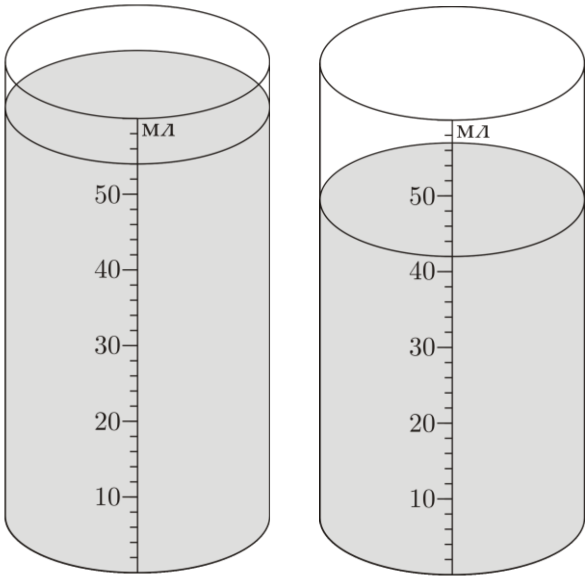


Рис. 6 Рис. 7

Возможное решение. Замятнин М.

Объем камня равен объему незаполненной части мензурки после опускания. Это V=18 мл (см^3). Плотность камушка $\rho=m/V$=3,1г/см^3. Первый рисунок не нужен.

Возможное оценивание

1. Идея определения объема камня	3 балла
2. Нахождение объема	4 балла
3. Расчет плотности	3 балла

8 класс

1. Речная переправа.

Мальчик смог переплыть реку за минимальное время. Ширина реки 100 м. Скорость мальчика относительно воды постоянна и равна 1 м/с. Зависимость скорости течения v от расстояния до берега x приведена на графике (рис. 1). На какое расстояние L вниз по реке его снесло течением? Считайте, что в любом месте реки скорость течения направлена вдоль берегов.

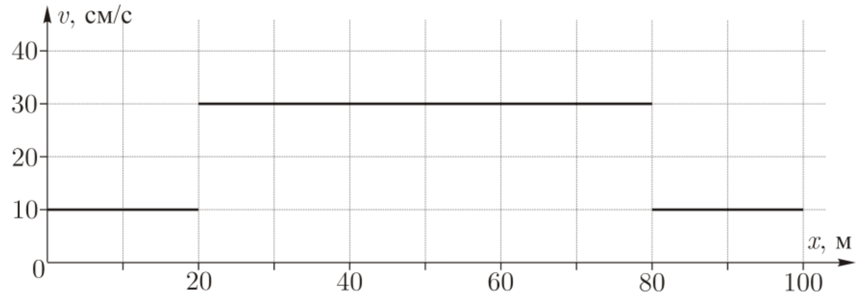


Рис. 1

Возможное решение. **Иванов М.**

Так как время переправы – минимальное, мальчик направлял свою скорость прямо на противоположный берег и проплывал равные участки ширины реки за равные интервалы времени. Следовательно, график зависимости скорости реки можно перерисовать в осях $v(t)$, где t – время движения мальчика (рис. 2).

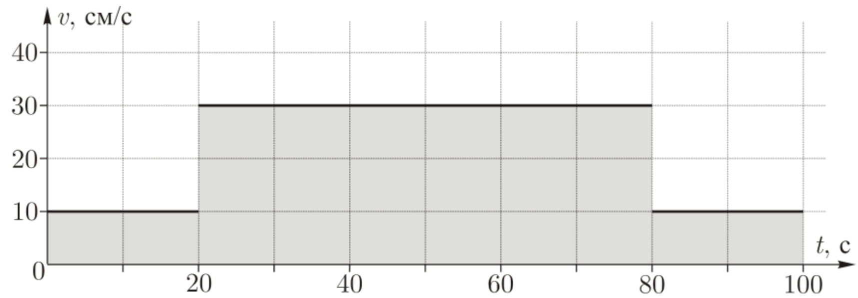


Рис. 2

Смещение вниз по реке создавалось только скоростью течения. Поэтому общий снос равен площади под графиком $v(t)$.

$$L = \left(2 \cdot 10\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right) \cdot 20\text{с} + 30\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right) \cdot 60\text{с}\right) = 2200 \text{ см} = 22 \text{ м}.$$

Возможная система оценивания

1. Связь минимальности времени и стратегии движения	2 балла
2. Поэтапный расчет сноса или подсчет площади под графиком в осях $v(t)$	6 баллов
3. Численный результат	2 балла

2. И-образная трубка.

Два открытых сверху цилиндрических сосуда соединены наискось тонкой трубкой с краном как показано на рис. 3. В сосудах находится жидкость плотностью ρ, налитая до высот $4h$ и $2h$ соответственно. В правый сосуд добавили столб жидкости плотностью $0{,}8\rho$ высотой $3h$. На сколько сместится уровень жидкости с плотностью ρ в левом сосуде после того как кран откроют? Жидкости не смешиваются, объемом соединительной трубки можно пренебречь. h = 8 см.

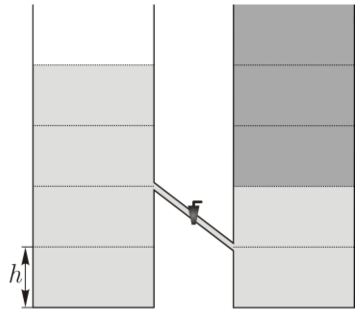


Рис. 3

Возможное решение. Замятнин М.

Предположим, что граница раздела жидкостей не опустится до уровня трубки в правом сосуде (рис. 4). Тогда при снижении в нем уровня на x, настолько же повысится уровень в правом сосуде (так как жидкость несжимаема). Можно записать условие равенства давлений в одинаковой жидкости на одинаковой глубине. Например, на уровне AB:

$$\rho g(3h + x) + p_0 = 0{,}8\rho g \cdot 3h + \rho g(h - x) + p_0,$$

упрощая, получим:

$$3h + x = 2{,}4h + h - x,$$

откуда, $x=0{,}2h$. Так как $x<h$, наше предположение верно. x=1,6 см.

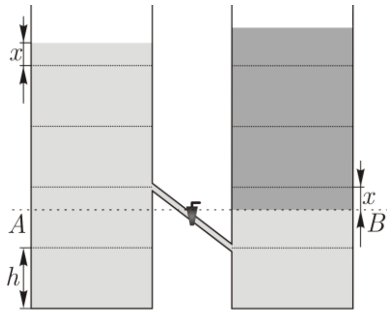


Рис. 4

Возможная система оценивания

1. Учет несжимаемости жидкости	2 балла
2. Условие равенства давлений в точках А и Б или аналогичных	4 балла
3. Решение уравнения	2 балла
4. Проверка положения границы раздела по отношению к трубке	1 балл
5. Численный ответ	1 балл

3. Сложный рычаг.

На легком жестком двухъярусном рычаге сложной конструкции уравновешены 4 груза (рис. 5). Найдите массу груза m_x, если массы трех остальных грузов известны? Длины частей рычага заданы на рисунке. M = 6 кг.

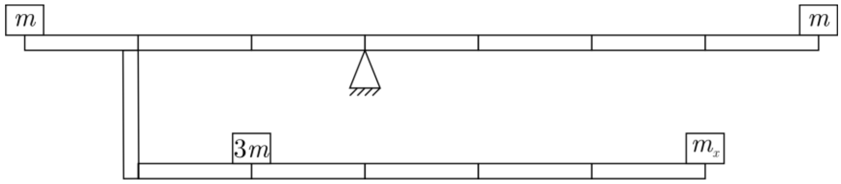


Рис. 5

Возможное решение. Михайлов З.

Несмотря на сложную конструкцию нижней «полки» рычага, для системы (рычаг + грузы) можно воспользоваться правилом моментов. Будем вычислять моменты сил относительно точки подвеса.

$$mg \cdot 3L + 3mgL = m \cdot 4L + mxg \cdot 3L, \qquad (1)$$

Откуда $$m_x = 2m/3 = 4 \text{ кг}.$$

Возможная система оценивания

1. Расстановка внешних сил, действующих на систему	2 балла
2. Запись правила моментов (1)	5 баллов
3. Решение уравнения (1)	2 балла
4. Численный ответ	1 балл

4. Теплообмен.

В лаборатории в четырех стаканах находилась разное количество одинаковой жидкости при разных температурах (рис. 6). После проведения эксперимента связанного с переливанием и смешиванием, в трех стаканах оказалось другое количество жидкости при новых температурах (рис. 7). Сколько и при какой температуре осталось жидкости в четвертом стакане? Теплоемкостью стаканов, потерями жидкости и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

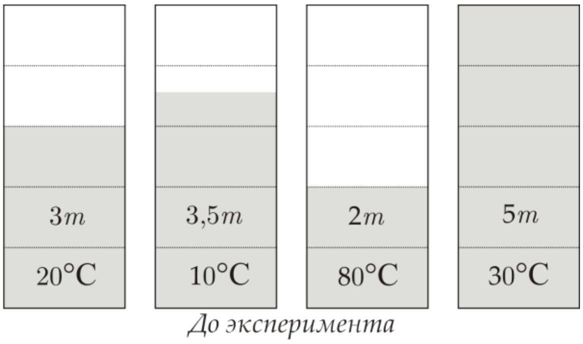


Рис. 6

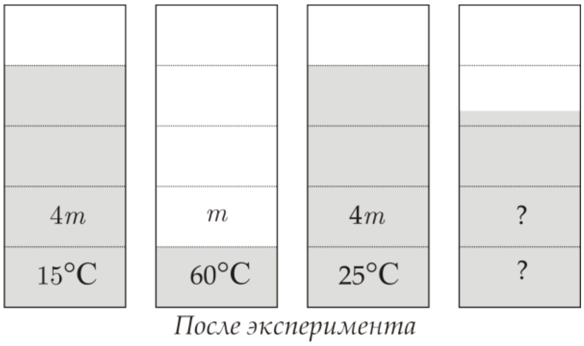


Рис. 7

Возможное решение. **Замятнин М.**

Масса жидкости должна оставаться неизменной:

$$3m + 3{,}5m + 2m + 5m = 4m + m + 4m + m_x.$$

Откуда $m_x = 4{,}5m$.

Вариант 1.

Для нахождения температуры содержимого четвертого стакана удобно рассмотреть эксперимент эквивалентный данному и состоящий из трех этапов:

1) Все жидкости охлаждают до некоторой одинаковой температуры, при этом запасая выделившуюся теплоту Q в тепловом резервуаре;

2) Жидкости при этой температуре переливают;

3) Теплоту Q возвращают сосудам, причём каждый из них нагревается до конечной температуры.

Отсюда понятно, что сумма величин $c_i m_i t_i$ остаётся постоянной в этом эксперименте.

$$3mc \cdot 20°C + 3{,}5mc \cdot 10°C + 2mc \cdot 80°C + 5mc \cdot 30°C = Q =$$
$$= 4mc \cdot 15°C + mc \cdot 60°C + 4mc \cdot 25°C + m_x c t_x.$$

С учетом $m_x = 4{,}5m$, получим $t_x = 41{,}1$℃.

Вариант 2.

Для нахождения температуры содержимого четвертого стакана воспользуемся методом «виртуального банка тепла». Предположим, что изначальное содержимое стаканов остыло до некоторой нулевой температуры. При этом выделилось тепло, которое мы запасем в некотором «банке». Затем это тепло пустим на нагревание содержимого трех стаканов в конце. Остатки тепла пойдут на нагрев содержимого четвертого стакана. По сути этот метод - отражение закона сохранения энергии для тепловых процессов. Уравнение теплового баланса примет вид:

$$3mc \cdot 20°C + 3{,}5mc \cdot 10°C + 2mc \cdot 80°C + 5mc \cdot 30°C = Q =$$
$$= 4mc \cdot 15°C + mc \cdot 60°C + 4mc \cdot 25°C + m_x c t_x.$$

С учетом $m_x = 4{,}5m$, получим $t_x = 41{,}1$℃.

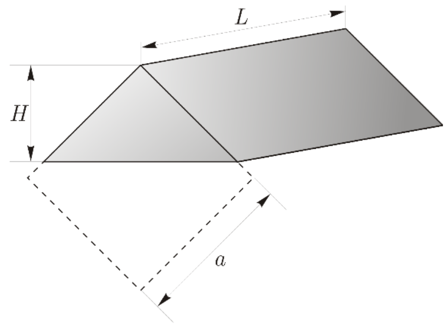
Возможная система оценивания

1. Нахождение массы содержимого четвертого сосуда	1 балл
2. Использование закона сохранения энергии	5 баллов
3. Нахождение температуры содержимого четвертого стакана	4 балла

9 класс

1. Скрытый брусок.

Брусок квадратного сечения опустили в воду, и он погрузился так, что из воды выступала его часть высотой $H=0{,}6a$ (рис. 1), где a – сторона квадрата. Какова плотность ρ дерева, из которого изготовлен брусок? Плотность воды $\rho_0=1{,}00$ г/см^3.



Возможное решение. Слободянин В.

Найдём массу всего бруска:

$$m=La^2\rho.$$

Объём погруженной части равен

$$V_n=La^2-0{,}5(H\cdot 2H)L=L(a^2-H^2).$$

Приравняем силу тяжести силе Архимеда:

$$La^2\rho g=L(a^2-H^2)\rho_0 g,$$

$$\rho=\rho_0(1-(H/a)^2)=0{,}64 \text{ г/см}^3.$$

Возможная система оценивания

1. Нахождение массы всего бруска	2 балла
2. Нахождение объёма погруженной части	4 балла
3. Запись равенство сил	3 балла
4. Численный ответ	1 балл

2. Среднее сближение 2.
Две машины едут по прямому участку дороги навстречу друг другу. Графики зависимости скоростей машин от пройденного расстояния приведены на рис. 3 и рис. 4. Вначале расстояние между машинами было равно 20 км.

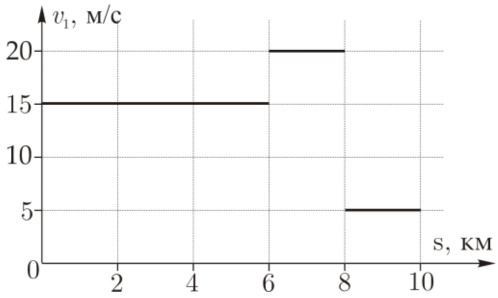


Рис. 3

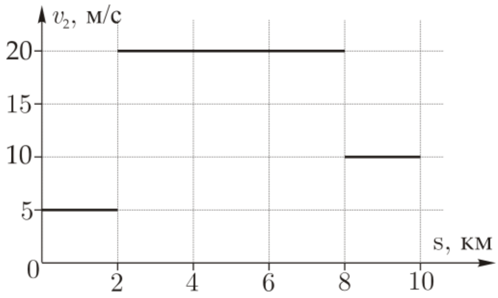


Рис. 4

Чему равна средняя скорость сближения машин до их встречи? С какой максимальной скоростью сближались машины? Сколько времени длилось сближение с максимальной скоростью?
Указание: **скорость сближения** равна отношению изменения расстояния между телами ко времени, за которое расстояние изменялось.

Возможное решение. **Замятнин М.**
Заметим, что время прохождения 10 км одинаково у первой (400 с + 100 с + 400 с) и второй (400 с + 300 с + 200 с) машины. Времена для отдельных участков находятся из графиков. Следовательно встреча произойдет через 900 с. Средняя скорость сближения $\frac{20000}{900}\frac{\text{м}}{\text{с}} = 22{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Для ответа на остальные вопросы задачи удобно перерисовать графики в координатах $v(t)$ для каждой из машин и сложить их, так как машины двигались навстречу (рис. 5).

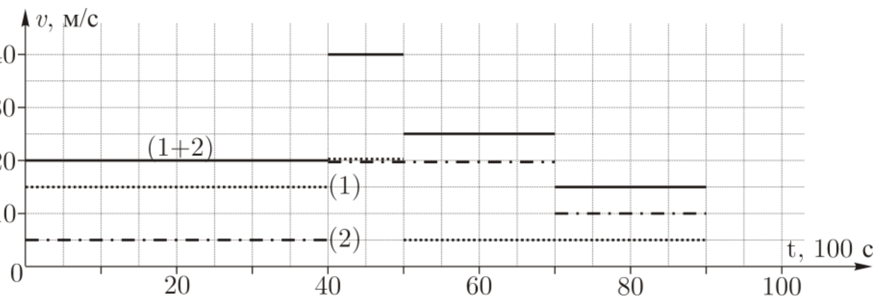


Рис. 1

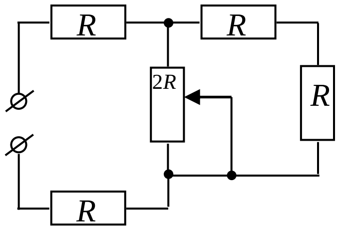
Из графика видно, что максимальная скорость сближения 40 м/с и длилось такое движение 100 с.

Возможная система оценивания

1. Определение времен для участков, пройденных первой машиной	2 балла
2. Определение времен для участков, пройденных второй машиной	2 балла
3. Определение средней скорости сближения	1 балл
4. Графики $v(t)$	1 балл
5. Нахождение максимальной скорости сближения	2 балла
6. Нахождение времени движения с максимальной скоростью	2 балла

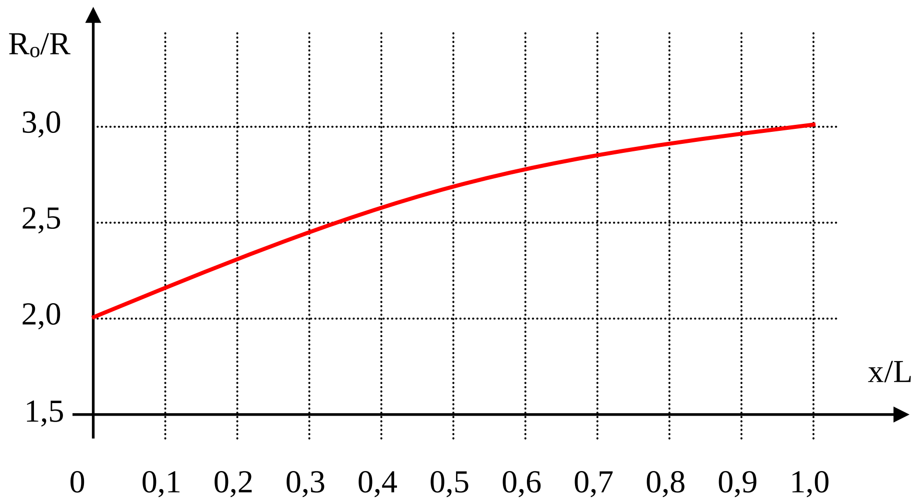
3. Переменное сопротивление.

Постройте график зависимости общего сопротивления цепи от положения ползунка потенциометра. Сопротивление потенциометра между неподвижными контактами $2R$.



Возможное решение. Замятнин М.

Потенциометр можно представить в виде двух резисторов, один из которых «закорочен» ползунком. Сопротивление другого резистора изменяется от 0 до $2R$ в зависимости от положения ползунка. $r=2Rx/L$, где L — максимальное перемещение ползунка. Сопротивление цепи $R_0 = 2R + \dfrac{r2R}{r+2R} = 2R\left(\dfrac{2x+L}{x+L}\right)$. График строим по нескольким точкам.



Возможная система оценивания

1. Указано на линейность зависимости сопротивления реостата от положения ползунка 2 балла
2. Расчитано общее сопротивление цепи 4 балла
3. Культурный график зависимости сопротивления от положения ползунка 4 балла

4. Разгон.

Гоночный болид движется по прямолинейному участку трассы равноускорено. Скорость болида в конце участка $v_2 = 98\ \text{м/с}$, скорость в начале участка $v_1 = 40\ \text{м/с}$. Какой была скорость болида v_x на 1/4 пути от начала разгона?

Возможное решение. Кузнецов Е.

Весь путь пройденный автомобилем:

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Начальная часть пути, в n раз меньшая всего пути:

$$\frac{s}{n} = \frac{v_x^2 - v_1^2}{2a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2an},$$

отсюда получаем выражение для скорости v_x:

$$v_x = \sqrt{\frac{v_2^2 + (n-1)v_1^2}{n}}.$$

Подставляя $n = 4$ и $v_2 = 2{,}45v_1$ получаем ответ:

$$v_x \approx 1{,}5v_1 = 60\ \text{м/с}.$$

Возможная система оценивания

1. Найдена длина всего пути, пройденного автомобилем	2 балла
2. Найдена длина n-той части пути, пройденной автомобилем	1 балла
2. Записано выражение, связывающее скорости v_1, v_2, v_x	4 балла
3. Получен ответ для v_x	3 балла

5. Теплообмен.

В лаборатории в четырех стаканах находилась разное количество одинаковой жидкости при разных температурах (рис. 6). После проведения эксперимента связанного с переливанием и смешиванием, в трех стаканах оказалось другое количество жидкости при новых температурах (рис. 7). Сколько и при какой температуре осталось жидкости в четвертом стакане? Теплоемкостью стаканов, потерями жидкости и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

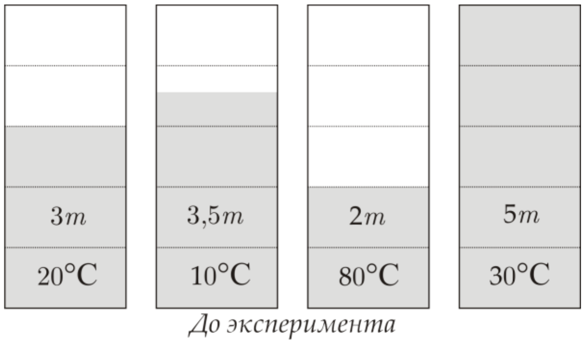


Рис. 6

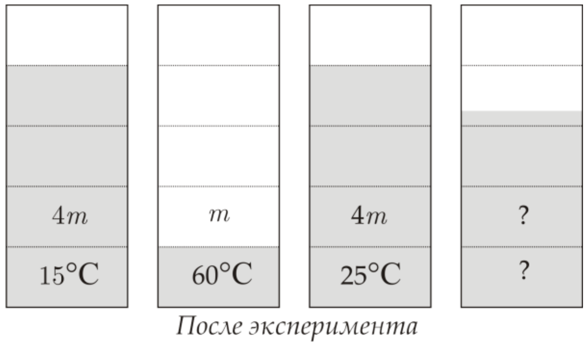


Рис. 7

Возможное решение. Замятнин М.

Масса жидкости должна оставаться неизменной:

$$3m + 3{,}5m + 2m + 5m = 4m + m + 4m + m_x.$$

Откуда $m_x = 4{,}5m$.

Вариант 1.

Для нахождения температуры содержимого четвертого стакана удобно рассмотреть эксперимент эквивалентный данному и состоящий из трех этапов:

1) Все жидкости охлаждают до некоторой одинаковой температуры, при этом запасая выделившуюся теплоту Q в тепловом резервуаре;

2) Жидкости при этой температуре переливают;

3) Теплоту Q возвращают сосудам, причём каждый из них нагревается до конечной температуры.

Отсюда понятно, что сумма величин $c_i m_i t_i$ остаётся постоянной в этом эксперименте.

$$3mc \cdot 20°C + 3{,}5mc \cdot 10°C + 2mc \cdot 80°C + 5mc \cdot 30°C = Q =$$
$$= 4mc \cdot 15°C + mc \cdot 60°C + 4mc \cdot 25°C + m_x c t_x.$$

С учетом $m_x = 4{,}5m$, получим $t_x = 41{,}1$℃.

Вариант 2.

Для нахождения температуры содержимого четвертого стакана воспользуемся методом «виртуального банка тепла». Предположим, что изначальное содержимое стаканов остыло до некоторой нулевой температуры. При этом выделилось тепло, которое мы запасем в некотором «банке». Затем это тепло пустим на нагревание содержимого трех стаканов в конце. Остатки тепла пойдут на нагрев содержимого четвертого стакана. По сути этот метод - отражение закона сохранения энергии для тепловых процессов. Уравнение теплового баланса примет вид:

$$3mc \cdot 20°C + 3{,}5mc \cdot 10°C + 2mc \cdot 80°C + 5mc \cdot 30°C = Q =$$
$$= 4mc \cdot 15°C + mc \cdot 60°C + 4mc \cdot 25°C + m_x c t_x.$$

С учетом $m_x = 4{,}5m$, получим $t_x = 41{,}1$℃.

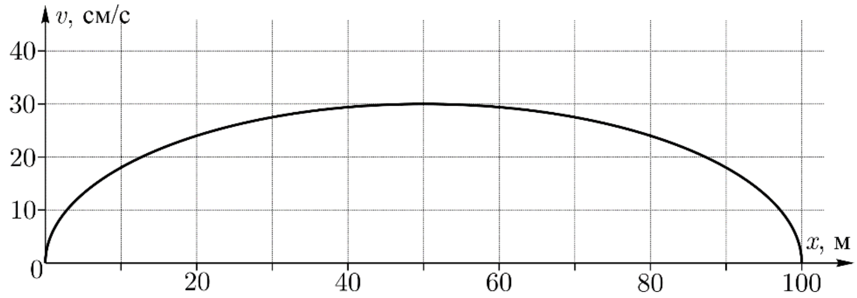
Возможная система оценивания

1. Нахождение массы содержимого четвертого сосуда	1 балл
2. Использование закона сохранения энергии	5 баллов
3. Нахождение температуры содержимого четвертого стакана	4 балла

10 класс

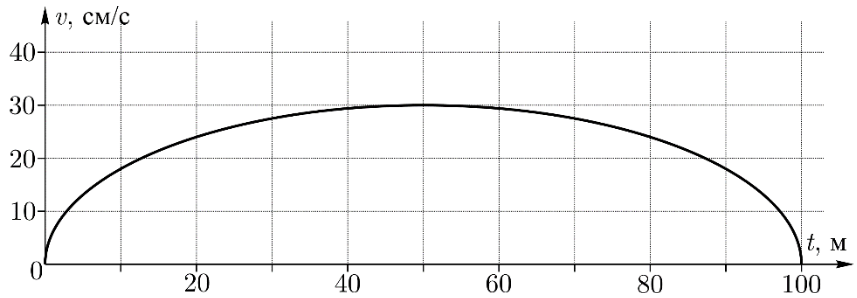
1. Речная переправа

Мальчик смог переплыть реку шириной $L = 100$ м за минимальное время. Скорость мальчика относительно воды постоянна и равна $\upsilon = 1$ м/с. Зависимость скорости течения от расстояния от берега приведена на графике. При удачном выборе масштаба график представляет собой полуокружность. На какое расстояние вниз по реке снесло мальчика течением? Считайте, что в любом месте реки скорость течения направлена вдоль берегов.



Возможное решение. Иванов М.

Так как время переправы – минимальное, мальчик направлял свою скорость прямо на противоположный берег и проплывал равные участки ширины реки за равные интервалы времени. Следовательно, график зависимости скорости реки можно перерисовать в осях $\upsilon(t)$, где $t = L/\upsilon$ – время движения мальчика.



Смещение вниз по реке создавалось только скоростью течения. Поэтому общий снос равен площади под графиком $\upsilon(t)$. Для подсчета площади под графиком скорости воспользуемся её подобием с площадью половины круга:

$$S : \left(\upsilon_{\max} t_{\max}\right) = \frac{\pi R^2}{2} : \left(2R \cdot R\right).$$

Откуда следует

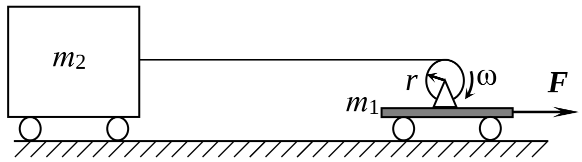
$$S = \frac{\pi}{4}\left(\upsilon_{\max} t_{\max}\right) = 23{,}6 \text{ м}.$$

Возможная система оценивания

1. Связь минимальности времени и стратегии движения	2 балла
2. Поэтапный расчет сноса или подсчет площади под графиком в осях $\upsilon(t)$	2 балла
3. Расчет площади под графиком с использованием идеи подобия	4 балла
4. Дан численный ответ	2 балла

2. Две тележки.

Найдите силу натяжения нити, соединяющей две тележки массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 3$ кг, которые катятся по горизонтальной плоскости, если передний конец нити наматывается на лёгкую катушку радиусом $r = 0{,}1$ м, установленную на передней тележке. Катушка вращается с постоянной угловой скоростью ω. Переднюю тележку тянут горизонтальной силой $F = 12$ Н.



Возможное решение. Бычков А.

Поскольку катушка вращается равномерно, нить укорачивается с постоянной скоростью и связь между ускорениями тел такая же, как и без катушки (т. е. когда второй конец нити прикреплён просто к тележке m_1). Стало быть, тела движутся с одинаковыми ускорениями и для системы можно применить второй закон Ньютона:

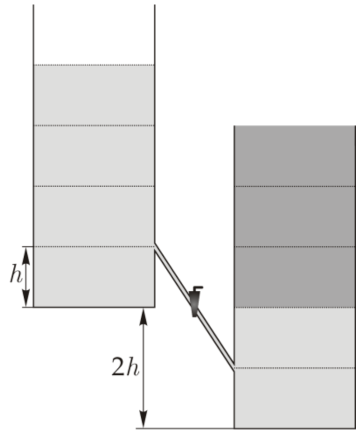
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{T}{m_2}, \text{ откуда } T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 9 \text{ Н.}$$

Возможная система оценивания

1. Обоснование равенства ускорений тележек, 2 балла
2. Записаны уравнения второго закона Ньютона для системы тележек и для каждой из них отдельно 4 балла
3. Решена система уравнений 2 балла
4. Дан численный ответ 2 балла

3. Два сосуда.

Два сообщающиеся сосуда, частично заполненные жидкостью с плотностью ρ до высот $4h$ и $2h$, соответственно, смещены по вертикали на высоту $2h$. Кран в трубке изначально закрыт. В правый сосуд добавляют жидкости плотностью $0{,}8\rho$ столько, что она занимает объем высотой $3h$. Какой по высоте столб жидкости с плотностью $0{,}8\rho$ останется в правом сосуде после того как кран откроют и установится равновесие? Сверху все сосуды открыты. Объемом соединительных трубок можно пренебречь.



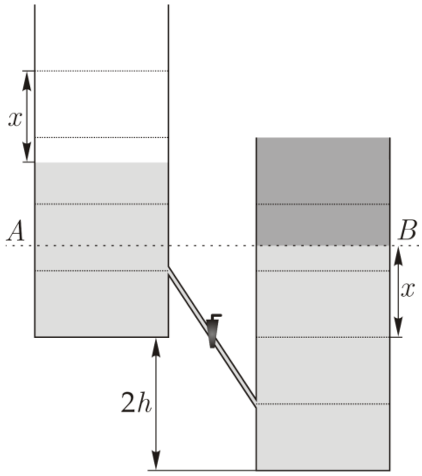
Возможное решение. Замятнин М.

Так как жидкость несжимаема, после того как будет открыт кран, в левом сосуде столб понизится на x, а в правом поднимется на x.

Запишем условие равновесия, приравняв давления в точках 1 и 2.

$$\rho g(4h-2x) = 0{,}8\rho g(3h-x),$$

откуда $x=4h/3$. Следовательно, жидкости с плотностью $0{,}8\rho$ останется $5h/3$.



Возможная система оценивания

1. Учет несжимаемости жидкости	3 балла
2. Условие равенства давлений	4 балла
3. Ответ для уровня легкой жидкости	3 балла

4. Сопротивление каркаса.

Определите сопротивление между точками A и $Б$ проволочного каркаса (рис. 6). Сопротивление каждого прямолинейного участка проволоки равно R.

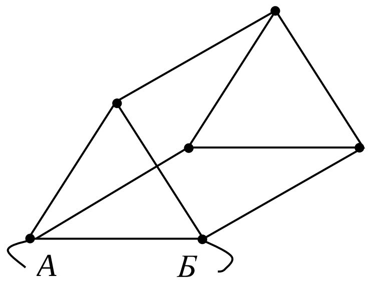


Рис. 6

Возможное решение. Иванов М.

Для определенности пусть к точке $Б$ подключен плюс источника, а к точке A – минус. Тогда токи будут направлены от $Б$ к A (рис. 7). Расставим токи в ветвях цепи с учетом симметрии схемы и закона Ома: силы токов обратно пропорциональны сопротивлениям параллельных ветвей (см. рис.).

Начнем с дальнего конца схемы, так как там сила тока меньше по величине. Пусть сила тока, текущего от узла 3 к узлу 4 равна I. Тогда, в силу симметрии, от узла 4 к узлу 2 идет ток такой же силы I. Следовательно, по перемычке 41 ток не идет. В ветви 32 сила тока равна $2I$, так как её сопротивление в 2 раза меньше, чем ветви 342. Из закона сохранения заряда, следует, что сила тока, идущего от точки $Б$ к узлу 3 равна $3I$. Такой же ток идет от точки 2 к узлу A. Напряжение между $Б$ и A по контуру $Б32A$ равно:

$$3IR + 2IR + 3IR = 8IR.$$

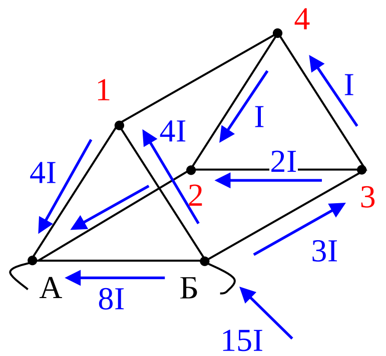


Рис. 7

Следовательно, в ветви $БA$ сила тока равна $8I$, а в ветви $Б1A$ $4I$. Общая сила тока, входящего в узел $Б$, равна $15I$. Общее сопротивление цепи равно отношению напряжения между A и $Б$ к общей силе тока.

$$R_0 = \frac{8IR}{15I} = \frac{8}{15}R.$$

Возможная система оценивания

1. Обоснование отсутствия тока в перемычке 41	2 балла
2. Расстановка токов в ветвях или последовательность эквивалентных преобразований, упрощающих схему	6 баллов
3. Определение общего сопротивления	2 балла

5. Наименьшее давление.

Определите наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α — положительные постоянные, V — объём одного моля газа.

Возможное решение. **(фольклор).**

Запишем уравнение состояния для идеального газа, взятого в количестве 1 моль.

$$pV = RT,$$

где V – молярный объем газа. С учётом уравнения процесса (данного в условии), получим:

$$pV = R\left(T_0 + \alpha V^2\right).$$

Это квадратное уравнение (относительно V) корни которого:

$$V_{1,2} = \frac{p}{2\alpha V} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2\alpha V}\right)^2 - \frac{T_0}{\alpha}}.$$

В случае, когда давление достигает минимума, дискриминант обращается в ноль:

$$\left(\frac{p}{2\alpha V}\right)^2 - \frac{T_0}{\alpha} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$p_{\min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}.$$

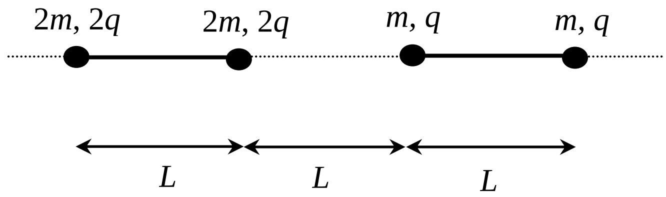
Возможная система оценивания

1. Записано уравнение состояния с учетом уравнения процесса	2 балла
2. Записано выражения для объема газа, как функции давления	3 баллов
3. Указан способ поиска минимального давления	3 балла
4. Дан ответ	2 балла

11 класс

1. Разлет зарядов.

Вдоль одной прямой расположены две пары скрепленных зарядов. Величины зарядов и их массы указаны на рисунке. С какими ускорениями начнут разлетаться эти пары? Какие скорости они приобретут после разлета на большое расстояние? Считайте движение пар зарядов поступательным. Расстояние L, заряд q и масса m заданы.



Возможное решение. Иванов М.

Для правой пары зарядов запишем второй закон Ньютона:

$$2kq^2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{2}{(2L)^2}+\frac{1}{(3L)^2}\right)=2ma_1,$$

где a_1 — ускорение этой пары. Из записанного уравнения находим ускорение:

$$a_1=\frac{29}{18}\frac{kq^2}{L^2}.$$

По третьему закону Ньютона, на левую пару зарядов со стороны правой действует такая же по величине сила. Однако масса левой пары в два раза больше, поэтому её ускорение

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{29}{36}\frac{kq^2}{L^2}.$$

Так как система замкнута, мы можем воспользоваться законами сохранения импульса и энергии, причем, энергию взаимодействия зарядов внутри пары не будем учитывать, так как она не изменяется.

$$\frac{kq2q}{L}+\frac{kq2q}{2L}+\frac{kq2q}{2L}+\frac{kq2q}{3L}=\frac{2mu_1^2}{2}+\frac{2\cdot 2mu_2^2}{2}$$

$$\text{и} \qquad 0=2mu_1-2\cdot 2mu_2,$$

где u_1 — скорость правой пары, u_2 — скорость левой пары.

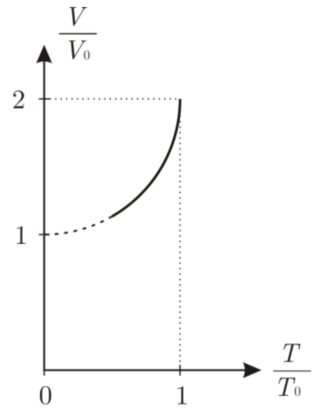
Откуда $u_1=\dfrac{2q}{3}\sqrt{\dfrac{7k}{Lm}}$ и $u_2=\dfrac{q}{3}\sqrt{\dfrac{7k}{Lm}}$.

Возможная система оценивания

1. Получено выражение для силы взаимодействия двух пар зарядов	1 балла
2. Найдены ускорения a_1, a_2	2 балла
3. Записан закон сохранения энергии	2 балла
4. Записан закон сохранения импульса	2 балла
5. Решение системы	3 балла

2. Необычный процесс.

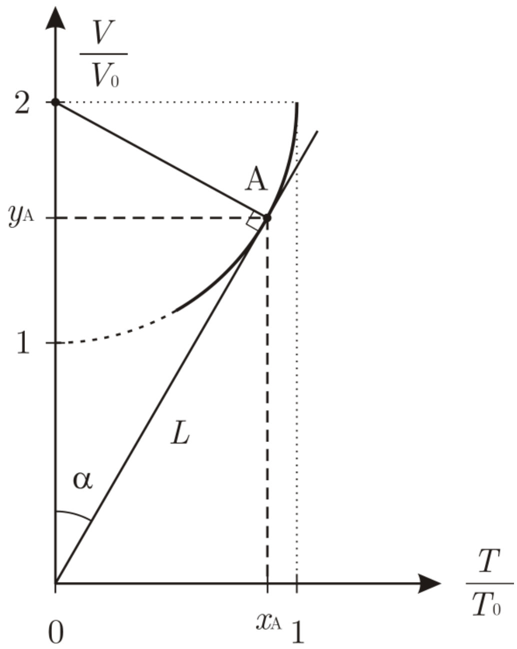
На рисунке представлена (в относительных единицах) зависимость объёма порции воздуха массой m = 10 г от его температуры (примерно шестая часть окружности единичного радиуса). Найдите максимальное давление p_{max}, которого достигал воздух в процессе нагревания, если V_0 = 1 л, а T_0 = 300 К. В этой задаче воздух можно считать идеальным газом.



Возможное решение. **Бычков А.**

Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT \leftrightarrow \frac{V}{V_0} = \left(\frac{\nu RT_0}{pV_0}\right)\frac{T}{T_0}.$$



Видно, что процесс с постоянным давлением (изобара) в используемых координатах представляет из себя прямую, проходящую через начало координат. Причем чем больше давление, тем больше угол α (см. рис.). Таким образом, точку, в которой давление было максимально, можно найти проведя касательную из начала координат к графику процесса (т. А на рисунке). Поскольку радиус окружности единичный, $\sin\alpha = 1/2$, значит, $\alpha = 30°$ и

$$L = 2\cos\alpha = \sqrt{3},$$

$$x_A = L\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_A = L\cos\alpha = \frac{3}{2}.$$

Зная координаты точки на графике, найдём максимальное давление:

$$p_{max} = \frac{m}{\mu}R\frac{x_A T_0}{y_A V_0} \approx 5 \times 10^5 \text{ Па},$$

где $\mu = 29$ г/моль — молярная масса воздуха.

Возможная система оценивания

1. Связь максимального давления с углом наклона вспомогательной изобары	2 балла
2. Максимальное давление в данном процессе в точке касания самой «пологой» изобары	2 балла
3. Определение координат точки касания	4 балла
4. Определение максимального давления	2 балла

3.Акустический резонанс.

Если над трубой, открытой с одного конца, протекает воздух, в ней может возникнуть акустический резонанс – труба «поёт». Звук возникает тогда, когда на длине L воздушного столба в трубе укладывается нечетное число четвертей длины волны звука λ. Основной резонанс возникает при $L = \lambda/4$. На рис. 1 представлен спектр акустических резонансов, возникающих в пробирке при продувании через нее воздуха (рис. 2). По вертикальной оси отложена амплитуда колебаний, а по горизонтальной – частота. Частота ν_1 = 431 Гц соответствует основному резонансу.

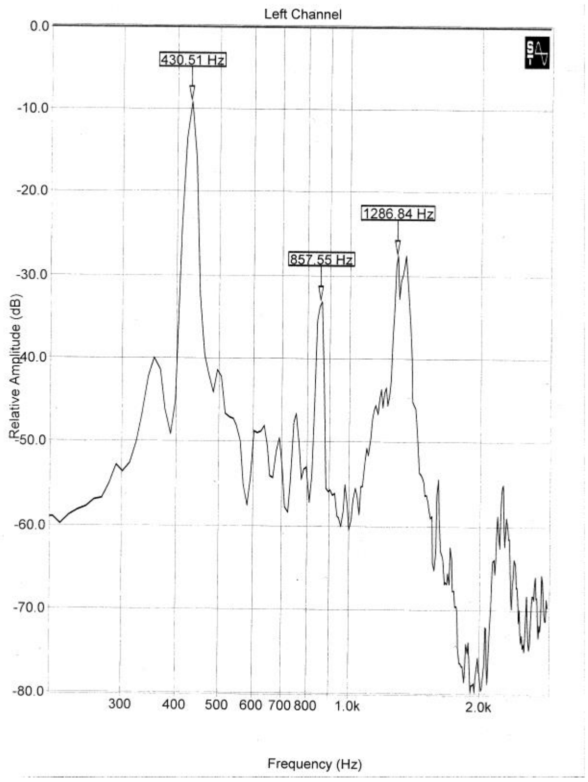


Рис. 1

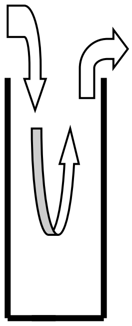


Рис. 2

Экспериментально исследовалась зависимость частоты ν основного акустического резонанса в пробирке от объема V налитой в нее воды. Вода в пробирку наливалась для того, чтобы изменять в ней длину воздушного столба.

Погрешностью измерения резонансной частоты можно пренебречь.

В таблице представлены результаты измерений:

V, мл	0	10	20	30	40
ν , Гц	431	495	569	677	829

Путем графической обработки экспериментальных результатов определите длину L и внутренний диаметр d пробирки. Скорость звука в воздухе $u_{зв} = 340$ м/с.

Возможное решение. Кармазин С.

Пусть в пробирку налили воду объёмом V. Длина воздушного столба в ней равна

$$l = L - \frac{V}{S},$$

где S — площадь сечения внутренней части пробирки.

Условие основного акустического резонанса имеет вид:

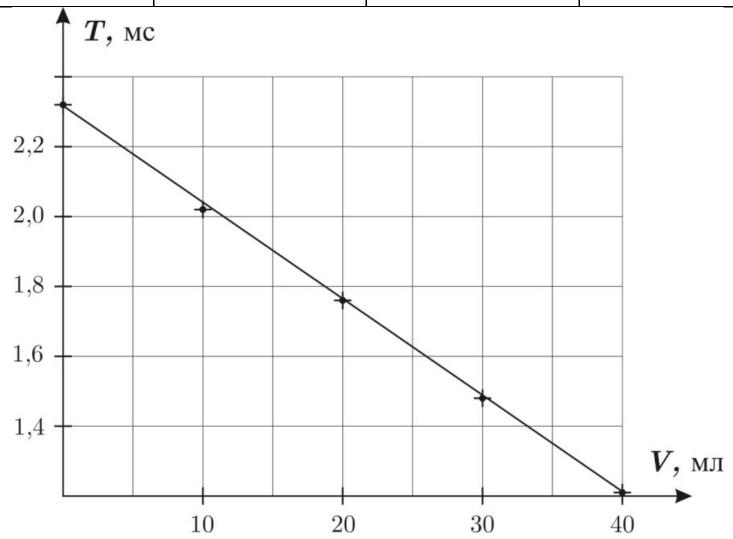
$$\frac{1}{4}\lambda = L - \frac{V}{S}.$$

Поскольку $\nu\lambda = v_{зв}$ (ν — частота), получаем:

$$\frac{1}{4}\frac{v_{зв}}{\nu} = L - \frac{V}{S}, \qquad \text{или} \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{4}{v_{зв}}L - \frac{4}{v_{зв}}\frac{V}{S} \qquad (1)$$

Зависимость (1) является линейной функцией обратной частоты (периода колебаний T) от объёма налитой воды. Значение $1/\nu$ при $V = 0$ позволяет определить длину пробирки L, а наклон графика функции $T(V)$ — диаметр d. Для каждого значения V посчитаем T и построим график:

V, мл	0	10	20	30	40
T, мс	2,32	2,02	1,76	1,48	1,21
ν , Гц	431	495	569	677	829



Из графика:

$$T(0) = 2{,}32 \text{ мс} = \frac{4L}{v_{зв}}, \qquad \text{откуда } L = 19{,}7 \text{ см}.$$

Наклон графика:

$$\frac{\Delta T}{\Delta V} = -\frac{1{,}10 \text{ мс}}{40 \text{ мл}} = -27{,}5\,\frac{\text{с}}{\text{м}^3} = -\frac{4}{v_{зв}S}, \qquad \text{откуда} \quad S = 4{,}28 \text{ см}^2.$$

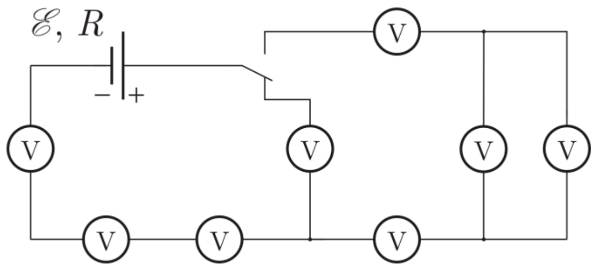
$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 23 \text{ мм}.$$

Возможная система оценивания

1. Условие основного акустического резонанса	2 балла
2. Получена линейная зависимость T от V	2 балла
3. Таблица и график	3 балла
4. Найдено значение L с точностью 5%	2 балл
5. Найдено значение d с точностью 5%	1 балл

4. Много вольтметров.

На сколько процентов изменится сумма показаний всех вольтметров в цепи, схема которой приведена на рис. 1, если перевести переключатель из нижнего положения (1) в верхнее положение (2)? Внутреннее сопротивление R источника равно сопротивлению вольтметра. Все вольтметры одинаковые.



Возможное решение. **Замятнин М.**

В положении 1 ключа сила тока, проходящего через источник равна $I_1 = \frac{\varepsilon}{5R}$. Суммарные показания всех 4-х вольтметров $U_1 = 4 \cdot I_1 R = \frac{4}{5}\varepsilon$.

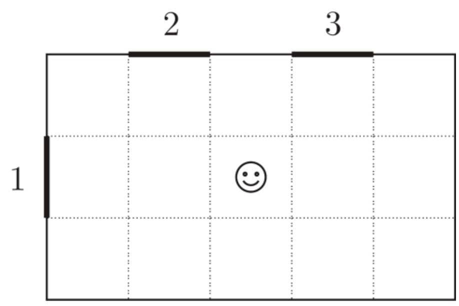
В положении 2 сила тока, текущего через источник равна $I_2 = \frac{\varepsilon}{6{,}5R}$. Причем два параллельных вольтметра показывают напряжение вдвое меньше остальных, так как через них течет вдвое меньший ток. Новые суммарные показания $U_2 = 5 \cdot I_2 R + 2\frac{I_2}{2} R = \frac{12}{13}\varepsilon$.

Отношение суммарных показаний $\frac{U_2}{U_1} = \frac{15}{13}$=1,15. Следовательно, суммарные показания увеличились на 15 процентов.

Возможная система оценивания

1.	Нахождение тока в первом случае	1 балл
2.	Нахождение тока во втором случае	2 балла
3.	Выражение для суммарных показаний в первом случае	2 балла
4.	Выражение для суммарных показаний во втором случае	3 балла
5.	Нахождение процентного изменения	2 балла

5. Тренажерный зал.



На двух стенах тренажерного зала висят 3 одинаковых плоских зеркала. Какое максимальное количество своих изображений видит спортсмен, стоящий в центре зала? Какое максимальное количество изображений спортсмена одновременно может видеть сторонний наблюдатель? Изобразите план зала и выделите на нём области, из которых он может видеть изображение спортсмена. Для каждой области сделайте отдельный рисунок. На отдельном рисунке изобразите область из которой наблюдатель может видеть максимальное число изображений. План тренажерного зала с зеркалами (вид сверху) приведен на схеме. Считайте спортсмена не слишком крупным (почти точечным).

Возможное решение. **Замятнин М.**

Точечный предмет и его изображение в плоском зеркале равноудалены от плоскости зеркала. Оба они лежат на перпендикуляре, проведенном к плоскости этого зеркала.

На рисунке 1 показана область (А), из которой видно изображение S1.

На рисунке 2 показаны две области (В), из которой видно изображение S2.

На рисунке 3 показана область (С), из которой в зеркале 1 видно изображение S3.

Все три изображения будут видны из той части комнаты (область (D)), в которой перекрываются области (А), (Б), (С). На рисунке 4 она выделена тёмным цветом.

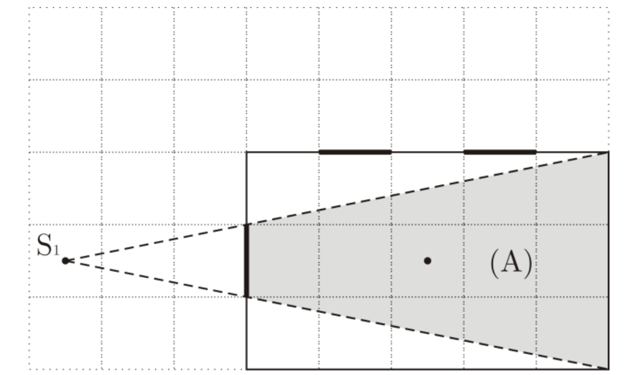


Рис. 1

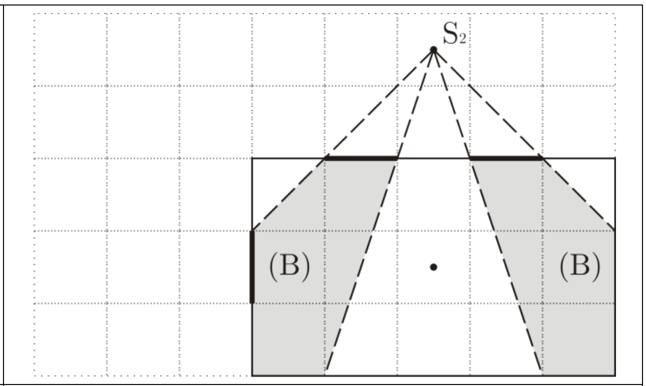


Рис. 2

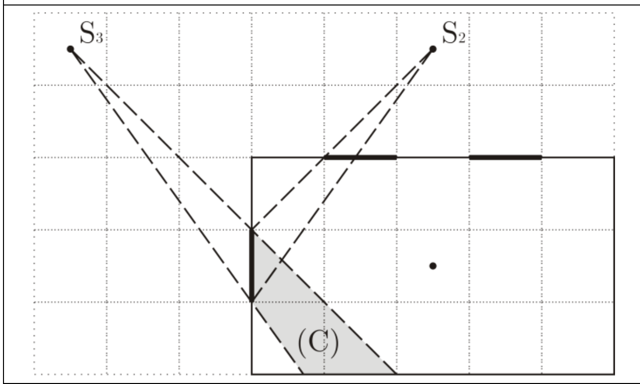


Рис. 3

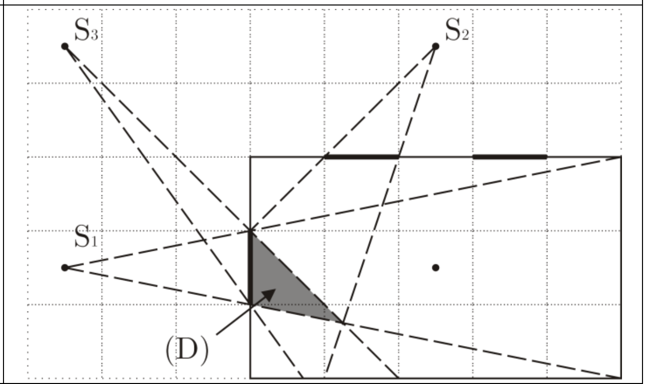


Рис. 4

Итак, из построений видно, что спортсмен может видеть только одно свое изображение S1 в зеркале 1.

Сторонний наблюдатель может видеть все 3 изображения из области (D), выделенной темным цветом.

Возможная система оценивания

1. Построена область (А)	1 балл
2. Построены области (В)	2 балла
3. Построение области (С)	3 балла
4. Какое максимальное число изображений можно наблюдать	1 балл
5. Построение области (D)	2 балла
6. Сколько своих изображений видит спортсмен	1 балл

Если построены «дополнительные» области видимости S3, то за п.3 баллов не давать!