Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

9 класс
1. Ерофеев И.
2. Ко́зел С.
3. Фольклор
4. Ко́зел С.
5. Слободянин В.

10 класс
1. Ко́зел С.
2. Малеев А.
3. Паверман В.
4. Сметнёв Д.
5. Шеронов А.

11 класс
1. Плис В.
2. Александров Д.
3. Ко́зел С.
4. Матвеев Х., Проскурин М.
5. Гуденко А.

Общая редакция — Ко́зел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Воробель О., Гущин И., Ерофеев И., Сметнёв Д.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX 2_\varepsilon$.
© Авторский коллектив
Подписано в печать 13 апреля 2010 г. в 04:33.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Плотность нефти

В сильно загрязнённом водоёме толщина слоя нефти на поверхности воды составляет $d = 1{,}0$ см. На поверхность водоёма пустили плавать лёгкий цилиндрический стаканчик массой $m = 4{,}0$ г с площадью дна $S = 25$ см^2. Стакан был сначала пустым, а его дно было выше середины уровня нефти. Затем в него долили нефти так, чтобы её уровни в стакане и снаружи сравнялись. В обоих случаях дно находилось на одном и том же расстоянии a от уровня воды (рис. 1). Определите плотность нефти ρ_1, зная, что плотность воды $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3.

Задача 2. Манёвры кораблей

Два корабля движутся с постоянными и одинаковыми по модулю скоростями $v_1 = v_2 = v$. В некоторый момент расстояние между ними оказалось равным L, а их взаимное расположение таким, как показано на рисунке 2.

1. Определите минимальное расстояние между кораблями при их последующем движении.

2. Найдите время τ, через которое корабли окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

3. В момент, когда корабль B пересекает линию движения корабля A, от борта корабля A отправляется катер, который должен доставить на корабль B пакет с важным сообщением. Определите, через какое минимальное время Δt после отправки катера пакет будет доставлен на борт корабля B, если скорость u катера также равна v.

Задача 3. Плавление льда

В большой плоской льдине, имеющей температуру 0 °C, сделали лунку обьёма $V_0 = 1000$ см^3 и прикрыли её пенопластовой (теплоизолирующей) крышкой с небольшим отверстием (рис. 3). Какую максимальную массу m воды, имеющей температуру 100 °C, можно постепенно влить через отверстие в лунку? Известно, что удельная теплоёмкость воды $c_0 = 4{,}19$ кДж/(кг · °C), плотность воды $\rho_0 = 1{,}00 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}90 \cdot 10^3$ кг/м^3, а удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг.

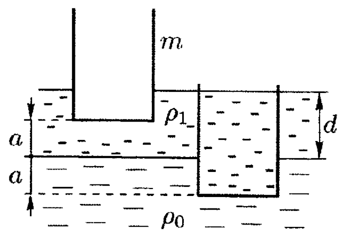


Рис. 1

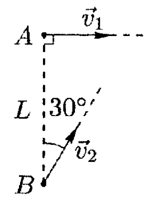


Рис. 2

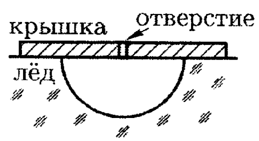


Рис. 3

Задача 4. Электроплитка

Электроплитка имеет две спирали (два нагревательных элемента), которые можно включать в сеть либо по отдельности, либо соединяя их последовательно или параллельно. Будем считать, что сопротивления спиралей не зависят от температуры.

Оказалось, что если включить в сеть только первую спираль, то электроплитка нагревается до температуры $t_1 = 180$ °C, а если включить только вторую спираль, то плитка нагревается до температуры $t_2 = 220$ °C.

До какой температуры нагреется плитка при:

1. последовательном включении спиралей,
2. параллельном включении спиралей.

Указание. Поток тепла от плитки во внешнюю среду пропорционален разности температур между плиткой и воздухом в комнате. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t_0 = 20$ °C.

Задача 5. Электрический мостик

Электрическая цепь состоит из пяти резисторов и двух идеальных амперметров (рис. 4). Сопротивления резисторов R_0, R_1 и R_2 заданы, а сопротивление R_3 неизвестно. Найдите показание амперметра A_2, если сила тока I_1, протекающего через амперметр A_1, известна.

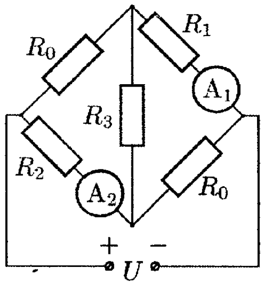


Рис. 4

10 класс

Задача 1. Скольжение груза по доске

На длинном гладком горизонтальном столе лежит доска массы m_2 и длины L, на левом конце которой находится груз массы m_1. Коэффициент трения между грузом и доской равен μ. Трение между доской и столом отсутствует. Груз m_1 связан с грузом M длинной невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 5). Система начинает двигаться из состояния покоя.

1. При каких значениях коэффициента трения μ груз m_1 и доска m_2 будут двигаться как единое целое (без проскальзывания)?

2. Найдите минимальное значение коэффициента трения $\mu_{\min}$, при котором возможно движение без проскальзывания.

3. Пусть $\mu = \mu_{\min}/2$. В этом случае груз m_1 и доска m_2 будут двигаться с разными ускорениями. Через какое время t после начала движения груз соскользнёт с доски?

Считайте, что $m_1 = M = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. Длину доски L примите равной 1 м. Известно, что длина груза много меньше L. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

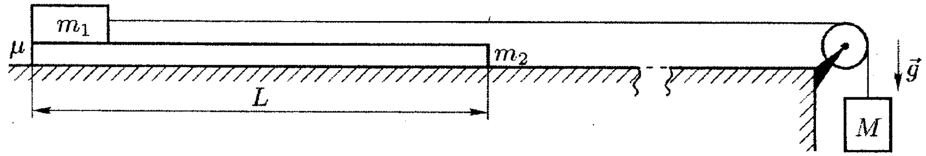


Рис. 5

Задача 2. Диссоциация

При нормальных условиях кислород состоит из двухатомных молекул O_2. При повышении температуры часть молекул может диссоциировать, в результате чего из каждой молекулы O_2 образуются два атома O. На рисунке 6 показаны два идентичных циклических процесса 1 и 2 в координатах (ρ, p), где ρ — плотность газа, p — давление. По осям отложены безразмерные величины p/p_0 и ρ/ρ_0, где p_0 и ρ_0 — некоторые масштабные коэффициенты. При проведении первого эксперимента рабочим веществом служил молекулярный кислород O_2 (низкие температуры). Второй эксперимент проводился при значительно более высоких температурах. При этом часть кислорода находилась в молекулярном (O_2), а часть — в атомарном (O) состоянии, и степень диссоциации не изменялась в течение эксперимента. Масса газа в обоих экспериментах была одной и той же. Известно, что отношение максимальных температур в этих экспериментах $k_{\max} = T_{2,\max}/T_{1,\max} = 5{,}0$.

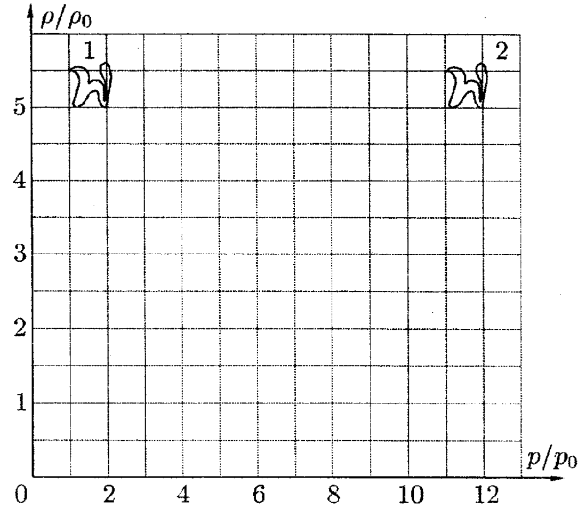


Рис. 6

1. Определите степень диссоциации α (долю диссоциированных молекул) молекул кислорода во втором эксперименте.

2. Определите отношение $k_{\min}$ минимальных температур в этих экспериментах.

Задача 3. Шайба на наклонной плоскости

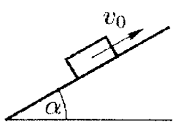


Рис. 7

Небольшую шайбу толкнули вверх вдоль наклонной плоскости с углом наклона α с начальной скоростью v_0 (рис. 7).

1. Через какое время t_0 шайба вернётся в исходную точку при отсутствии трения?

2. При каких значениях коэффициента трения μ шайба возвратится назад?

3. Определите время t_μ возврата шайбы в исходную точку при наличии трения.

4. При каком значении коэффициента μ время t_μ будет равно t_0 — времени возврата шайбы при отсутствии трения?

Задача 4. Варистор

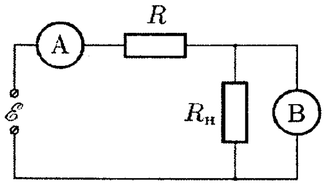


Рис. 8

В некоторых случаях для предохранения электроприборов от больших изменений входного напряжения применяются нелинейные полупроводниковые элементы — варисторы, включаемые параллельно прибору, роль которого на рисунке 8 играет нагрузочное сопротивление $R_{\text{н}}$. Здесь $R_{\text{н}} = 10$ Ом, $R = 10$ Ом — балластное сопротивление, В — варистор, вольтамперная характеристика которого изображена

на рисунке 9, I — показания амперметра А, $\mathscr{E}$ — входное напряжение. В номинальном режиме амперметр показывает силу тока $I = I_0 = 1{,}0$ А.

1. Определите входное напряжение $\mathscr{E}_1$ в номинальном режиме, а также напряжение $U_{\text{в}1}$ на варисторе и силу тока $I_{\text{в}1}$, текущего через него.

2. Пусть входное напряжение возросло в 2 раза и стало равным $\mathscr{E}_2 = 2\mathscr{E}_1$. Определите, на сколько увеличилось напряжение на нагрузке и на сколько изменилась сила тока, протекающего через варистор.

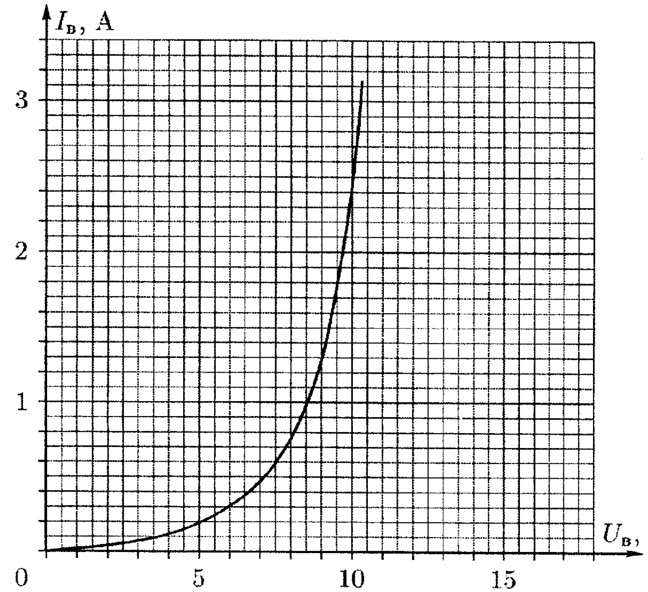


Рис. 9

Задача 5. Цепь с двумя конденсаторами

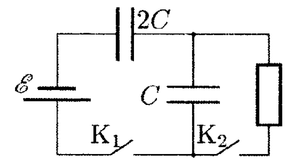


Рис. 10

1. В электрической цепи, состоящей из аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}$, двух конденсаторов с емкостями $2C$ и C и резистора с некоторым сопротивлением (рис. 10), замыкают ключ K_1. До какого напряжения зарядятся конденсаторы? Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебрегите.

2. После того, как конденсаторы полностью зарядились, замыкают ключ K_2, и размыкают его тогда, когда сила тока через аккумулятор уменьшается в 2 раза по сравнению с силой тока через него сразу после замыкания ключа K_2. Найдите количество теплоты Q, выделившееся в цепи за время, прошедшее с момента замыкания ключа K_2 до момента его размыкания.

11 класс

Задача 1. Цепочка на сфере

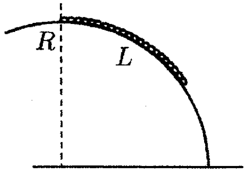


Рис. 11

Однородная цепочка длины L закреплена одним концом на вершине гладкой сферической поверхности радиуса R, причём $L < \pi R/2$ (рис. 11). Верхний конец цепочки освобождают.

1. С каким ускорением a (по модулю) будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки?

2. В каком месте цепочки сила натяжения T сразу после освобождения будет максимальной?

Рассмотрите случай, когда длина цепочки L равна $2\pi R/6$.

Задача 2. Движение без проскальзывания

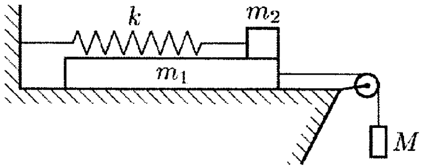


Рис. 12

На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится длинная доска массы m_1, на правый край которой помещён брусок массы m_2. Брусок соединён со стенкой лёгкой нерастянутой пружиной жёсткости k. К доске прикреплён груз массы M с помощью лёгкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. 12). В начальный момент система покоится. Между доской и бруском существует сухое трение. Коэффициент трения между доской и бруском равен μ.

Какой путь L преодолеет брусок к тому моменту времени, когда между ним и доской начнётся проскальзывание? Исследуйте, как результат зависит от μ. Найдите время t движения бруска, за которое он преодолеет расстояние L.

Задача 3. Тепловая машина

У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя $T_1 = 800$ К, а температура T холодильника зависит от полезной мощности P машины. Холодильник представляет собой массивное теплоизолированное от окружающей среды тело, которое посредством теплопроводности передаёт холодному резервуару с температурой $T_2 = 300$ К всю тепловую энергию Q_2, полученную за время Δt работы машины (рис. 13). Теплопроводность осуществляется по закону $Q_2 = \alpha(T - T_2)\Delta t$, где $\alpha = 1{,}0$ кВт/К.

1. Выразите мощность P тепловой машины через температуры T_1, T и T_2.

2. Вычислите температуру T_m холодильника, при которой мощность машины максимальна.

3. Определите эту максимальную мощность $P_{\max}$.

4. Найдите КПД η тепловой машины при работе с максимальной мощностью.

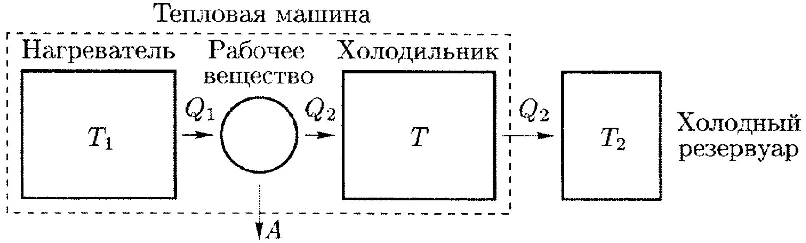


Рис. 13

Задача 4. Движение заряженных частиц

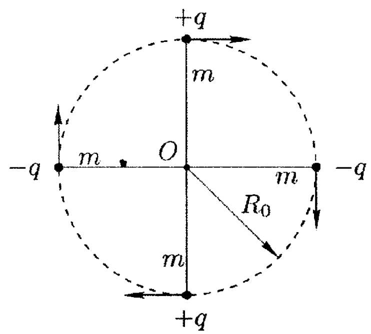


Рис. 14

В свободном пространстве на окружности радиуса R_0 в вершинах вписанного квадрата расположены 4 точечные массы m. Две из них несут заряд $+q$, а две другие — $-q$ (рис. 14). В начальный момент этим материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательной к окружности по часовой стрелке.

Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра O начальной окружности равно R_1 ($R_1 < R_0$). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке O. Действием гравитационных сил можно пренебречь.

1. Выполните необходимые расчёты и определите траектории движения материальных точек.

2. Определите характерное время движения материальных точек.

Задача 5. Униполярный индуктор

Униполярный индуктор представляет собой быстро вращающийся постоянный магнит в форме диска. Диск выполнен из магнитного сплава, способного создавать сильное магнитное поле, и покрыт тонким проводящим слоем никеля.

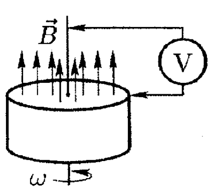


Рис. 15

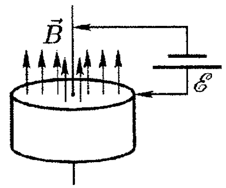


Рис. 16

При вращении диска между осью вращения и боковой поверхностью возникает разность потенциалов, которую можно измерить с помощью неподвижного вольтметра (рис. 15). Если же к оси вращения и боковой поверхности подсоединить батарейку, то магнит начнёт быстро вращаться, превратившись в электродвигатель. Точно так же, если быстро вращать вал обычного электромотора, он превращается в генератор, и наоборот, если на электрический генератор подать напряжение, он превращается в электромотор.

На рисунке 16 показана схема такого реально работающего *униполярного электродвигателя*, ротором которого является сильный постоянный магнит в форме диска радиуса $r_0 = 2$ см, насаженного на ось. При подключении с помощью скользящих контактов батарейки с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}5$ В диск начинает быстро вращаться.

1. Что покажет неподвижный вольтметр на рисунке 15 при частоте вращения диска $\nu = 3000$ об/мин? Какова полярность этой разности потенциалов? Укажите полярность на рисунке 15.

2. Пренебрегая трением, оцените предельную частоту вращения (об/мин) намагниченного диска (ротора униполярного двигателя на рисунке 16). Укажите направление вращения ротора при заданной на рисунке 16 полярности батарейки и направлении вектора $\vec{B}$. Модуль вектора $\vec{B}$ постоянен и равен $B = 1$ Тл.

Примечание. Для упрощения расчётов считайте, что в проводящем никелевом слое вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля перпендикулярен поверхности диска (рис. 15). Также для упрощения считайте, что ток в проводящем слое течёт вдоль радиуса.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Плотность нефти

Условие равновесия в первом случае запишется как $mg = F_{\text{А}}$, где сила Архимеда $F_{\text{А}} = \rho_1 g(d-a)S$. Отсюда найдём:

$$\frac{m}{S} = \rho_1(d-a). \tag{1}$$

Во втором случае давление на уровне дна составит $p = \rho_1 gd + \rho_0 ga$. Следовательно, условие равновесия запишется как:

$$\big(m + \rho_1 S(d+a)\big)g = pS = (\rho_1 d + \rho_0 a)gS,$$

откуда, используя (1), найдём $\rho_1 = (a/d)\rho_0$. Подставим это выражение в (1):

$$\frac{m}{S} = \rho_0 \frac{a}{d}(d-a), \qquad \text{или} \qquad x^2 - x + \frac{m}{\rho_0 dS} = 0,$$

где $x = a/d$. Решая уравнение, получим два корня:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{\rho_0 dS}} = \frac{1}{5} \text{ или } \frac{4}{5}.$$

Таким образом, найдём два возможных значения для плотности нефти:

$$\rho_1 = \rho_0 x = 0{,}2\ \text{г/см}^3 \text{ или } 0{,}8\ \text{г/см}^3.$$

Исходя из того, что $a/d > 1/2$, получим окончательно $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3.

Критерии оценивания

Записано условие равновесия в первом случае 2
Записано условие равновесия во втором случае 2
Найдены два возможных значения плотности 4
Выбрано верное значение плотности 2

Задача 2. Манёвры кораблей

1. Для ответа на первый вопрос удобно выбрать систему отсчёта, связанную с одним из кораблей (например, A). На рисунке 17 изображён вектор $\vec{V}$ относительной скорости корабля. Так как по условию $v_1 = v_2 = v$, из рисунка следует, что относительная скорость $\vec{V}$ направлена под углом 30° к линии, соединяющей корабли, и равна по модулю v. Для определения минимального расстояния между кораблями нужно опустить

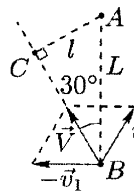


Рис. 17

перпендикуляр из точки A на направление относительной скорости. Минимальное расстояние между кораблями при их дальнейшем движении есть длина $l = AC = L \sin 30° = L/2$ опущенного перпендикуляра.

2. Двигаясь с относительной скоростью $V = v$, корабль B окажется на минимальном расстоянии от корабля A через время:

$$\tau = \frac{L \cos 30°}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{v}.$$

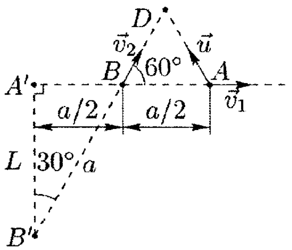


Рис. 18

3. Для ответа на третий вопрос изобразим относительное положение кораблей на море в тот момент, когда корабль B пересекает линию движения корабля A (рис. 18). На этом рисунке точки A' и B' обозначают положения кораблей в начальный момент времени. Так как скорости кораблей и катера по модулю одинаковы, а угол между скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равен $60°$, точка D встречи катера с кораблём B должна лежать в вершине равностороннего треугольника. Значит, $v\Delta t = a/2$, где a — гипотенуза $\Delta A'B'B$, равная $2L/\sqrt{3}$. Отсюда находим Δt:

$$\Delta t = \frac{a}{2v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L}{v}.$$

Критерии оценивания

Определено минимальное расстояние l 4
Найдено время τ 3
Определено время Δt 3

Задача 3. Плавление льда

При заполнении лунки кипятком некоторый объём V_x льда расплавится. Из этого льда образуется вода объёмом $V_в = V_x\rho_л/\rho_0$. Следовательно, объём полости увеличится на ΔV:

$$\Delta V = V_x - V_в = V_x\left(\frac{\rho_0 - \rho_л}{\rho_0}\right). \quad (2)$$

Для плавления льда объёмом V_x потребуется количество теплоты Q_1:

$$Q_1 = V_x\rho_л\lambda. \quad (3)$$

Такое же количество теплоты отдаст льду кипяток в процессе остывания:

$$Q_2 = (V_0 + \Delta V)\rho_0 c_0 \Delta t, \quad (4)$$

где $\Delta t = 100$ °C — изменение температуры воды. Поскольку $Q_1 = Q_2$, с учётом (2), (3) и (4) получим:

$$V_x\rho_л\lambda = \left[V_0 + V_x\left(\frac{\rho_0 - \rho_л}{\rho_0}\right)\right]\rho_0 c_0 \Delta t.$$

Отсюда найдём объём V_x:

$$V_x = \frac{V_0\rho_0 c_0\Delta t}{\rho_л\lambda - (\rho_0 - \rho_л)c_0\Delta t}.$$

Искомая масса:

$$m = (V_0 + \Delta V)\rho_0 = V_0\rho_0 \cdot \left(1 - \frac{(\rho_0 - \rho_л)}{\rho_л}\frac{c_0\Delta t}{\lambda}\right)^{-1} \approx 1160 \text{ г}.$$

Критерии оценивания

Найдено тепло, требуемое на плавление льда 2
Найдено тепло, отданное водой льду 2
Найден объём V_x 2
Найдено выражение для m 2
Получен числовой ответ 2

Задача 4. Электроплитка

Обозначим электрические сопротивления спиралей через R_1 и R_2, напряжение в сети — через U. Запишем условия теплового баланса для всех четырёх случаев:

$$\frac{U^2}{R_1} = A(t_1 - t_0), \quad (5)$$

$$\frac{U^2}{R_2} = A(t_2 - t_0), \quad (6)$$

$$\frac{U^2}{R_1 + R_2} = A(t_3 - t_0), \quad (7)$$

$$\frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = A(t_4 - t_0). \quad (8)$$

Здесь t_3 и t_4 — температуры плитки при последовательном и параллельном соединении спиралей, $R_3 = R_1 + R_2$, $R_4 = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ — сопротивления спиралей при последовательном и параллельном соединении, A — некоторый коэффициент пропорциональности.

Разделив почленно (6) на (5), получим:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{200}{160} = \frac{5}{4}.$$

Теперь разделим (6) на (7), тогда:

$$\frac{R_1+R_2}{R_2}=\frac{t_2-t_0}{t_3-t_0}, \qquad \text{или} \qquad 1+\frac{R_1}{R_2}=\frac{200}{t_3-20}, \qquad \text{откуда} \qquad t_3\approx 109\ {}^\circ\text{C}.$$

Таким образом, при последовательном соединении спиралей плитка нагреется всего до $t_3 \approx 109$ °C.

Аналогичным образом найдём температуру t_4 при параллельном соединении спиралей. Для этого разделим почленно (6) на (8):

$$\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{t_2-t_0}{t_4-t_0}, \qquad \text{откуда} \qquad t_4=380\ {}^\circ\text{C}.$$

Критерии оценивания

Записаны четыре условия теплового баланса 4
Найдена температура t_3 3
Найдена температура t_4 3

Задача 5. Электрический мостик

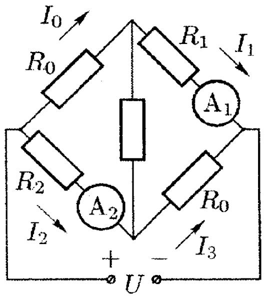


Рис. 19

Запишем закон Ома для участка цепи (рис. 19):

$$I_0R_0+I_1R_1=U=I_2R_2+I_3R_0. \qquad (9)$$

Сила тока, протекающего через источник, равна

$$I_U=I_0+I_2=I_1+I_3. \qquad (10)$$

Преобразуем уравнения (9) и (10):

$$(I_0-I_3)R_0=I_2R_2-I_1R_1, \qquad (11)$$

$$I_0-I_3=I_1-I_2. \qquad (12)$$

Подставим (12) в (11):

$$(I_1-I_2)R_0=I_2R_2-I_1R_1.$$

Из этого уравнения следует:

$$I_2=I_1\left(\frac{R_0+R_1}{R_0+R_2}\right).$$

Критерии оценивания

Записан закон Ома для участка цепи 3
Записано соотношение для I_U 3
Найдено выражение для I_2 4

10 класс

Задача 1. Скольжение груза по доске

1. Обозначим силу натяжения нити через T. Запишем второй закон Ньютона для всех трёх тел:

$$m_1a_1=T-F_{\text{тр}}, \qquad m_2a_2=F_{\text{тр}}, \qquad Ma_1=Mg-T.$$

Здесь a_1 и a_2 — ускорения груза и доски соответственно. Из этих уравнений получим:

$$a_1=\frac{Mg-F_{\text{тр}}}{m_1+M}, \qquad a_2=\frac{F_{\text{тр}}}{m_2}.$$

При движении без проскальзывания $a_1=a_2$:

$$\frac{Mg-F_{\text{тр}}}{m_1+M}=\frac{F_{\text{тр}}}{m_2}, \qquad \text{откуда} \qquad F_{\text{тр}}=\frac{Mm_2}{m_1+m_2+M}g.$$

При этом сила трения по модулю не превышает значения $\mu m_1 g$. Следовательно, для движения без проскальзывания необходимо:

$$F_{\text{тр}}=\frac{Mm_2}{m_1+m_2+M}g\leqslant \mu m_1 g, \qquad \text{откуда} \qquad \mu_{\min}=\frac{Mm_2}{m_1(m_1+m_2+M)}.$$

2. Подставляя числовые значения масс всех грузов, получим:

$$\mu_{\min}=1/2.$$

При $\mu\geqslant\mu_{\min}$ скольжения нет, а при $\mu<\mu_{\min}$ груз будет скользить по доске.

3. Пусть теперь $\mu=\mu_{\min}/2=1/4$, тогда:

$$a_1=\frac{M-m_1\mu}{m_1+M}g, \qquad a_2=\frac{m_1}{m_2}\mu g.$$

Относительное ускорение:

$$a_{\text{отн}}=a_1-a_2=g\left(\frac{M-m_1\mu}{m_1+M}-\frac{m_1}{m_2}\mu\right)=g/4.$$

Время соскальзывания находим из формулы $L=a_{\text{отн}}t^2/2$:

$$t=\sqrt{\frac{2L}{a_{\text{отн}}}}=0{,}9\ \text{с}.$$

Критерии оценивания

Записан второй закон Ньютона для каждого из трёх тел 2
Найдены ускорения груза и доски 1

Определено, при каких $F_{\text{тр}}$ груз проскальзывает 2
Указано значение силы трения при проскальзывании 1
Определён $\mu_{\min}$ 1
Найдены ускорения доски и груза при $\mu = \mu_{\min}/4$ 1
Найдено относительное ускорение 1
Найдено время соскальзывания 1

Задача 2. Диссоциация

Пусть ν — число молей O_2 до диссоциации, α — часть диссоциированных молекул. Число молей молекулярного кислорода O_2 после диссоциации $\nu_2 = (1-\alpha)\nu$, число молей атомарного кислорода O $\nu_1 = 2\alpha\nu$.

Запишем уравнения состояния для молекулярного и атомарного кислорода:

$$p_{O_2}V = \nu_2 RT = (1-\alpha)\nu RT, \qquad p_O V = \nu_1 RT = 2\alpha\nu RT.$$

Согласно закону Дальтона $p = p_{O_2} + p_O$, откуда:

$$pV = (1+\alpha)\nu RT = \frac{m}{\mu_2}RT(1+\alpha).$$

где μ_2 — молярная масса O_2. Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$p = \frac{\rho}{\mu_2}RT(1+\alpha) \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 = \frac{RT_2}{\mu_2}(1+\alpha), \tag{13}$$

где индекс 2 означает, что это соотношение относится ко второму циклу.

Аналогично для первого цикла:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_1 = \frac{RT_1}{\mu_2}. \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) связывают отношение p/ρ с температурой T в любой точке циклов 1 и 2. В частности они справедливы для точек с максимальными температурами на циклах 1 и 2:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{1,\max} = \frac{RT_{1,\max}}{\mu_2}, \qquad \left(\frac{p}{\rho}\right)_{2,\max} = \frac{RT_{2,\max}}{\mu_2}(1+\alpha).$$

Величины $(p/\rho)_{1,\max}$ и $(p/\rho)_{2,\max}$ можно определить по наклону касательных к циклам 1 и 2, проведённых из начала координат (рис. 20). Для определения абсолютных значений этих величин нужно знать значения масштабных коэффициентов ρ_0 и p_0, использованных при построении графиков циклов. Но безразмерное отношение $r_{\max} = \left[(p/\rho)_{2,\max} / (p/\rho)_{1,\max}\right]$ не зависит от масштабных коэффициентов ρ_0 и p_0. Его можно определить, проведя касательные к циклам 1 и 2 с минимальным наклоном к оси абсцисс. По графику:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{2,\max} = 2{,}4, \qquad \left(\frac{p}{\rho}\right)_{1,\max} = 0{,}4, \qquad \text{то есть} \qquad r_{\max} = 6.$$

Следовательно:

$$\frac{T_{2,\max}}{T_{1,\max}}(1+\alpha) = k(1+\alpha) = 6, \qquad \text{отсюда} \qquad \alpha = 0{,}2.$$

Определим теперь отношение $T_{2,\min}/T_{1,\min}$. Для этого нужно провести касательные к циклам 1 и 2 с максимальным наклоном к оси абсцисс. По графикам циклов находим:

$$r_{\min} = 11, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{T_{2,\min}}{T_{1,\min}} = \frac{11}{1+\alpha} \approx 9{,}2.$$

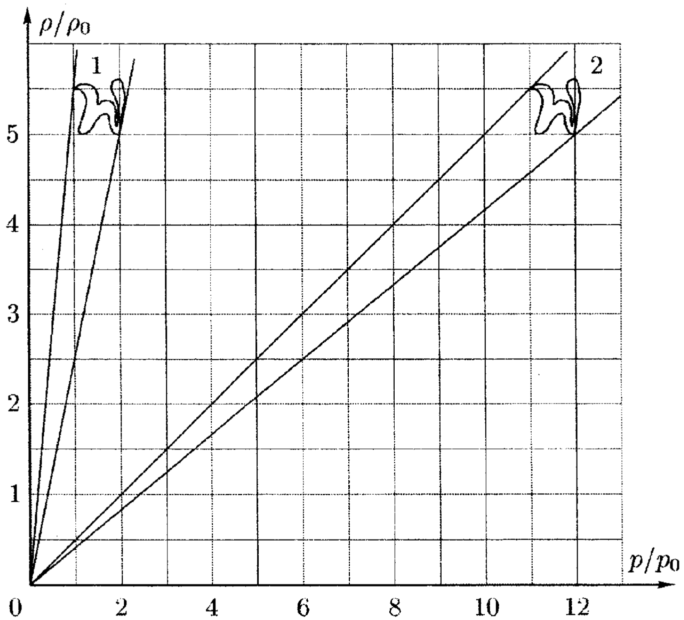


Рис. 20

Критерии оценивания

Приведены выражения для ν_1 и ν_2 через α и ν 2
Найдено выражение для $(p/\rho)_2$ 1
Найдено выражение для $(p/\rho)_1$ 1
Описан способ нахождения $r_{\max}$ по графику 3
Найдено численное значение для $r_{\max}$ 1
Определена степень диссоциации α 1
Найдено отношение $T_{2,\min}/T_{1,\min}$ 1

Задача 3. Шайба на наклонной плоскости

При отсутствии трения время возврата:

$$t_0 = \frac{2v_0}{g\sin\alpha}.$$

При наличии сухого трения шайба скользит вверх по наклонной плоскости с отрицательным ускорением, равным по модулю:

$$a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Время t_1 подъёма шайбы до остановки:

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

При этом шайба до остановки пройдёт путь:

$$S = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = t_1\left(v_0 - \frac{v_0}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

После остановки в верхней точке шайба начнёт скользить вниз по наклонной плоскости при условии $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. В этом случае ускорение шайбы:

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Время t_2 спуска найдём по формуле $t_2^2 = \dfrac{2S}{a_2}$:

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}.$$

Время t_μ возврата шайбы:

$$t_\mu = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}\right)$$

Введём обозначение:

$$x = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Тогда выражение для t_μ можно преобразовать к виду:

$$t_\mu = \frac{v_0}{g\sin\alpha}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

При $x \to 1$ $t_\mu \to \infty$. Найдём условие, при котором $t_\mu = t_0$.

Приравняв $t_\mu = t_0$, получим:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2.$$

Это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + 2x, \qquad \text{откуда} \qquad x - 2x^3 = 0.$$

Так как $x \geqslant 0$, то корнями этого уравнения являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Первое значение соответствует движению без трения, а для второго решения $\mu_0 = \operatorname{tg}\alpha/\sqrt{2}$. При $\mu > \mu_0$ время возврата $t_\mu > t_0$.

Критерии оценивания

Найдено время t_0 1
Определено, при каких μ шайба вернётся назад 1
Определено время t_μ возврата при наличии трения 4
Найден μ, при котором $t_\mu = t_0$ 4

Задача 4. Варистор

1. Пусть сила тока $I = I_0$. Обозначим через $I_н$ и $I_в$ силы токов, текущих соответственно через резистор и варистор (рис. 21). Тогда напряжение на варисторе:

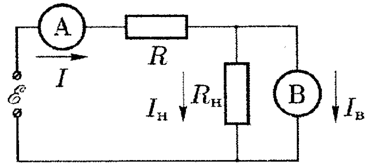


Рис. 21

$$\mathscr{E} - IR = U_в = I_н R_н = (I - I_в)R_н.$$

Отсюда следует, что для определения $I_{в1}$ и $U_{в1}$ на графике ВАХ нужно построить прямую линию $I_в = I - U_в/R_н$, называемую нагрузочной характеристикой. Строим этот линейный график: при $U_в = 0$, $I_в = I = I_0 = 1$ А, а при $I_в = 0$, $U_в = I_0 R_н = 10$ В. Откладываем по осям $I_в = 1$ А, $U_в = 10$ В (рис. 22).

Находим по графику: $I_{в1} \approx 0{,}36$ А, $U_{в1} = U_{н1} \approx 6{,}4$ В.

Из уравнения $\mathscr{E} = U_в + IR$ находим:

$$\mathscr{E}_1 = U_{в1} + I_0 R = 16{,}4 \text{ В}.$$

2. Напряжение источника возросло и стало равным $\mathscr{E}_2 = 2\mathscr{E}_1 = 32{,}8$ В. Найдём связь $U_в$ и $I_н$:

$$\mathscr{E}_2 - IR = \mathscr{E}_2 - (I_н + I_в)R = U_в, \qquad \text{а поскольку} \qquad I_н = \frac{U_в}{R_н},$$

имеем:

$$\mathscr{E}_2 - \frac{U_в}{R_н}R - I_в R = U_в.$$

Получаем уравнение прямой:

$$I_в = \frac{\mathscr{E}_2}{R} - U_в\left(\frac{1}{R_н} + \frac{1}{R}\right).$$

Отложим по осям:

$$I_в = 0, \qquad U_в = \frac{\mathscr{E}_2 R_н}{R_н + R} = 16{,}4 \text{ В},$$

$$U_в = 0, \qquad I_в = \frac{\mathscr{E}_2}{R} \approx 3{,}3 \text{ А}.$$

Построим нагрузочную характеристику и найдём:

$$I_{в2} \approx 1{,}42 \text{ А}, \qquad U_{в2} \approx 9{,}2 \text{ В},$$

$$\Delta U_н = \Delta U_в = U_{в2} - U_{в1} = 2{,}8 \text{ В}, \qquad \text{и} \qquad \Delta I_в = 1{,}42 - 0{,}36 \approx 1{,}1 \text{ А}.$$

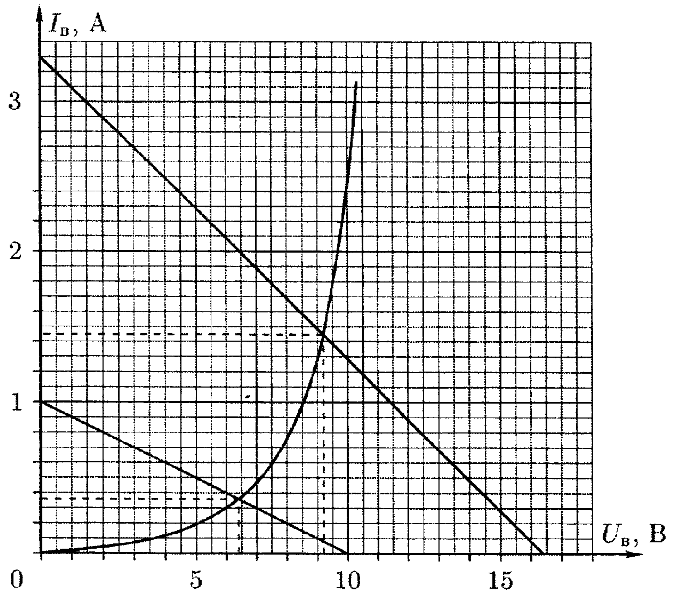


Рис. 22

Критерии оценивания

Найдена нагрузочная характеристика в первом случае 1
Построена нагрузочная характеристика в первом случае 2
Определена $\mathscr{E}_1$ 1
Найдена нагрузочная характеристика во стором случае 2

Построена нагрузочная характеристика во втором случае 2
Определены $\Delta U_н$ и $\Delta I_в$ 2

Задача 5. Цепь с двумя конденсаторами

1. Найдем заряд на конденсаторах:

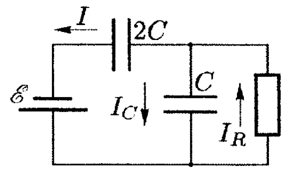


Рис. 23

$$\mathscr{E} = \frac{q}{2C} + \frac{q}{C},$$

откуда $q = 2C\mathscr{E}/3$. Тогда напряжения на конденсаторах:

$$U_C = \frac{2\mathscr{E}}{3}, \qquad U_{2C} = \frac{\mathscr{E}}{3}.$$

2. Пусть сразу после замыкания ключа $К_2$ сила тока через аккумулятор равна I, через конденсатор C — I_C, а через резистор — I_R (рис. 23).

В процессе перезарядки сумма напряжений на конденсаторах в любой момент времени равна $\mathscr{E}$, следовательно:

$$\frac{I_C dt}{C} = \frac{I dt}{2C}.$$

Получаем $I = 2I_C$, откуда:

$$I_R = I + I_C = \frac{3}{2}I = \frac{U_C}{R}.$$

Следовательно, когда сила тока через батарею уменьшится в два раза, новый заряд на C также уменьшится в два раза, то есть:

$$q'_C = \frac{q}{2} = \frac{C\mathscr{E}}{3}.$$

Найдём заряд на $2C$:

$$q'_{2C} = 2C\left(\mathscr{E} - \frac{q'_C}{C}\right) = \frac{4C\mathscr{E}}{3}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$A = Q + (W'_C - W_C) + (W'_{2C} - W_{2C}),$$

где W — энергия конденсатора, $A = \mathscr{E}\Delta q$ — работа аккумулятора.

Получаем:

$$Q = \mathscr{E}(q'_{2C} - q) - \left(\frac{q'^2_C}{2C} - \frac{q^2}{2C}\right) - \left(\frac{q'^2_{2C}}{4C} - \frac{q^2}{4C}\right).$$

Следовательно, $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{R}{L}\left(1-\cos\dfrac{L}{R}\right)$.

При $L/R = \pi/3$ получим, что $\sin\varphi_{\max} = 3/(2\pi) \approx 0{,}48 \approx 0{,}5$. Отсюда $\alpha_{\max} \approx 30^\circ$. Таким образом, точка, в которой натяжение максимально, находится приблизительно в середине цепочки.

Критерии оценивания

Записан второй закон Ньютона для малого элемента	2
Произведено суммирование по всей цепочке	2
Найдено выражение для a_τ	2
Написано условие равенства нулю ΔT	2
Написано выражение для $\sin\varphi_{\max}$	1
Найден $\varphi_{\max}$	1

Задача 2. Движение без проскальзывания

Применим второй закон Ньютона для груза, доски и бруска:

$$T - F_{\text{тр}} = m_1 a_1,$$

$$Mg - T = Ma_1,$$

$$F_{\text{тр}} - kx = m_2 a_2.$$

Здесь T — сила натяжения нити, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, x — удлинение пружины.

Пока $F_{\text{тр}} < \mu m_2 g$, проскальзывания не будет. Искомый путь L найдём из условия $a_1 = a_2$, или иначе:

$$\frac{Mg - \mu m_2 g}{m_1 + M} = \frac{\mu m_2 g - kx}{m_2}.$$

Отсюда:

$$L = \frac{g}{k}\frac{m_2}{m_1+M}\cdot\Big(\mu(m_1+m_2+M) - M\Big).$$

Если:

$$\mu < \frac{M}{m_1+m_2+M} = \mu_{\min},$$

проскальзывание начинается сразу, то есть $L = 0$.

При достаточно большом коэффициенте трения μ система, будучи предоставленная самой себе, начнёт совершать колебательное движение с амплитудой $A = Mg/k$. Максимальное растяжение пружины равно $2A$. Тогда из условия $L_{\max} = 2A$, мы сможем определить минимальный коэффициент трения μ_0, при котором проскальзывания не будет:

$$\mu_0 = \frac{M}{m_2}\frac{2m_1+m_2+2M}{m_1+m_2+M}.$$

Итак, если $\mu > \mu_0$, то $L \to \infty$.

Если:

$$\frac{M}{m_1+m_2+M} < \mu < \mu_0 = \frac{M}{m_2}\frac{2m_1+m_2+2M}{m_1+m_2+M},$$

то:

$$L = \frac{g}{k}\frac{m_2}{m_1+M}\cdot\Big(\mu(m_1+m_2+M) - M\Big).$$

Если:

$$\mu < \mu_{\min} = \frac{M}{m_1+m_2+M}, \quad \text{то} \quad L = 0.$$

Зависимость L от μ изображена на рисунке 25.

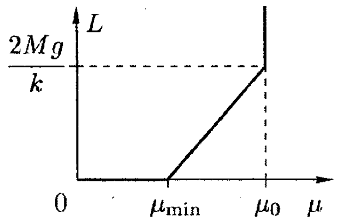


Рис. 25

Теперь вычислим время движения бруска до начала проскальзывания. При этом система движется по гармоническому закону:

$$L = \frac{Mg}{k}(1-\cos\omega t),$$

где $\omega^2 = k/(m_1+m_2+M)$. Отсюда получим, что:

$$t = \sqrt{\frac{m_1+m_2+M}{k}}\cdot\arccos\left(1 - \frac{kL}{Mg}\right) \quad \text{при} \quad \mu \leqslant \mu_0,$$

а при $\mu > \mu_0$ проскальзывание никогда не начнётся.

Критерии оценивания

Записан второй закон Ньютона для всех движущихся тел	1
Определён $\mu_{\min}$	2
Определён μ_0	2
Найден характер движения при $\mu > \mu_0$	1
Найден путь при $\mu_{\min} < \mu < \mu_0$	2
Определено время движения бруска	2

Задача 3. Тепловая машина

Рассмотрим работу тепловой машины за время $\Delta t = 1$ с. Запишем выражение для КПД η цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{P}{P+P_2} = \frac{T_1 - T}{T_1}.$$

Здесь P — полезная мощность машины, P_2 — тепловая мощность, передаваемая холодильнику. Из этого выражения следует:

$$P = P_2\frac{T_1 - T}{T}.$$

Согласно условию задачи $P_2 = (Q_2)_{\Delta t = 1\,\text{с}} = \alpha(T - T_2)$.

Из этих соотношений следует:

$$P = \alpha\frac{(T - T_2)(T_1 - T)}{T} = \alpha\left[T_1 + T_2 - \left(T + \frac{T_1T_2}{T}\right)\right].$$

Величина $(T + T_1T_2/T)$ принимает минимальное значение при $T = T_m = \sqrt{T_1T_2} = 489{,}9$ К ≈ 490 К. Следовательно:

$$P_{\max} = \alpha\left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}\right] = \alpha\left[\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right]^2 \approx 120 \text{ кВт},$$

при этом:

$$\eta = \frac{T_1 - T_m}{T_m} = 38{,}7~\%.$$

Критерии оценивания

Получено выражение для P через T_1, T_2 и T 4
Найдена температура, при которой мощность максимальна 3
Найдена максимальная мощность 2
Определено КПД 1

Задача 4. Движение заряженных частиц

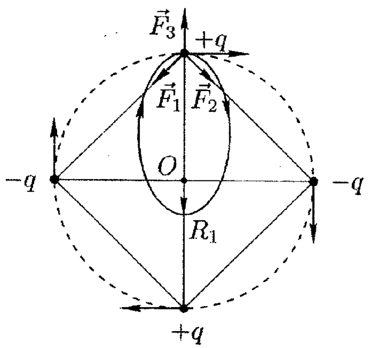


Рис. 26

1. Всилу симметрии все материальные точки будут двигаться по одинаковым траекториям, оставаясь в каждый момент времени на окружности некоторого переменного радиуса $r(t)$ в вершинах квадрата со сторонами, равными $a = \sqrt{2}r(t)$.

Рассмотрим одну из материальных точек. На неё действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ со стороны остальных частиц (рис. 26). По закону Кулона модули этих сил:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r^2}, \qquad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4r^2}.$$

Результирующая сила всегда направлена к центру (точка O), а её модуль равен:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2r^2}\sqrt{2} - \frac{q^2}{4r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}\right).$$

Отсюда следует, что каждая из материальных точек движется так, как если бы из центра её притягивал заряд, противоположный по знаку и по абсолютной величине равный

$$Q = q\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}\right)}.$$

Формула для $F(r)$ аналогична закону Кулона (или закону всемирного тяготения), так как $F(r) \sim 1/r^2$. Поэтому траектории точек — эллипсы с большой осью $R_0 + R_1$. Точка O находится в одном из фокусов этих эллипсов.

2. Характерное время — период T обращения по эллиптической орбите. Он может быть найден из третьего закона Кеплера.

Найдём сначала период T_0 обращения точечной массы m, движущейся под действием силы $F(r)$ по круговой орбите радиуса R_0:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0}, \qquad \frac{mv_0^2}{R_0} = F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}\right).$$

Из этих соотношений следует:

$$v_0 = q\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\sqrt{2} - 1}{4mR_0}}.$$

Такая скорость должна быть сообщена материальным точкам, чтобы они двигались по окружности радиуса R_0. Тогда:

$$T_0 = \frac{2\pi}{q}\sqrt{4\pi\varepsilon_0\frac{4mR_0^3}{2\sqrt{2} - 1}}.$$

По третьему закону Кеплера:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0 + R_1}{2R_0}\right)^3, \qquad \text{откуда} \qquad T = T_0\left(\frac{R_0 + R_1}{2R_0}\right)^{3/2}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для T_0, получим:

$$T = \frac{2\pi}{q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0\frac{m(R_0 + R_1)^3}{2\sqrt{2} - 1}}.$$

Критерии оценивания

Сделан вывод о характере движения точек 1
Определены силы, действующие на каждую точку 1
Найдено выражение для $F(r)$ 1
Определён эффективный заряд Q 1
Объяснено, почему точки движутся по эллипсу 1
Использован третий закон Кеплера 1
Записано уравнение движения точечной массы 1
Определён период T_0 2
Найдено выражение для T 1

Задача 5. Униполярный индуктор

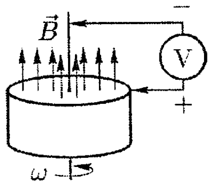


Рис. 27

1. На свободные электроны в проводящем слое при вращении диска действует сила Лоренца $F_л = evB$, где $e < 0$ — заряд электрона, $v = \omega r$ — линейная скорость. При указанных на рисунке 27 направлениях магнитного поля и вращения диска сила Лоренца направлена к центру диска. В результате возникает перераспределение зарядов: электроны будут перемещаться к центру, а на боковой поверхности образуется нескомпенсированный положительный заряд. Это приведёт к возникновению электрического поля $\vec{E}$, направленного по радиусу к центру. Равновесие наступит, когда в каждой точке проводящего слоя кулоновская сила скомпенсирует силу Лоренца:

$$eE = evB = e\omega rB, \qquad \text{то есть} \qquad E = vB.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между боковой поверхностью диска ($r = r_0$) и его центром ($r = 0$) равна

$$\Delta\varphi = \int\limits_0^r E dr = \frac{1}{2}\omega r_0^2 B.$$

Эта разность потенциалов и будет измерена вольтметром:

$$V = \Delta\varphi = \frac{1}{2}\omega r_0^2 B = \pi\nu r_0^2 B = 62{,}8 \cdot \text{мВ},$$

причём минус — в центре диска, а плюс — на боковой поверхности.

2. Диск разгоняется моментом силы Ампера, возникающей в результате взаимодействия радиально направленного тока с магнитным полем диска. В соответствии с правилом левой руки диск будет вращаться так же, как и на рисунке 27 — против часовой стрелки, если смотреть сверху. Разгон диска прекратится, когда сила тока станет равной нулю, то есть когда разность потенциалов $\Delta\varphi$, обусловленная действием силы Лоренца (смотри пункт 1), станет равной ЭДС батарейки:

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}, \qquad \text{или} \qquad \pi\nu_{пред} r_0^2 B = \mathcal{E},$$

откуда $\nu_{пред} = \mathcal{E}/(\pi r_0^2 B) = 7{,}2 \cdot 10^4$ об/мин.

Критерии оценивания

Объяснена причина возникновения разности потенциалов 1
Записано условие равновесия 2
Определена $\Delta\varphi$ 2
Получено численное значение для V 1
Объяснена причина вращения диска 1
Записано условие прекращения разгона диска 2
Получено численное значение для $\nu_{пред}$ 1

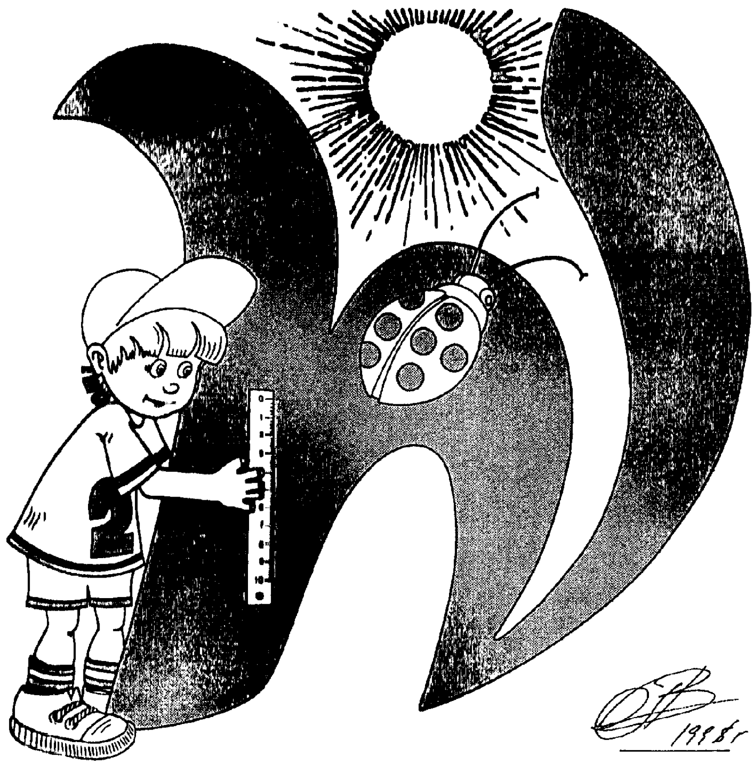
**Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников**

XLIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Белгород, 2010 г.