

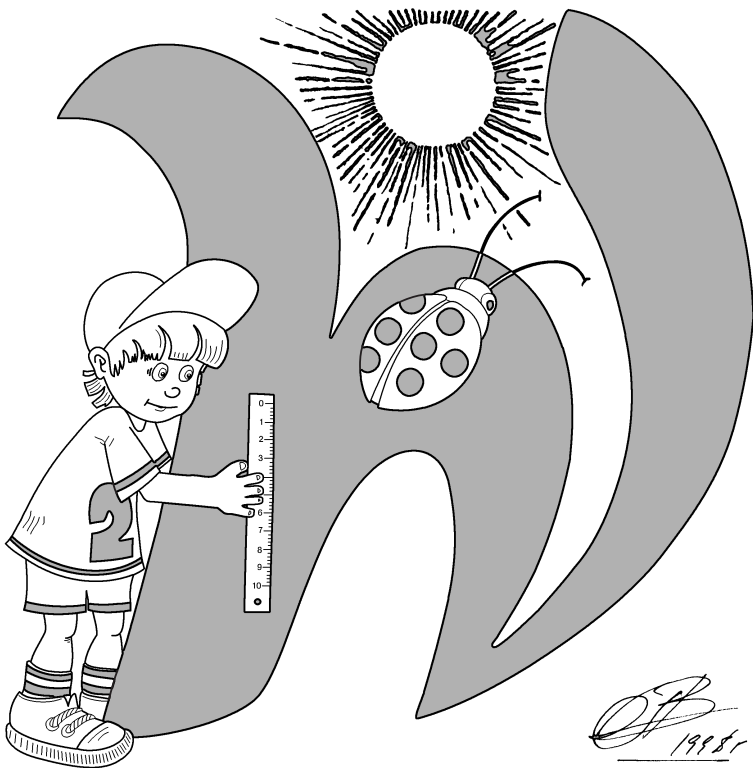
Федеральное агентство по образованию  
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

## XI Всероссийская олимпиада школьников по физике

### Заключительный этап

#### Теоретический тур

#### Методическое пособие



Снежинск, 2006 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике  
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников  
Министерства образования и науки Российской Федерации  
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.  
E-mail: [fizolimp@mail.ru](mailto:fizolimp@mail.ru) (с припиской **antispam** к теме письма)

### Авторы задач

#### 9 класс

1. Грибов В.
2. Слободянин В.
3. Шведов О.
4. Соболев М.

#### 10 класс

1. Мельниковский Л.
2. Воробьев И.
3. Слободянин В.
4. Воробьев И.
5. Козел С.

#### 11 класс

1. Чудновский А.
2. Бутиков Е.
3. Козел С.
4. Огарков М.
5. Козел С.

Общая редакция — Козел С.

Оформление и верстка — Гусихин П.

При подготовке оригинал-макета  
использовалась издательская система L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.  
© Авторский коллектив  
Подписано в печать 21 июня 2006 г. в 17:58.

141700, Московская область, г. Долгопрудный  
Московский физико-технический институт

9 класс

**Задача 1. Максимальная амплитуда**

Брусok массой  $M$ , покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из груза массой  $m$  и лёгкой длинной пружины, связаны лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный неподвижный блок (рис. 1). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола  $\mu = 0,3$ . Отношение массы бруска к массе груза  $M/m = 8$ . Груз совершает вертикальные колебания с периодом  $T = 0,5$  с. Какова максимально возможная амплитуда  $A_m$  таких колебаний, при которых они остаются гармоническими?

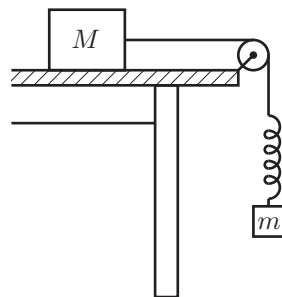


Рис. 1

**Задача 2. Курсирующий катер**

По реке, скорость течения которой  $u$ , навстречу друг другу плывут два однопалубных теплохода. В некоторый момент времени, когда один из теплоходов проплывал мимо пункта  $A$ , а другой — мимо пункта  $B$ , из  $A$  в  $B$  отплыл быстрходный катер, который стал курсировать между теплоходами вплоть до их встречи. Какой путь  $L_x$  относительно берега реки проплыл катер? Расстояние от  $A$  до  $B$  вдоль фарватера реки  $L$ . В стоячей воде скорость теплоходов равна  $v$ , а катера  $V$ . Пункт  $A$  находится выше пункта  $B$  по течению реки. Как изменится ответ, если катер стартует из пункта  $B$ ?

**Задача 3. Терморезистор**

На дне калориметра закреплён тонкий плоский нагревательный элемент, а на некотором уровне над ним — терморезистор, сопротивление  $R$  которого зависит от температуры  $t$ , выраженной в  $^{\circ}\text{C}$ , по закону  $R = R_0(1 + \alpha t)$ , где  $R_0$  и  $\alpha$  не зависят от температуры. Параметр  $\alpha$  называется температурным коэффициентом сопротивления. В калориметре находится лёд. Его удельная теплота плавления  $\lambda = 340$  кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг  $\cdot$   $^{\circ}\text{C}$ ). Если через нагревательный элемент пустить ток силой  $I_0$ , сопротивление  $R$  будет изменяться со временем так, как показано на графике (рис. 2). Найдите  $\alpha$ . Изобразите график зависимости  $R(\tau)$ , если бы через терморезистор пропускали ток силой  $I = 1,41I_0$ .

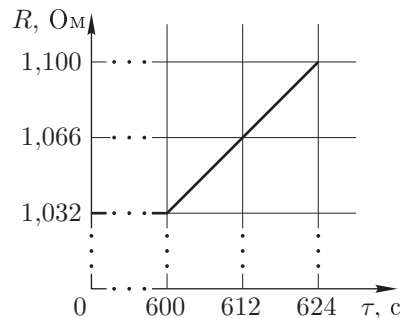


Рис. 2

**Задача 4. Цепь с двумя ключами**

На рисунке 3 изображена цепь, содержащая идеальный амперметр  $A$ , резисторы сопротивлением  $R$  и  $2R$ , ключи  $K_1$  и  $K_2$ . Цепь подключена к источнику постоянного напряжения  $U$ . Какую силу тока будет показывать амперметр при различных комбинациях ключей  $K_1$  и  $K_2$  (замкнуто — разомкнуто)? Какими будут направления тока на участке  $BD$  в различных случаях? В каком случае показания амперметра окажутся максимальными?

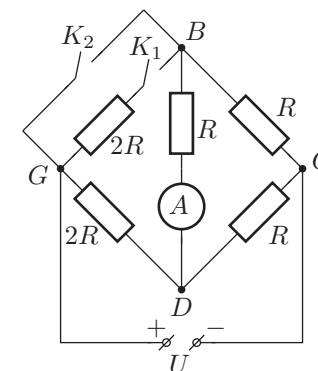


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Эшелон

На горизонтальном столе один на другом лежат  $N = 42$  длинных бруска массами  $m, 2m, 3m, \dots, 42m$  (рис. 4). Они смазаны вязким маслом, так что сила трения между брусками и между нижним бруском и столом пропорциональна относительной скорости  $u$  соприкасающихся брусков:  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha\vec{u}$ , где  $\alpha$  — некоторая константа. Сначала все бруски неподвижны, затем верхнему бруску сообщают горизонтальную скорость  $\vec{v}$ . Определите смещение  $n$ -го бруска относительно  $(n + 1)$ -го бруска после остановки брусков. Какой вид примет стопа брусков после остановки?

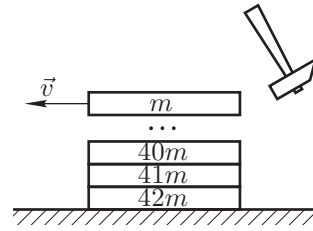


Рис. 4

Задача 2. Неустойчивое равновесие

В горизонтальном колене запаянной теплоизолированной П-образной трубки небольшого постоянного поперечного сечения  $S$  с длиной колена  $L$  расположена жидкость плотностью  $\rho$ . Теплоёмкость всей жидкости в трубке равна  $C$  (рис. 5). В вертикальных коленах находится по  $\nu$  молей гелия под давлением  $p_0$ . Из-за слабого толчка равновесие нарушилось. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, найдите расстояние  $x$ , на которое сместится столбик жидкости к моменту установления термодинамического равновесия. Поперечное сечение трубки столь мало, что пузырьки газа не «пробулькивают» сквозь жидкость, сместившуюся в вертикальное колено.

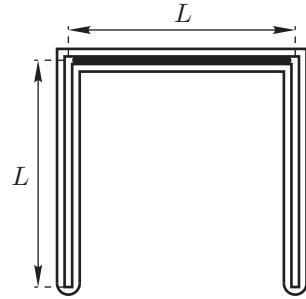


Рис. 5

Задача 3. Наибольший КПД

Рассмотрите два цикла (рис. 6), совершаемых над идеальным газом. В первом из них газ адиабатически сжимают из состояния 1 до состояния 2, затем изотермически расширяют до состояния 3 и наконец изохорически возвращают в исходное состояние 1. КПД такого цикла обозначим  $\eta_V$ . Во втором цикле газ адиабатически сжимают из состояния 1 до состояния 2, затем изотермически расширяют до состояния 4 и наконец изобарически возвращают в исходное состояние 1. КПД такого цикла обозначим  $\eta_p$ . Сравните  $\eta_V$  и  $\eta_p$ .

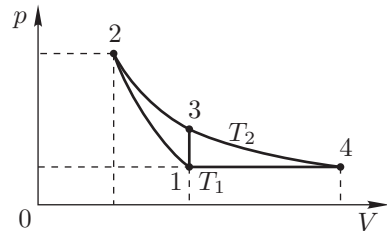


Рис. 6

*Примечание.* В адиабатическом процессе  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = C_p/C_V$ . При изотермическом расширении идеального газа от объёма  $V_a$  до объёма  $V_b$  им совершается работа  $A_{ab} = \nu RT \ln(V_b/V_a)$ .

Задача 4. Притяжение одноимённых зарядов

Распространено мнение, что тела с одноимёнными зарядами всегда отталкиваются друг от друга. Вовсе нет! Такой эффект наблюдается далеко не всегда. Представьте себе, что сплошной металлический шар радиуса  $R$  распилили пополам, а получившиеся половины сблизили плоскими сторонами так, что зазор  $d$  между ними оказался предельно мал ( $d \ll R$ ). Найдите силу электростатического взаимодействия полушарий с одноимёнными зарядами  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 7). При каком отношении зарядов они будут притягиваться?

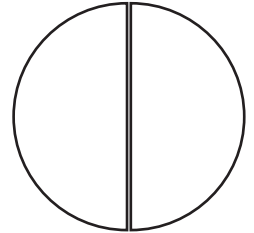


Рис. 7

*Примечание.* Сила, действующая на единицу поверхности заряженного проводника произвольной формы, связана с напряжённостью электрического поля вблизи поверхности тем же соотношением, что и в плоском конденсаторе.

Задача 5. Полубесконечная цепочка

На рисунке 8 изображена полубесконечная цепочка, состоящая из одинаковых источников постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 1,2$  В и внутренним сопротивлением  $r = 2,0$  Ом. К входным клеммам цепочки с помощью перекидного ключа  $K$  могут быть подключены либо идеальный вольтметр  $V$ , либо идеальный амперметр  $A$ . Определите показания этих приборов.

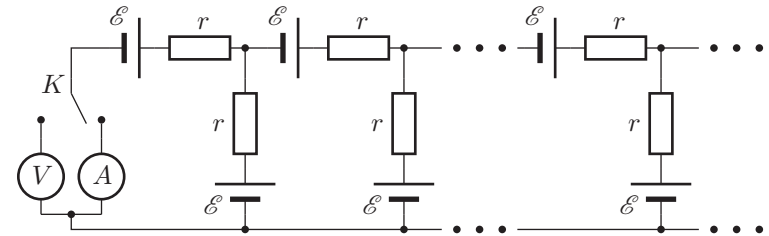


Рис. 8

11 класс

**Задача 1. Разорвавшийся снаряд**

Пушечный снаряд массой  $M = 100$  кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами  $p_1 = 3,6 \cdot 10^4$  кг · м/с и  $p_2 = 2,4 \cdot 10^4$  кг · м/с. Импульсы осколков направлены под углом  $\alpha = 60^\circ$  друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной. Найдите эту энергию.

**Задача 2. Шайба на привязи**

Круглый вертикальный цилиндр радиусом  $R$  прикреплён к горизонтальной плоскости (рис. 9). Внизу с боковой поверхности цилиндра соединена нерастяжимая нить длиной  $L$ , направленная по касательной к поверхности цилиндра.

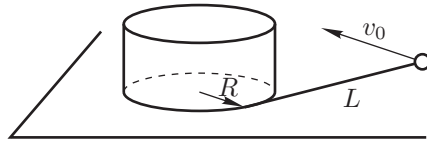


Рис. 9

На другом конце нити закреплена маленькая шайба. Шайбе сообщают горизонтальную скорость  $v_0$ , направленную перпендикулярно нити, и шайба начинает скользить по плоскости.

1. Сколько времени будет продолжаться движение шайбы (наматывание нити на цилиндр) в отсутствие трения?
2. Сколько времени будет продолжаться движение шайбы при наличии трения между шайбой и плоскостью? Коэффициент трения равен  $\mu$ .

**Задача 3. Два термодинамических процесса**

На рисунке 10 изображена система, состоящая из баллона объёмом  $V_0 = 0,2$  м<sup>3</sup> и цилиндра с поршнем. Начальный объём баллона и цилиндра  $V_1 = kV_0$ , где  $k = 2,72$ . В системе находится воздух под давлением  $p_0 = 10^5$  Па и при температуре  $T_0 = 300$  К, равной температуре наружного воздуха. Передвигая поршень, весь воздух из цилиндра закачивают в баллон. Определите количество теплоты, которое передаётся окружающей среде в следующих двух случаях.

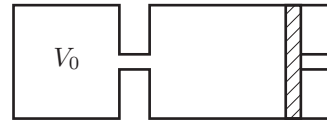


Рис. 10

1. Поршень передвигается медленно, так что в каждый момент времени вся система находится в тепловом равновесии с окружающей средой.
2. Поршень передвигается достаточно быстро, так что за время его перемещения можно пренебречь теплообменом с окружающей средой, но воздух внутри системы в каждый момент времени находится в равновесном состоянии. После завершения процесса перекачки температура воздуха в баллоне постепенно сравнивается с температурой окружающего воздуха.

*Примечание.* Адиабатический процесс описывается уравнением  $pV^\gamma = \text{const}$ , где параметр  $\gamma = C_p/C_V$ .

**Задача 4. Исследование конденсатора**

Для определения ёмкости  $C_2$  и сопротивления утечки  $r_2$  конденсатора собрана мостовая схема (рис. 11), которая сбалансирована при подключении гармонического переменного напряжения. Оказалось, что баланс моста не нарушается при любом изменении частоты напряжения. Чему равны параметры  $C_2$  и  $r_2$ , если известно, что  $r_1 = 2500$  Ом,  $r_3 = 10$  Ом,  $L_3 = 1$  Гн,  $r_4 = 800$  Ом. Гальванометр измеряет действующее значение силы тока.

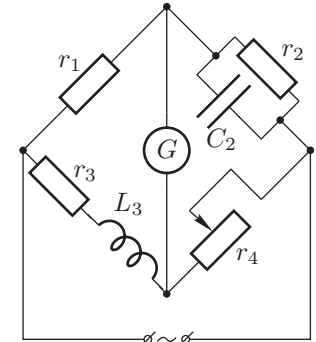


Рис. 11

**Задача 5. У торца соленоида**

У торца вертикально расположенного длинного соленоида на тонком немагнитном листе лежит соосно с соленоидом круглое тонкое кольцо из сверхпроводника (рис. 12). В начальном состоянии сила тока в витках соленоида и сила тока в кольце равны нулю. При протекании тока по виткам соленоида вблизи торца возникает неоднородное магнитное поле. Вертикальную  $B_z$  и радиальную  $B_r$  составляющие вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  можно в некоторой ближней области задать с помощью соотношений  $B_z \approx B_0(1 - \alpha z)$ ,  $B_r \approx B_0\beta r$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые константы, а  $B_0$  определяется силой тока в соленоиде. По виткам соленоида начинают пропускать ток силой  $I$ , постепенно увеличивая его значение. Определите:

1. критическое значение силы тока  $I_0$  в соленоиде, при котором кольцо начинает подниматься над опорой;
2. высоту кольца над опорой при  $I = 2I_0$ ;
3. частоту малых колебаний колебаний сверхпроводящего кольца при  $I = 2I_0$ .

Числовые данные:  $\alpha = 36$  м<sup>-1</sup>,  $\beta = 18$  м<sup>-1</sup>, масса кольца  $m = 100$  мг, коэффициент самоиндукции кольца  $L = 1,8 \cdot 10^{-8}$  Гн, площадь кольца  $S = 1$  см<sup>2</sup>, магнитная постоянная  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м, плотность катушки соленоида  $n = 10^3$  м<sup>-1</sup>.

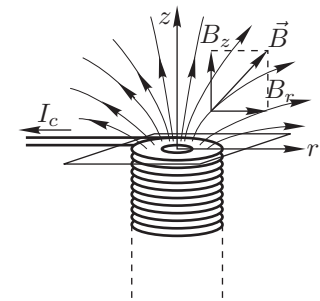


Рис. 12

## Возможные решения

### 9 класс

#### Задача 1. Максимальная амплитуда

Из условия равновесия маятника  $kx_0 = mg$ , где  $k$  — жёсткость пружины, находим её удлинение при равновесии  $x_0 = mg/k$ . Из формулы для периода гармонических колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{выражаем} \quad \frac{m}{k} = \frac{T^2}{4\pi^2}, \quad \text{откуда} \quad x_0 = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

Колебания груза остаются гармоническими, если совместно выполнены два условия:

1. в процессе колебаний груза брусок остаётся неподвижным;
2. нить всё время натянута, поэтому груз нигде не переходит в режим свободного падения.

Из первого условия следует, что в крайнем нижнем положении груза, когда удлинение пружины  $x_1 = x_0 + A$ , сила натяжения нити, равная по модулю упругой силе пружины, недостаточна для того, чтобы сдвинуть брусок:

$$kx_1 = kx_0 + kA \leq mg + kA_1 = \mu Mg,$$

откуда

$$A \leq A_1 = \left(\mu \frac{M}{m} - 1\right) g \frac{T^2}{4\pi^2} = 8,8 \text{ см.}$$

Из второго условия следует, что в крайнем верхнем положении груза, когда удлинение пружины  $x_1 = x_0 - A$ , нить не провисает, откуда

$$A \leq A_2 = x_0 = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6,3 \text{ см.}$$

Второе условие более сильное, следовательно,

$$A_m = 6,3 \text{ см.}$$

#### Задача 2. Курсирующий катер

Средняя скорость катера  $v_{\text{ср}}$  на участке реки от одного теплохода до другого и обратно — величина постоянная. Поэтому искомый путь, пройденный катером, равен произведению этой скорости на общее время его курсирования:  $t_0 = L/2v$ . Найдём  $v_{\text{ср}}$ . Время, затраченное катером на путь до первой встречи с теплоходом  $B$ , равно

$$t_1 = \frac{L}{v+V}.$$

Пусть катер стартует по течению реки, тогда за время  $t_1$  он преодолет расстояние

$$L_1 = t_1(V+u) = L \frac{V+u}{v+V},$$

а вышедший вместе с ним теплоход  $A$  проплыл расстояние

$$L_T = t_1(v+u) = L \frac{v+u}{v+V}.$$

Когда катер повернул обратно, расстояние между ним и теплоходом  $A$  составляло

$$L_{KT} = L_1 - L_T = t_1((V+u) - (v+u)) = L \frac{V-v}{v+V}.$$

На путь до встречи с теплоходом  $A$  потребовалось время

$$t_2 = \frac{L_{KT}}{v+V} = L \frac{V-v}{(v+V)^2}.$$

За это время катер покрыл расстояние

$$L_2 = t_2(V-u) = L \frac{(V-u)(V-v)}{(v+V)^2}.$$

Средняя скорость катера

$$v_{\text{ср}} = \frac{L_1 + L_2}{t_1 + t_2} = \frac{V^2 + uv}{V}.$$

Из этой формулы видно, что средняя скорость катера относительно берегов не зависит от расстояния между теплоходами. Отсюда находим искомый путь

$$L_x = v_{\text{ср}} t_0 = L \frac{V^2 + uv}{2vV}.$$

Если бы катер стартовал против течения реки, то во всех формулах следовало бы заменить  $u$  на  $(-u)$ . В этом случае

$$L_x = v_{\text{ср}} t_0 = L \frac{V^2 - uv}{2vV}.$$

### Задача 3. Терморезистор

Горизонтальный участок графика соответствует процессу плавления льда, наклонный — нагреванию воды. Согласно приведённой формуле мы можем записать:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0} \frac{1}{\Delta t}.$$

Отношение

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 0,068$$

для заданного интервала времени  $\Delta\tau = \tau - \tau_{\text{пл}} = 24$  с найдём из графика (здесь  $\tau_{\text{пл}} = 600$  с — время плавления льда,  $\tau = 624$  с — время окончания эксперимента). Произшедшее за это время изменение температуры воды определим из следующих соображений.

Как видно из графика, начальная температура льда равна  $0^\circ\text{C}$ , потому что на начальном участке сопротивление терморезистора, а значит и температура, не меняется. Теплообмен калориметра с окружающей средой отсутствует, так как при нагреве воды сопротивление терморезистора, а значит и температура возрастает со временем по линейному закону. Поэтому

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m, \quad Q_{\text{нагр}} = cm\Delta t.$$

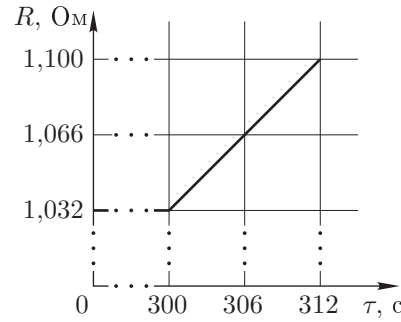


Рис. 13

Поскольку мощность нагревательного элемента постоянна, мы можем записать:

$$P_{\text{пл}} = \frac{Q_{\text{пл}}}{\tau_{\text{пл}}}, \quad P_{\text{нагр}} = \frac{Q_{\text{нагр}}}{\tau - \tau_{\text{пл}}}, \quad P_{\text{пл}} = P_{\text{нагр}}.$$

Из этих формул следует

$$\frac{m\lambda}{\tau_{\text{пл}}} = \frac{mc\Delta t}{\tau - \tau_{\text{пл}}},$$

откуда

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\tau - \tau_{\text{пл}}}{\tau_{\text{пл}}}.$$

Следовательно, искомая величина

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} = \frac{\Delta R}{R_0} \cdot \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\tau_{\text{пл}}}{\tau - \tau_{\text{пл}}} = 0,021^\circ\text{C}^{-1}.$$

При силе тока нагревателя  $I = 1,41I_0$  его мощность возрастает в 2 раза. Следовательно, лёд расплавится за время  $\tau_{\text{пл}2} = 300$  с. Относительное изменение сопротивления терморезистора  $\Delta R/R_0 = 0,068$  произойдёт за время  $\tau_2 = 12$  с. Искомый график представлен на рисунке 13.

### Задача 4. Цепь с двумя ключами

Комбинация 1. Ключ  $K_1$  замкнут,  $K_2$  — разомкнут.

В этом случае в плечо  $GB$  включён резистор  $2R$  и схема симметрична относительно участка  $GC$ . Следовательно  $I_1 = 0$ .

Комбинация 2. Ключи  $K_1$  и  $K_2$  — разомкнуты.

Эквивалентная схема изображена на рисунке 14. Сопротивление участка цепи, обведённого пунктирной линией, найдём из условия

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{2}{3}R.$$

На участке  $DC$  напряжение

$$U_{DC} = \frac{U}{2R + r} = \frac{U}{4}.$$

Показания амперметра

$$I_2 = \frac{U_{DC}}{2R} = \frac{U}{8R}.$$

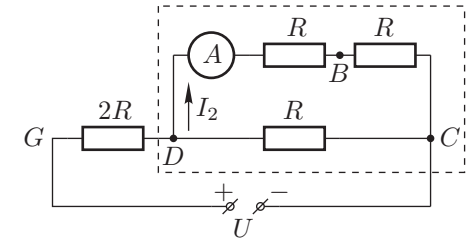


Рис. 14

Направление тока от узла  $D$  к узлу  $B$ .

Комбинация 3. Ключ  $K_2$  — замкнут (положение ключа  $K_1$  — произвольное).

Эквивалентная схема изображена на рисунке 15. Сопротивление участка цепи, обведённого пунктирной линией, равно

$$r = \frac{2}{3}R.$$

На участке  $BD$  напряжение

$$U_{BD} = \frac{U}{R + r} = \frac{2}{5}U.$$

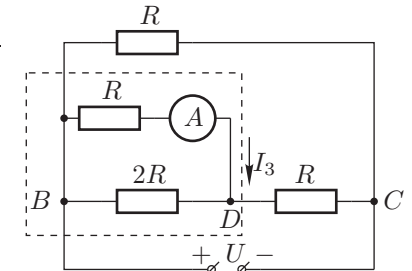


Рис. 15

Показания амперметра

$$I_3 = \frac{U_{BD}}{R} = \frac{2U}{5R}.$$

Направление тока от узла  $B$  к узлу  $D$ . Также легко видеть, что  $I_3 > I_2$ .

10 класс

**Задача 1. Эшелон**

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  верхних брусков (рис. 16). На эту систему в горизонтальном направлении действует только одна сила — сила трения  $F_n$  между  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м брусками:

$$F_n = -\alpha(v_n - v_{n+1}),$$

где  $v_n$  и  $v_{n+1}$  — скорости  $n$ -го и  $(n + 1)$ -го брусков соответственно. Рассмотрим малый промежуток времени  $\Delta t$ . Из закона изменения импульса системы находим изменение импульса системы за время  $\Delta t$

$$\Delta p_n = F_n \Delta t = -\alpha(v_n - v_{n+1})\Delta t = -\alpha(\Delta x_n - \Delta x_{n+1}),$$

где  $\Delta x_n$  и  $\Delta x_{n+1}$  — расстояния, пройденные соответственно  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м брусками за время  $\Delta t$ . Поскольку начальный импульс системы из  $n$  рассматриваемых брусков был  $p = mv$ , то

$$-mv = -\alpha \Delta l_n,$$

где  $\Delta l_n = \Delta x_n - \Delta x_{n+1}$  — сдвиг  $n$ -го бруска относительно  $(n + 1)$ -го после остановки системы. Следовательно,

$$\Delta l_n = \frac{mv}{\alpha},$$

то есть величина  $\Delta l_n$  одинакова для всех  $n$ . Таким образом, после остановки система будет иметь вид «лесенки» с шагом  $\Delta l = mv/\alpha$  (рис. 17).

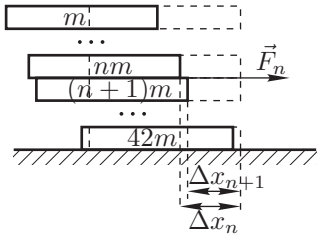


Рис. 16

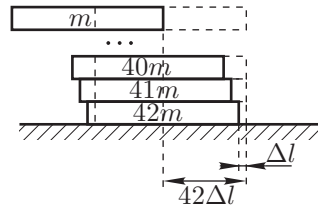


Рис. 17

**Задача 2. Неустойчивое равновесие**

Пусть  $p$  — давление расширившегося газа, тогда давление газа в другом колене  $p_1 = p + \rho g x$ . Поскольку установившаяся температура во всей трубке одинакова, то (рис. 18):

$$p(L + x) = (p + \rho g x)(L - x),$$

или после преобразований:

$$p = \frac{1}{2} \rho g (L - x). \quad (1)$$

Потенциальная энергия части жидкости, перетёкшей в вертикальное колено, перейдёт во внутреннюю энергию гелия и самой этой жидкости:

$$\rho x S g \frac{x}{2} = (2\nu C_V + C) \Delta T. \quad (2)$$

Изменение температуры системы можно найти из уравнения состояния:

$$\nu R \Delta T = p(L + x)S - p_0 L S.$$

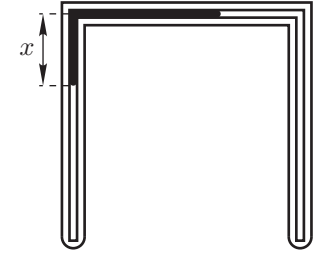


Рис. 18 (3)

Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получим:

$$\rho g S \frac{x^2}{2} = \frac{(2\nu C_V + C) \left( \frac{1}{2} \rho g (L^2 - x^2) - p_0 L \right) S}{\nu R},$$

откуда

$$x = \sqrt{\left( \frac{3\nu R + C}{4\nu R + C} \right) \left( L - \frac{2p_0}{\rho g} \right) L}. \quad (4)$$

*Примечание.* Из (4) видно, что при  $\rho g L < 2p_0$  под корнем будет стоять отрицательное число. Это означает, что исходное положение жидкости в трубке устойчиво.

**Задача 3. Наибольший КПД**

Будем обозначать физические величины, соответствующие определённым состояниям, подстрочными индексами. По определению,

$$\eta_V = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{23}}, \quad \eta_p = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{24}},$$

где  $Q_{31}$  — теплота, выделившаяся на участке 3-1,  $Q_{23}$  — теплота, выделившаяся на участке 2-3,  $Q_{41}$  — теплота, выделившаяся на участке 4-1,  $Q_{24}$  — теплота, выделившаяся на участке 2-4. Здесь

$$Q_{31} = \nu C_V (T_2 - T_1), \quad Q_{23} = A_{23} + U_{23} = \nu R T_2 \ln \left( \frac{V_3}{V_2} \right),$$

где  $A_{23}$  — работа газа на участке 2 — 3,  $U_{23}$  — изменение внутренней энергии газа на участке 2 — 3, причём  $U_{23} = 0$ , так как 2 — 3 — изотерма. С учётом равенства  $V_3 = V_1$ , запишем

$$Q_{23} = \nu R T_2 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right).$$

Теперь воспользуемся уравнением адиабаты:  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ , откуда

$$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma}.$$

После подстановки этого соотношения в выражение для  $Q_{23}$  получим:

$$Q_{23} = \nu RT_2 \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = \nu RT_2 \frac{C_V}{C_p} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta_V = 1 - \frac{C_p(T_2 - T_1)}{RT_2 \ln(p_2/p_1)}. \quad (5)$$

Аналогичным образом находим

$$Q_{41} = \nu C_p(T_2 - T_1), \quad Q_{24} = \nu RT \ln \left( \frac{V_4}{V_2} \right).$$

Точки (2) и (4) лежат на одной изотерме, следовательно  $\nu RT_2 = p_2 V_2 = p_4 V_4$ , откуда

$$\frac{V_4}{V_2} = \frac{p_2}{p_4}.$$

С учётом равенства  $p_4 = p_1$  для  $\eta_p$  окончательно запишем:

$$\eta_p = 1 - \frac{C_p(T_2 - T_1)}{RT_2 \ln(p_2/p_1)}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) видно, что  $\eta_p = \eta_V$ .

#### Задача 4. Притяжение одноимённых зарядов

В пределе при малом зазоре суммарный заряд полушарий  $Q = q_1 + q_2$  равномерно распределён по сферической поверхности. Заряды же на плоских поверхностях полушарий равны  $q$  и  $-q$ , причём

$$q = q_1 - \frac{Q}{2} = \frac{q_1 - q_2}{2}.$$

Можно считать, что эти поверхности образуют плоский конденсатор. В этом приближении напряжённость электрического поля в зазоре между гранями

$$E_C = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot \pi R^2},$$

а вблизи (снаружи) сферической поверхности

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Заметные отклонения напряжённости поля от приведённых выше величин будут наблюдаться только в малой окрестности у краёв плоских поверхностей,

но в пределе «нулевого» зазора они не скажутся на искомой силе взаимодействия.

Поле, создаваемое каждой из плоских поверхностей,

$$E_{C1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2},$$

а сила, с которой они притягиваются,

$$F_C = qE_{C1} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Взаимодействие между зарядами на внешних поверхностях полусфер можно заменить эффективным давлением  $p$ , действующим на них. Сила взаимодействия между зарядами, находящимися на внешних поверхностях полусфер,  $F_R = Sp$ , где  $S = \pi R^2$ , а давление

$$p = \sigma \frac{E_R}{2}.$$

Отсюда

$$F_R = \pi R^2 \left( \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{E_0}{2} \right) = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Результирующая сила

$$F_R = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{Q^2 - (4q)^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{(Q - 4q)(Q + 4q)}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

После подстановки значений  $Q$  и  $q$  окончательно получим

$$F_R = \frac{(3q_2 - q_1)(3q_1 - q_2)}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Притяжение полусфер будет возникать при одноимённых зарядах на них в случае, когда заряды отличаются больше чем втрое.

#### Задача 5. Полубесконечная цепочка

Решение сводится к определению ЭДС  $\mathcal{E}_0$  эквивалентной батареи и её внутреннего сопротивления  $r_0$ . Тогда показания вольтметра  $U = \mathcal{E}_0$ , показания амперметра  $I_0 = \mathcal{E}_0/r_0$  (короткое замыкание).

1. Пусть сначала к цепочке подсоединён вольтметр  $V$ . Заменим полубесконечную цепочку, начиная со второго звена, эквивалентной батареей (рис. 19).

Через идеальный вольтметр ток не течёт. По закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{r + r_0}.$$

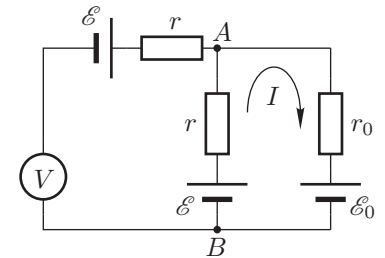


Рис. 19



Показание вольтметра

$$U = \mathcal{E}_0 = U_{AB} - \mathcal{E},$$

где напряжение между точками  $A$  и  $B$

$$U_{AB} = \mathcal{E} - Ir.$$

Следовательно,

$$U = -Ir = -\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{r + r_0} \cdot r = \mathcal{E}_0,$$

откуда

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{r}{r_0}\mathcal{E}. \quad (7)$$

2. Теперь к входу цепочки вместо вольтметра подключим амперметр. Подключение идеального амперметра соответствует короткому замыканию. Пусть  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$  — силы тока в ветвях цепи (рис. 20), тогда

$$U_{AB} = \mathcal{E} + I_0r = \mathcal{E} - I_1r = \mathcal{E}_0 - I_2r_0. \quad (8)$$

По первому правилу Кирхгофа для точки  $A$  имеем:

$$I_0 = I_1 + I_2. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует:

$$I_1 = -I_0, \quad I_2 = 2I_0.$$

Используя (7), запишем (8) в виде:

$$\mathcal{E} + I_0r = -\frac{r}{r_0}\mathcal{E} - 2I_0r_0,$$

$$\text{где } I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} = -\frac{\mathcal{E}r}{r_0^2}.$$

Для определения  $r_0$  получим уравнение:

$$r_0^2 - rr_0 - r^2 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения

$$r_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}r \approx 3,26 \text{ Ом.}$$

Из (7) находим

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{r}{r_0}\mathcal{E} = -\frac{2}{1 + \sqrt{5}}\mathcal{E} \approx -0,74 \text{ В,}$$

откуда

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} \approx -0,23 \text{ А.}$$

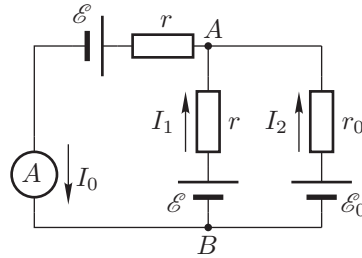


Рис. 20

## 11 класс

### Задача 1. Разорвавшийся снаряд

Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — массы осколков,  $M = m_1 + m_2$  — первоначальная масса снаряда. По закону сохранения импульса

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{или} \quad p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha.$$

Кинетическая энергия до и после взрыва соответственно равны:

$$E_{\text{нач}} = \frac{p_0^2}{2M} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha}{2(m_1 + m_2)}, \quad E_{\text{кон}} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}.$$

Выделившаяся при взрыве кинетическая энергия

$$E = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = \left( \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \right) - \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha}{2(m_1 + m_2)}.$$

После преобразования будем иметь

$$E = \frac{p_1^2 k + p_2^2 \frac{1}{k} - 2p_1p_2 \cos \alpha}{2M}, \quad \text{где } k = \frac{m_2}{m_1}.$$

Для нахождения  $E_{\text{min}}$  приравняем нулю производную:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{2M} \left( p_1^2 - p_2^2 \frac{1}{k^2} \right) = 0.$$

Отсюда

$$k = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{3}.$$

Подставляя найденное значение  $k$  в выражение для  $E$ , получим

$$E_{\text{min}} = \frac{p_1p_2(1 - \cos \alpha)}{M} = 4,32 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

**Задача 2. Шайба на привязи**

1. Пусть нить отклонилась на некоторый малый угол  $d\varphi$  (рис. 21). Тогда свободная часть нити укоротилась на  $dl = R d\varphi$ , шайба прошла путь  $dS = l d\varphi \approx l dl/R$ , а путь, пройденный шайбой до столкновения с цилиндром

$$S = \int_0^L \frac{l dl}{R} = \frac{L^2}{2R}.$$

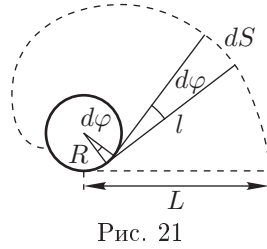


Рис. 21

Поскольку трения нет, то кинетическая энергия шайбы, а значит, и её скорость останется неизменной. Поэтому искомое время

$$t = \frac{L^2}{2Rv_0}.$$

2. При наличии трения шайба движется по дуге с тангенциальным ускорением  $a = -\mu g$ . Двигаясь с таким ускорением, свободная шайба прошла бы путь  $S_1 = v_0^2/\mu g$ . Поэтому здесь возможны два случая:

а. Если  $S \geq S_1$ , или  $v_0 \leq L\sqrt{\mu g/R}$ , то шайба до цилиндра не дойдёт или соприкоснётся с ним без удара. Время её движения в этом случае

$$t_a = \frac{v_0}{\mu g};$$

б. Если  $S \leq S_1$ , то шайба, пройдя путь  $S$ , столкнётся с цилиндром или соприкоснётся с ним без удара. Время движения шайбы найдём из формулы для пути при равнозамедленном движении:

$$S = \frac{L^2}{2R} = v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2} \quad \text{откуда} \quad t^2 - 2\frac{v_0}{\mu g} t + \frac{L^2}{\mu g R} = 0.$$

Квадратное уравнение имеет корни:

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{\mu g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 - \frac{L^2}{\mu g R}}.$$

Искомое время  $t_6$  должно быть меньше времени  $t_a = v_0/\mu g$ , необходимого для полной остановки шайбы. Поэтому

$$t_6 = \frac{v_0}{\mu g} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 - \frac{L^2}{\mu g R}} = \frac{v_0}{\mu g} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g L^2}{v_0^2 R}}\right).$$

При  $S = S_1$  времена  $t_a$  и  $t_6$  одинаковы.

**Задача 3. Два термодинамических процесса**

В обоих случаях конечная температура воздуха в баллоне равна  $T_0$ , следовательно, его внутренние энергии в начальном и конечном состоянии одинаковы. Поэтому окружающей среде в каждом случае будет передано количество теплоты, равное работе внешних сил по перемещению поршня.

Начальное состояние:  $T_0 = 300$  К,  $p_0 = 10^5$  Па,  $V_1 = kV_0 = 0,544$  м<sup>3</sup>,  $C_V = \frac{5}{2}R$ . Конечное состояние:  $T_0 = 300$  К,  $p_1$ ,  $V_0 = 0,2$  м<sup>3</sup>. Показатель адиабаты  $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$ .

Первый случай (квазистатическое перемещение поршня): происходит изотермическое сжатие, следовательно  $pV = \nu RT_0$ , откуда  $p_0 V_1 = p_1 V_0$ . Поскольку внутренняя энергия не меняется, то по первому закону термодинамики количество теплоты, полученное газом,

$$Q_1 = \Delta A_1 = \int_{V_1}^{V_0} p dV = \nu RT_0 \int_{V_1}^{V_0} \frac{dV}{V} = -\nu RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = -0,544 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Знак «-» означает, что тепло отдаётся окружающим телам.

Второй случай (быстрое перемещение поршня): происходит адиабатическое сжатие, следовательно,  $pV^\gamma = \text{const}$ , или  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ . Из уравнения адиабаты  $T_2 V_0^{\gamma-1} = T_0 V_1^{\gamma-1}$  следует, что  $T_2 = T_0 k^{\gamma-1} \approx 447,7$  К. Работа газа при адиабатическом сжатии

$$\Delta A_2 = -\Delta U_2 = -(\nu C_V T_2 - \nu C_V T_0) = -\frac{5}{2} p_0 k V_0 \left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) = -6,69 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия газа возросла. Далее происходит охлаждение газа за счёт теплообмена с окружающей средой. Количество теплоты, переданное внешним телам, равно  $6,69 \cdot 10^4$  Дж.

**Задача 4. Исследование конденсатора**

Условие балансировки моста имеет вид:

$$\frac{r_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{r_4}, \quad (10)$$

$$\text{где } Z_3 = \sqrt{r_3^2 + (L_3\omega)^2}, \quad \frac{1}{Z_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + (C_2\omega)^2}, \quad (11)$$

$\omega$  — круговая частота переменного тока. Подставляя (11) в (10), после арифметических преобразований получим:

$$\left(\frac{r_1 r_4}{r_2}\right)^2 - r_3^2 = \omega^2 (L_3^2 - (C_2 r_1 r_4)^2). \quad (12)$$

По условию равенство (12) справедливо при любой частоте  $\omega$ . Следовательно, (12) эквивалентно системе уравнений:

$$\left(\frac{r_1 r_4}{r_2}\right)^2 - r_3^2 = 0, \quad L_3^2 - (C_2 r_1 r_4)^2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$r_2 = \frac{r_1 r_4}{r_3} = 200 \text{ кОм}, \quad C_2 = \frac{L_3}{r_1 r_4} = 0,5 \text{ мкФ}.$$

**Задача 5. У торца соленоида**

Магнитное поле  $B_0$  (при  $z = 0$ ) у торца длинного соленоида равно половине значения поля магнитной индукции внутри соленоида вдали от торцов

$$B_0 = \frac{1}{2}\mu_0 I_c n.$$

Пусть кольцо расположено на некотором расстоянии  $z$  от торца. Результирующий магнитный поток  $\Phi = B_z S + LI = B_0(1 - \alpha z)S + LI$ , где  $I$  — сила тока в кольце. Сверхпроводящее кольцо сохраняет магнитный поток. Из начальных условий  $\Phi = 0$ . Следовательно,

$$I(z) = -\frac{B_0(1 - \alpha z)S}{L}.$$

Знак «-» указывает на то, что ток в кольце протекает в направлении, противоположном току в витках соленоида. Следовательно, кольцо будет отталкиваться от соленоида. Сила Ампера, действующая на кольцо, направлена вверх:

$$F_z = F_A - mg = |I(z)|B_r 2\pi r_0 - mg = \frac{B_0^2(1 - \alpha z)S^2}{L} 2\beta - mg.$$

Условие равновесия кольца:  $F_z = 0$ , то есть

$$B_0^2(1 - \alpha z) = \frac{mgL}{2\beta S^2}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\mu_0 I_c n\right)^2 (1 - \alpha z) = \frac{mgL}{2\beta S^2}.$$

1. При  $z = 0$  критическое значение индукции магнитного поля равно  $B_0$  и, следовательно,

$$I_c = I_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2\beta}} \frac{2}{S\mu_0 n} = 11,1 \text{ А}.$$

При таком токе кольцо начинает подниматься над опорой.

2. При  $I_c > I_0$  кольцо висит над опорой (левитирует) на некотором расстоянии  $z = z_0$  (без нарушения осевой симметрии). В этом случае

$$(1 - \alpha z_0) = \left(\frac{I_0}{I_c}\right)^2,$$

откуда

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{I_0}{I_c}\right)^2\right).$$

При условии  $I_c = 2I_0$  расстояние

$$z_0 = \frac{3}{4\alpha} = 2,08 \text{ см}.$$

3. В этом случае  $I_c = 2I_0 = \text{const}$ , а магнитная индукция  $B_0 = \mu_0 I_0 n$ . При малом смещении  $\Delta z$  кольца из положения равновесия

$$F_z = \frac{B_0^2(1 - \alpha z_0)S^2}{L} 2\beta - \frac{B_0^2 \alpha \Delta z S^2}{L} 2\beta - mg = -\frac{2\alpha \beta B_0^2 S^2}{L} \Delta z.$$

Таким образом, на кольцо действует квазиупругая сила, коэффициент жёсткости которой равен

$$k = \frac{2\alpha \beta B_0^2 S^2}{L} = \frac{2\alpha \beta (\mu_0 I_0 n)^2 S^2}{L} = 0,14 \text{ Н/м}.$$

Частота колебаний кольца около положения равновесия равна

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 6,0 \text{ Гц}.$$

## Для заметок

# Потенциал

В июне 2006 года выходит семнадцатый номер научно-популярного физико-математического журнала «Потенциал» для старшеклассников и учителей. Журнал ежемесячный.

Учредителями журнала являются заочная физико-техническая школа при МФТИ и издательство «Азбука».

Рубрики журнала:



Приглашаются все желающие  
принять участие в работе журнала.  
Стоимость годовой подписки: 720 руб.

**Координаты для связи с редакцией**

г. Москва, ул. Рабочая, 84  
(095) 768 2548, 787 2494

azbuka@nm.ru  
www.potential.org.ru