Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторский коллектив — Александров Д., Иоголевич И., Кармазин С.,
Козел С., Слободянин В., Шведов О.

Общая редакция — Козел С., Слободянин В.

Техническая редакция, оформление и верстка — Чудновский А., Самокотин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 11 апреля 2005 г. в 15:59.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Три резиновых шнура

Три резиновых шнура связывают вместе и медленно растягивают в разные стороны (рис. 1). В некоторый момент длины всех трех шнуров оказываются равны $L_1 = 20$ см. Затем шнуры растягивают под другими углами (рис. 2). В этом случае равенство длин шнуров наступает при длине $L_2 = 30$ см каждого из них. Известна начальная длина самого длинного шнура в недеформированном состоянии: $l = 15$ см. Найдите длины двух других шнуров и отношение жесткостей шнуров. Считайте, что резиновые шнуры подчиняются закону Гука.

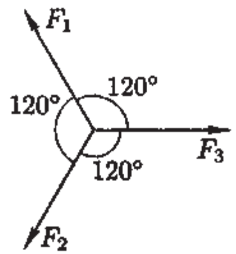

Рис. 1

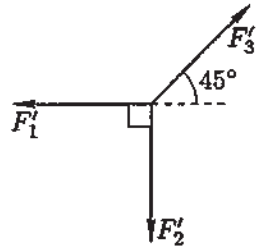

Рис. 2

Задача 2. Средняя скорость поезда

Поезд метро проходит расстояние S между станциями, разгоняясь с ускорением a до середины перегона и тормозя с таким же по модулю ускорением на второй половине пути. В какой момент времени τ от начала движения средняя скорость $\bar{u}$ поезда на пройденном участке пути максимальна? Найдите это максимальное значение $\bar{u}_{\max}$ и расстояние l от начала пути, на котором оно достигается.

Задача 3. «Черный ящик»

Рис. 3

В коробке («черном ящике») с четырьмя выводами находятся четыре одинаковых резистора. С помощью омметра измеряется сопротивление между выводами 1 и 2 (рис. 3). При этих измерениях поочередно соединялись накоротко выводы 1-3, 2-3 и 2-4. Результаты измерений следующие: $R_{13} = 3$ Ом, $R_{23} = 3$ Ом, $R_{24} = 4$ Ом, $R_{00} = 4$ Ом. Индексы указывают, какие выводы «черного ящика» были закорочены при данном измерении. Индекс «00» означает, что никакие два вывода не соединялись накоротко.

Расшифруйте по этим данным схему «черного ящика» и определите сопротивление R резисторов, а также R_{14} и R_{34}.

Задача 4. Удельная теплоемкость свинца

На олимпиаде по физике участникам было предложено выполнить следующий эксперимент. Пенопластовый стакан емкостью V_0, закрытый сверху пенопластовой крышкой, в которою вставлен термометр, заполнялся горячей водой, и, по мере остывания воды, снималась зависимость ее температуры T от времени t. Затем в стакан помещался кусок свинца плотностью $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3 и объемом $V = V_0/2$, стакан доверху заполнялся горячей водой, и вновь снималась зависимость $T(t)$. Аккуратный ученик изобразил оба графика на одном листе миллиметровой бумаги (кривые I и II на рис. 4). Принимая удельную теплоемкость воды равной $c_0 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C), определите по этим экспериментальным кривым удельную теплоемкость c свинца. Плотность воды $\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Теплоемкостью стенок стакана и крышки можно пренебречь. Температуру в комнате, где проводился эксперимент, считайте постоянной.

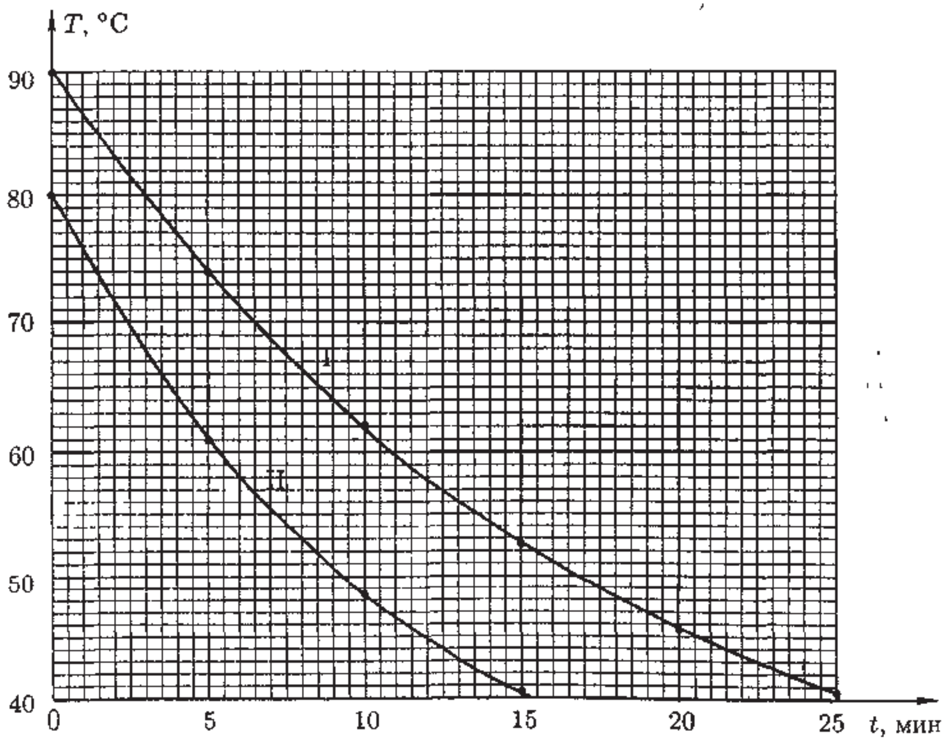

Рис. 4

Необходимые построения можно выполнять на графике в условии. Условие необходимо сдать вместе с решением.

10 класс

Задача 1. Двойная звезда

«Двойная звезда» состоит из двух звезд, находящихся на постоянном расстоянии друг от друга. Космонавт Глюк решил вывести космический корабль на орбиту таким образом, чтобы он находился все время на отрезке, соединяющем звезды, на постоянном расстоянии от каждой из звезд и расходовал при этом минимальное количество топлива. Проведя все расчеты, Глюк нашел, что корабль должен находиться на расстоянии l_1 от первой звезды и l_2 от второй, и успешно вывел корабль на орбиту. Чему равно отношение M_1/M_2 масс звезд?

Задача 2. Неквазистатические процессы

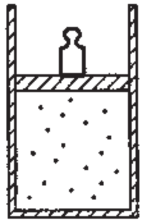

Рис. 5

В цилиндре с теплонепроницаемыми стенками под массивным теплонепроницаемым поршнем находится идеальный одноатомный газ. На поршень поставили гирю, масса которой равна массе поршня (рис. 5). После того как система пришла в новое состояние термодинамического равновесия, гирю быстро сняли и вновь дождались наступления равновесного состояния. Определите, какая температура T газа установится в цилиндре после четырех таких циклов, если первоначальная температура равнялась $T_0 = 300$ К. Считайте, что трение между поршнем и стенками цилиндра пренебрежимо мало. Внешним давлением можно пренебречь.

Задача 3. Теплоемкость системы

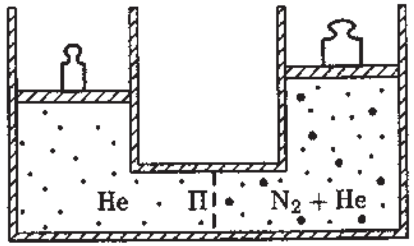

Рис. 6

В сосуде находятся гелий He и азот N_2 в количестве ν_1 и ν_2 соответственно. Сосуд разделен на две части пористой перегородкой П (рис. 6), которая свободно пропускает гелий и не пропускает азот, причем изначально азот был только в правой части. Пренебрегая теплоемкостью стенок сосуда и поршней, найдите теплоемкость системы при нагревании в следующих условиях:

1. при закрепленных поршнях;
2. при свободных поршнях, создающих постоянные давления;
3. при свободном левом поршне, создающем постоянное давление, и закрепленном правом поршне.

Универсальная газовая постоянная R известна.

Задача 4. Периодическая подзарядка конденсатора

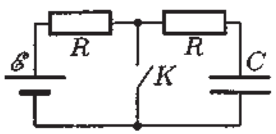

Рис. 7

В цепи (рис. 7) состояние ключа K периодически изменяют: замыкают на время τ, затем размыкают на время 2τ, снова замыкают на время τ и размыкают на время 2τ и так далее. Время τ достаточно мало, так что напряжение на конденсаторе большой емкости C на успевает за это время заметно измениться. После большого количества переключений напряжение на конденсаторе становится практически постоянным, совершая лишь небольшие колебания около своего среднего значения. ЭДС источника $\mathscr{E}$ и сопротивление R каждого из резисторов известны. Найдите в установившемся режиме:

1. среднее значение напряжения U на конденсаторе;
2. среднюю силу тока I, текущего через ключ;
3. отношение средних тепловых мощностей, выделяющихся на резисторах.

Задача 5. Сверхпроводящий соленоид и конденсатор

В некоторый момент сверхпроводящий соленоид объемом $V = 40$ см^3 подключают к высоковольтному конденсатору емкостью $C = 100$ мкФ, заряженному до напряжения $U = 1$ кВ. Известно, что при индукции магнитного поля в соленоиде $B_0 = 1{,}6$ Тл разрушается состояние сверхпроводимости материала, из которого выполнена обмотка соленоида. Определите, произойдет ли разрушение сверхпроводимости в описанном эксперименте. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ единиц СИ.

11 класс

Задача 1. Из области фантастики

Предположим, что в результате какой-то космической катастрофы Луна остановилась в своем орбитальном движении вокруг Земли. Определите, сколько времени τ Луна будет падать на Землю и с какой относительной скоростью v планеты столкнутся. Расстояние от Земли до Луны $L = 3{,}84 \cdot 10^5$ км, радиус Земли $R = 6370$ км. Массу и размер Луны можно считать малыми по сравнению с массой и размером Земли.

Задача 2. Неквазистатические циклические процессы

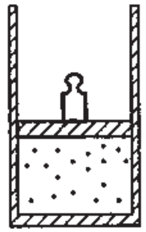
Рис. 8

В состоянии равновесия идеальный двухатомный газ занимает ровно половину объема теплоизолированного сосуда с массивным теплоизолированным поршнем. На поршень поставили гирю (рис. 8). Когда система пришла в новое состояние термодинамического равновесия, оказалось, что давление газа возросло на 25%. Затем гирю быстро сняли и вновь дождались наступления равновесного состояния. Сколько таких циклов n установки и снятия гири можно совершить, пока поршень не вылетит из цилиндра при очередном удалении гири? Считайте, что трение между поршнем и стенками цилиндра пренебрежимо мало. Внешним давлением можно пренебречь.

Задача 3. Газ Клаузиуса

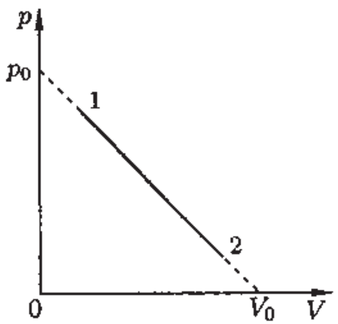

Рис. 9

Разрабатывая кинетическую теорию газов, Клаузиус ввел в уравнение состояния идеального газа (в расчете на 1 моль) поправку b, которая имеет смысл собственного объема молекул газа:

$$p(V - b) = RT.$$

Процесс 1-2 (рис. 9) производится сначала с одним молем идеального газа, а затем с одним молем газа Клаузиуса. Найдите разность ΔT максимальных температур газов в этих опытах, а также укажите, какая из них больше.

Известно, что $p_0 = 1{,}51$ МПа, $b = 44$ см^3/моль $\ll V_0$, $R = 8{,}310$ Дж/(моль$\cdot$К).

Задача 4. Сверхпроводящий соленоид и источник

Сверхпроводящий соленоид длиной $l = 10$ см и площадью поперечного сечения $S = 1{,}6$ см^2 имеет $N = 1000$ витков. В некоторый момент соленоид подключают к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом. Известно, что при индукции магнитного поля $B_0 = 1{,}26$ Тл состояние сверхпроводимости обмотки соленоида разрушается. Определите, перейдет ли в этом эксперименте обмотка соленоида из сверхпроводящего в нормальное состояние и, если да, то через какое время t_0 после подключения, а если нет, то при какой ЭДС $\mathscr{E}$ источника переход бы произошел. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ единиц СИ.

Задача 5. Фотоэффект

Цинковый шарик радиусом $R = 1$ см расположен в вакууме вдали от других тел и заряжен до потенциала $\varphi_0 = -0{,}5$ В (полагая на бесконечности $\varphi = 0$). Шарик осветили монохроматическим ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 290$ нм.

1. С какой максимальной скоростью v_1 вылетают фотоэлектроны из шарика?
2. Какую максимальную скорость v_2 будут иметь на большом расстоянии от шарика фотоэлектроны, вылетевшие из него в начале опыта?
3. Найдите потенциал φ_1 шарика после продолжительного облучения.
4. Какое число N фотоэлектронов покинет шарик при продолжительном облучении ультрафиолетом?

Красная граница фотоэффекта для цинка $\lambda_0 = 332$ нм. Скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Заряд электрона $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Три резиновых шнура

На узелок, связывающий концы шнуров, действуют три силы натяжения шнуров, причем в обоих случаях их сумма равна нулю, следовательно:

$$F_1 = F_2 = F_3, \qquad F_1' = F_2' = \frac{F_3'}{\sqrt{2}}.$$

Самый длинный шнур (в недеформированном состоянии) — третий, так как при равном увеличении деформации его сила натяжения возрастает быстрее, следовательно, именно его длина в недеформированном состоянии равна l. Пусть l_1, l_2, l_3 — начальные длины шнуров, k_1, k_2, k_3 — их жесткости, тогда для первого и второго способа растяжения шнуров запишем соответственно:

$$\begin{cases} k_1(L_1 - l_1) = F_1 = F_2 = k_2(L_1 - l_2), \\ k_1(L_2 - l_1) = F_1' = F_2' = k_2(L_2 - l_2). \end{cases}$$

Поскольку $L_1 \neq L_2$, то

$$l_1 = l_2, \qquad k_1 = k_2$$

Шнуры 1 и 3 получили одинаковое дополнительное растяжение во втором опыте, поэтому:

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{F_3' - F_3}{F_1' - F_1} = \frac{F_3' - F_3}{\frac{1}{\sqrt{2}}F_3' - F_3} = \frac{L_2 - L_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(L_2 - l) - (L_1 - l)} \approx 1{,}78.$$

Из условия

$$k_1(L_1 - l_1) = F_1 = F_3 = k_3(L_1 - l)$$

найдем

$$l_1 = L_1 - \frac{k_3}{k_1}(L_1 - l) \approx 11{,}1 \text{ см}.$$

Задача 2. Средняя скорость поезда

График зависимости координаты x поезда от времени t представлен на рис. 10. Средняя скорость $\bar{u}(t)$ на участке пути, пройденном к моменту времени t, равна угловому коэффициенту $k(t) = x(t)/t$ прямой, проходящей через точку $(t; x(t))$ и начало координат. Из графика видно, что $\bar{u}_{\max}$ соответствует прямой, касающейся кривой $x(t)$ в точке $(\tau; l)$.

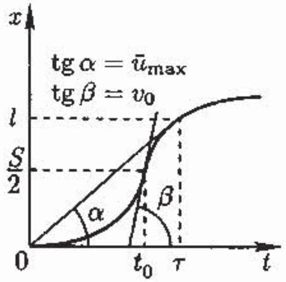

Рис. 10

Поезд проходит расстояние $S/2$ от станции отправления за время $t_0 = \sqrt{S/a}$. Зависимость $x(t)$ для $t > t_0$ имеет вид:

$$x(t) = \frac{S}{2} + at_0(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$x(\tau) = \bar{u}_{\max}\tau. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\frac{1}{2}a\tau^2 + (\bar{u}_{\max} - 2at_0)\tau + \frac{3}{2}at_0^2 - \frac{S}{2} = 0. \qquad (3)$$

Поскольку при $t = \tau$ прямая $x = \bar{u}_{\max}t$ касается графика квадратичной функции $x(t)$, дискриминант (3) должен быть равен нулю:

$$(\bar{u}_{\max} - 2at_0)^2 - 3a^2t_0^2 + aS = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \bar{u}_{\max} = \sqrt{aS}(2 \pm \sqrt{2}).$$

В последней формуле следует оставить только знак «−», поскольку $\bar{u}_{\max}$ не может превышать максимальной за все время движения скорости поезда $v_0 = at_0 = \sqrt{aS}$. Подставив $\bar{u}_{\max}$ в (3), найдем $\tau = \sqrt{2S/a}$. Искомое расстояние $l = \bar{u}_{\max}\tau = 2S(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}83S$.

Задача 3. «Черный ящик»

Заметим, что $R_{24} = R_{00}$. Это означает, что при замыкании накоротко выводов 2 и 4 шунтируется участок цепи, через который ток не течет. Следовательно, вывод 4 может быть соединен через резистор только с выводом 2. Остальные три резистора соединены с выводами 1, 2 и 3 по симметричной схеме. Возможны две схемы «черного ящика». Для первой из них (рис. 11): $R = 6$ Ом, $R_{14} = 2{,}4$ Ом, $R_{34} = 3{,}6$ Ом, а для второй (рис. 12): $R = 2$ Ом, $R_{14} = \frac{4}{3}$ Ом $\approx 1{,}3$ Ом, $R_{34} = \frac{10}{3}$ Ом $\approx 3{,}3$ Ом.

Примечание. За обоснованное указание одной из возможных схем ставится полный балл.

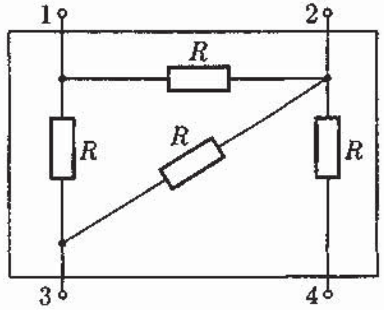

Рис. 11

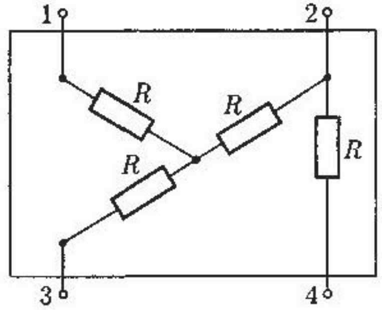

Рис. 12

Задача 4. Удельная теплоемкость свинца

Пусть C_1 и C_2 — теплоемкости содержимого стакана в первом и втором опытах соответственно. Тогда

$$C_1 = c_0\rho_0V_0, \qquad C_2 = c_0\rho_0\frac{V_0}{2} + c\rho\frac{V_0}{2} = c_0\rho_0V_0\frac{1}{2}\left(1 + \frac{c\rho}{c_0\rho_0}\right),$$

откуда

$$c = \left(2\frac{C_2}{C_1} - 1\right)\frac{\rho_0}{\rho}c_0.$$

Мощность теплопотерь в окружающую среду определяется только температурой T содержимого стакана, а наклон касательной к графику зависимости $T(t)$ при некоторой фиксированной температуре T_0 обратно пропорционален теплоемкости. Поэтому отношение C_2/C_1 равно отношению наклонов касательных к кривым I и II, построенных в точках с одинаковой температурой T_0. Например, при $T_0 = 80$ °C из графиков найдем

$$C_2/C_1 = 0{,}67 \pm 0{,}02, \qquad \text{откуда} \qquad c = (0{,}13 \pm 0{,}01) \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг °C}}.$$

10 класс

Задача 1. Двойная звезда

Двойная звезда совершает вращательное движение вокруг центра масс. При этом звезды движутся по окружностям радиусами

$$R_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} l, \qquad R_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} l,$$

где $l = l_1 + l_2$ — расстояние между звездами. Из второго закона Ньютона для движения первой звезды

$$M_1 \omega^2 R_1 = \frac{GM_1M_2}{l^2}$$

найдем угловую скорость вращения системы

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{l^3}.$$

Космический корабль массой m должен двигаться с той же угловой скоростью вокруг центра масс двойной звезды по окружности радиусом

$$r = |R_1 - l_1|. \tag{4}$$

Двигатель корабля может быть выключен, если движение корабля по окружности определяется только суммарной силой тяжести:

$$m\omega^2 r = -\frac{GM_1 m}{l_1^2} + \frac{GM_2 m}{l_2^2}. \tag{5}$$

При выборе знаков в правой части предполагалось, что корабль находится между центром масс системы и первой звездой, то есть $l_1 < R_1$, следовательно:

$$m\omega^2 \left(\frac{M_2 l}{M_1 + M_2} - l_1 \right) = -\frac{GM_1 m}{l_1^2} + \frac{GM_2 m}{l_2^2}. \tag{6}$$

Такое же уравнение получается в случае $l_1 > R_1$, так как изменения знаков правой части (5) и подмодульного выражения в (4) происходят одновременно. Решая (6), находим

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{(l_1 + l_2)^3 - l_2^3}{(l_1 + l_2)^3 - l_1^3} \cdot \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Примечание. Можно показать, что рассмотренная орбита является неустойчивой, поэтому потребуется небольшой расход топлива на ее регулярную корректировку.

Задача 2. Неквазистатические процессы

Процессы, протекающие в цилиндре с газом не являются равновесными, поэтому использовать уравнение Пуассона для адиабаты нельзя. Применим закон сохранения энергии системы «газ-поршень-гиря» к неквазистатическому процессу сжатия газа из состояния (T_1, V_1, p_1) в состояние (T_2, V_2, p_2) под действием установленной гири:

$$\Delta U_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1) + 2mg(h_2 - h_1) = 0, \tag{7}$$

где ν — количество газа, m — масса гири (равная массе поршня), h_1 и h_2 — начальная и конечная вертикальные координаты поршня. Пусть S — площадь сечения поршня, тогда

$$V_1 = Sh_1, \qquad V_2 = Sh_2, \qquad p_1 = \frac{mg}{S}, \qquad p_2 = 2p_1 = \frac{2mg}{S}.$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \qquad p_2 V_2 = \nu R T_2,$$

из (7) получим:

$$\Delta U_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu R T_2 - 2\nu R T_1 = 0,$$

откуда

$$T_2 = \frac{C_V + 2R}{C_V + R} T_1 = \frac{7}{5} T_1.$$

Аналогично, рассмотрим неквазистатический процесс расширения газа в состояние (T_3, V_3, p_3) после снятия гири:

$$\Delta U_{23} = \nu C_V (T_3 - T_2) + mg(h_3 - h_2) = 0.$$

Поскольку $mgh_3 = (mg/S)Sh_3 = p_3 V_3 = \nu R T_3$, то

$$\Delta U_{23} = \nu C_V (T_3 - T_2) + \nu R T_3 - \frac{1}{2} \nu R T_2 = 0,$$

откуда

$$T_3 = \frac{C_V + R/2}{C_V + R} T_1 = \frac{4}{5} T_2 = \frac{28}{25} T_1.$$

После 4 циклов сжатия и расширения установится температура

$$T = \left(\frac{28}{25} \right)^4 T_0 \approx 1{,}57 T_0 \approx 472 \text{ К}.$$

Задача 3. Теплоемкость системы

1. При закрепленных поршнях подводимое тепло идет только на изменение внутренней энергии гелия и азота:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu_1 R\Delta T + \frac{5}{2}\nu_2 R\Delta T,$$

откуда находим теплоемкость

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}\nu_1 + \frac{5}{2}\nu_2\right) R.$$

2. При подвижных поршнях подводимое тепло идет на изменение внутренней энергии и на совершение работы:

$$\Delta Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu_1 R\Delta T + \frac{5}{2}\nu_2 R\Delta T + p_1\Delta V_1 + p_2\Delta V_2,$$

где p_1 и p_2 — давления газа под левым и правым поршнями соответственно, ΔV_1 и ΔV_2 — изменения объемов левой и правой частей сосуда. Заметим, что p_1 и $(p_2 - p_1)$ — парциальные давления гелия и азота. Из уравнений состояния

$$p_1(V_1 + V_2) = \nu_1 RT_1, \qquad (p_2 - p_1)V_2 = \nu_2 RT_2 \qquad (8)$$

выразим работу газов

$$A = p_1\Delta V_1 + p_2\Delta V_2 = p_1\Delta(V_1 + V_2) + (p_2 - p_1)\Delta V_2 = \nu_1 R\Delta T + \nu_2 R\Delta T.$$

Следовательно, теплоемкость процесса

$$C_2 = \left(\frac{5}{2}\nu_1 + \frac{7}{2}\nu_2\right) R.$$

3. При закрепленном правом поршне подводимое тепло идет на изменение внутренней энергии и на работу по перемещению левого поршня:

$$\Delta Q = \Delta U + A' = \frac{3}{2}\nu_1 R\Delta T + \frac{5}{2}\nu_2 R\Delta T + p_1\Delta V_1.$$

Используя, что $\Delta V_2 = 0$, из тех же уравнений (8) выразим работу

$$A = p_1\Delta V_1 = p_1\Delta(V_1 + V_2) = \nu_1 R\Delta T.$$

Следовательно, теплоемкость процесса

$$C_3 = \left(\frac{5}{2}\nu_1 + \frac{5}{2}\nu_2\right) R.$$

Задача 4. Периодическая подзарядка конденсатора

1. При разомкнутом ключе конденсатор заряжается током

$$I_1 = \frac{\mathscr{E} - U}{2R},$$

а при замкнутом ключе — разряжается током

$$I_2 = \frac{U}{R}.$$

В стационарном состоянии количество приходящего заряда $I_1 \cdot 2\tau$ должно равняться количеству уходящего заряда $I_2 \cdot \tau$:

$$\frac{\mathscr{E} - U}{2R} \cdot 2\tau = \frac{U}{R} \cdot \tau, \qquad \text{откуда} \qquad U = \frac{\mathscr{E}}{2}.$$

2. Пока ключ замкнут (в течение времени τ), через него течет ток силой

$$I_K = \frac{\mathscr{E}}{R} + \frac{U}{R} = \frac{3\mathscr{E}}{2R}.$$

Когда ключ разомкнут (в течение времени 2τ), тока нет. Средний ток равен отношению заряда, протекшего за период, к длительности периода:

$$I = \frac{\frac{3\mathscr{E}}{2R} \cdot \tau + 0 \cdot 2\tau}{\tau + 2\tau} = \frac{\mathscr{E}}{2R}.$$

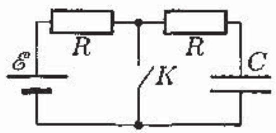

Рис. 13

3. Сила тока через левый резистор (рис. 13) равна

$$I' = \frac{\mathscr{E}}{R},$$

пока ключ замкнут, и

$$I'' = \frac{\mathscr{E} - U}{2R} = \frac{\mathscr{E}}{4R},$$

когда ключ разомкнут. Средняя мощность равна отношению тепла, выделившегося за период, к длительности периода:

$$P_1 = \frac{\left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)^2 R \cdot \tau + \left(\frac{\mathscr{E}}{4R}\right)^2 R \cdot 2\tau}{\tau + 2\tau} = \frac{3\mathscr{E}^2}{8R}.$$

Аналогично, средняя мощность, выделяющаяся на правом резисторе, равна

$$P_2 = \frac{\left(\frac{\mathscr{E}}{2R}\right)^2 R \cdot \tau + \left(\frac{\mathscr{E}}{4R}\right)^2 R \cdot 2\tau}{\tau + 2\tau} = \frac{\mathscr{E}^2}{8R}.$$

Отношение мощностей равно трем.

Задача 5. Сверхпроводящий соленоид и конденсатор

Пусть N — число витков соленоида, l — длина, S — площадь поперечного сечения, тогда индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \frac{S}{l} N^2.$$

Ток в соленоиде достигнет максимума, когда конденсатор разрядится:

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU^2}{2}, \qquad \text{откуда} \qquad I_{\max} = \frac{U}{N}\sqrt{\frac{Cl}{\mu_0 S}}.$$

Индукция магнитного поля в этот момент

$$B_{\max} = \mu_0 \frac{N}{l} I_{\max} = U\sqrt{\frac{\mu_0 C}{Sl}} = U\sqrt{\frac{\mu_0 C}{V}} \approx 1{,}77 \text{ Тл.}$$

Поскольку $B_{\max} > B_0$, то сверхпроводящее состояние разрушится.

11 класс

Задача 1. Из области фантастики

Поскольку масса M Земли велика по сравнению с массой m Луны, то будем считать Землю покоящейся. Падение остановившейся Луны на Землю можно рассматривать как движение по вырожденному эллипсу с большой полуосью $a = L/2$ и периодом обращения $T = 2\tau$. По третьему закону Кеплера

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const}. \tag{9}$$

Гравитационную постоянную G и массу Земли выразим через ускорение свободного падения на поверхности Земли:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \qquad \text{откуда} \qquad GM = gR^2. \tag{10}$$

Из (9) и (10) находим

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{gR^2}} = \frac{\pi L}{2R}\sqrt{\frac{L}{2g}} \approx 4{,}19\cdot 10^5 \text{ с} \approx 4{,}85 \text{ сут.}$$

Из закона сохранения энергии

$$-\frac{GMm}{L} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R},$$

найдем относительную скорость столкновения планет

$$v = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{R}{L}\right)} \approx \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \text{ км/с.}$$

Примечание. Константу в законе Кеплера (9) помнить не обязательно, так как ее легко вывести, рассмотрев частный случай — круговую орбиту.

Задача 2. Неквазистатические циклические процессы

Процессы, протекающие в цилиндре с газом не являются равновесными, поэтому использовать уравнение Пуассона для адиабаты нельзя. Применим закон сохранения энергии системы «газ-поршень-гиря» к неквазистатическому процессу сжатия газа из состояния (p_1,V_1) в состояние (p_2,V_2) под действием установленной гири:

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + (4m + m)g(h_2 - h_1) = 0, \tag{11}$$

где $4m$ — масса поршня, m — масса гири, h_1 и h_2 — начальная и конечная вертикальные координаты поршня. Пусть S — площадь сечения поршня, тогда

$$p_1 = \frac{4mg}{S}, \qquad p_2 = 1{,}25p_1 = \frac{5mg}{S}, \qquad V_1 = Sh_1, \qquad V_2 = Sh_2. \qquad (12)$$

Преобразовав (11) с использованием (12), получим

$$V_2 = \frac{6}{7}V_1.$$

Аналогично, рассмотрим неквазистатический процесс расширения газа в состояние (p_3,V_3) после снятия гири:

$$\Delta U_{23} = \frac{5}{2}(p_3V_3 - p_2V_2) + 4mg(h_3 - h_2) = 0. \qquad (13)$$

Поскольку $4mgh_3 = (4mg/S)Sh_3 = p_3V_3$, то из (13) получим

$$V_3 = \frac{33}{28}V_2 = \frac{99}{98}V_1.$$

Поскольку за каждый цикл объем будет увеличиваться в 99/98 раза, то всего циклов потребуется

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(99/98)} \approx 68{,}3 \approx 68.$$

Задача 3. Газ Клаузиуса

В рассматриваемом процессе

$$p = p_0\left(1 - \frac{V}{V_0}\right).$$

Температура газа Клаузиуса

$$T = \frac{p(V-b)}{R} = -\frac{p_0}{RV_0}\left(V^2 - (V_0+b)V + V_0b\right).$$

Когда $dT/dV = 0$, то есть при $V = (V_0+b)/2$, температура достигает своего максимального значения

$$T_K = \frac{p_0V_0}{4R}\left(1 - \frac{b}{V_0}\right)^2 \approx \frac{p_0V_0}{4R}\left(1 - \frac{2b}{V_0}\right).$$

Максимальную температуру в процессе с идеальным газом можно получить, выполнив предельный переход $b \to 0$:

$$T_i = \frac{p_0V_0}{4R}.$$

Таким образом, максимальная температура в процессе с идеальным газом на

$$\Delta T = T_i - T_K \approx \frac{p_0b}{2R} \approx 4{,}0\ \text{K}$$

больше, чем в процессе с газом Клаузиуса.

Задача 4. Сверхпроводящий соленоид и источник

Найдем ток I_0, при котором индукция магнитного поля достигает критического значения:

$$B_0 = \mu_0 I_0 \frac{N}{l}, \qquad \text{откуда} \qquad I_0 = \frac{B_0 l}{\mu_0 N} \approx 100{,}3\ \text{А}.$$

Максимальный ток, который может обеспечить источник,

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}}{r} = 120\ \text{А} > 100\ \text{А} \approx I_0,$$

значит, сверхпроводящее состояние разрушится. Из правила Кирхгофа

$$L\frac{dI}{dt} + rI = \mathscr{E}$$

найдем ток через соленоид в зависимости от времени:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

где постоянная времени $\tau = L/r$, индуктивность соленоида $L = \mu_0 N^2 S/l$. Критическое значение силы тока достигается в момент времени

$$t_0 = -\tau \ln\left(1 - \frac{I_0 r}{\mathscr{E}}\right) = -\frac{\mu_0 S N^2}{lr}\ln\left(1 - \frac{B_0 l r}{\mu_0 N \mathscr{E}}\right) \approx 18{,}15\ \text{мс} \approx 18\ \text{мс}.$$

Задача 5. Фотоэффект

1. Энергия кванта падающего света частотой ν:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Работа выхода определяется красной границей фотоэффекта:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

По формуле Эйнштейна найдем максимальную кинетическую энергию вылетевшего электрона:

$$K_{\max} = E - A = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \approx 8{,}677 \cdot 10^{-20}\ \text{Дж}.$$

Поскольку $K_{\max} = mv_1^2/2$, то

$$v_1 = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} \approx 4{,}37 \cdot 10^5\ \text{м/с}.$$

2. Из закона сохранения энергии для первых электронов

$$K_{\max} + e\varphi_0 = \frac{mv_2^2}{2} \qquad \text{находим} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2(K_{\max} + e\varphi_0)}{m}} \approx 6{,}05 \cdot 10^5\ \text{м/с}.$$

3. Потенциал шарика после продолжительного облучения найдем из того условия, что электроны больше не смогут улетать далеко от шарика:

$$K_{\max} + e\varphi_1 = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \varphi_1 = -\frac{K_{\max}}{e} \approx +0{,}54\ \text{В}.$$

4. Потенциал шарика $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ за время облучения изменился на $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, следовательно, его заряд изменился на

$$\Delta q = 4\pi\varepsilon_0 R\Delta\varphi, \qquad \text{откуда} \qquad N = \frac{\Delta q}{-e} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{-e}R(\varphi_1 - \varphi_0) \approx 7{,}2 \cdot 10^6.$$