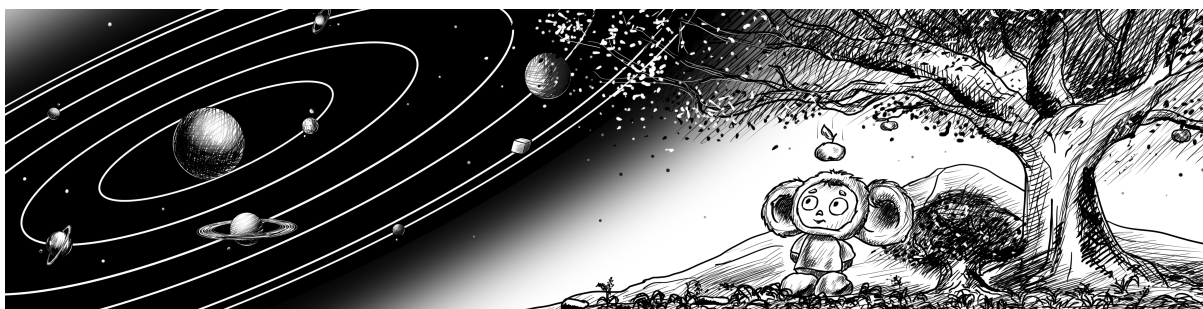
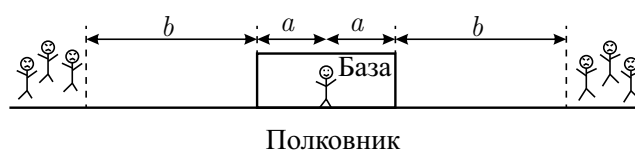




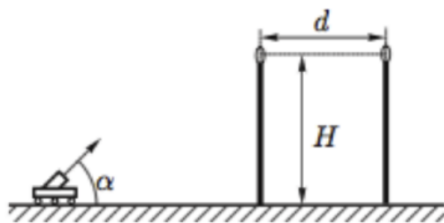
Данная подборка задач является **примером** того, что будет разбираться на смене. Здесь приведены 2–3 задачи из каждого семинара для того, чтобы вы смогли оценить уровень смены и темы, которые обсуждаются на ней. На самих семинарах будет разобрано гораздо больше задач.

1. Последовательности. Пределы

1. По долгу чести Кунг-фу Полковнику пришлось в одиночку защищать Подземную Базу от зомби-самураев. Попастъ в Подземную Базу можно по одному из двух длинных и узких пещерных коридоров. Как только хотя бы один зомби-самурай попадёт на Базу, зомби-вирус мгновенно разнесётся по базе, превратив всех жителей в зомби-ронинов, что недопустимо. Скорость Полковника в k раз больше скорости Зомби-самураев. При контакте с зомби-самураем Полковник мгновенно убивает его при помощи своего кунг-фу. Внутри базы расстояние между входами равно $2a$. Изначально Полковник находится внутри базы на равном расстоянии от входов, а зомби — снаружи базы на расстоянии не меньше b от входов. При каком значении a Полковник может быть уверен, что ему удастся защитить Подземную Базу от любого количества зомби?



2. На ровном гладком полу установлены два шеста высоты H с небольшими кольцами наверху. Расстояние между кольцами d (см. рисунок), а их плоскости перпендикулярны линии, соединяющей вершины шестов. По полу может перемещаться маленький робот, функция которого — запускать небольшие мячики с фиксированной скоростью v_0 под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Скорость v_0 подобрана так, что $v_0^2 > 4gH$. При каком минимальном $d \neq 0$ робот может выполнить бросок так, чтобы мячик пролетел сквозь оба кольца? Удар мяча о пол считайте абсолютно упругим. Отдельно рассмотрите случай $gH \ll v_0^2$.



2. Производная. Экстремумы

3. Атлет толкает ядро с разбега. Считая, что скорость ядра относительно атлета в момент броска равна по величине скорости разбега, найдите угол α , под которым следует выпустить ядро по отношению к земле, чтобы дальность полета была максимальной. Высоту самого атлета не учитывать. Ответ НЕ $\pi/4$.

4. Потенциальная энергия взаимодействия материальной точки с неподвижным центром находящимся от нее на расстоянии r , равна

$$U(r) = \frac{a}{r} + br,$$

где a и b — некоторые положительные постоянные. Найдите величины, силы, действующей на материальную точку, если она находится на расстоянии $r_0 = 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ от центра. Определите положение равновесия материальной точки и исследуйте его на устойчивость.

5. Дана функция

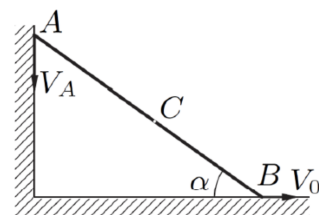
$$S(x, y) = \sqrt{(x-10)^2 + 1} + \sqrt{(y-4)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найдите наименьшее значение $S(x, y)$. При каких значениях x и y оно достигается?

3. Графики. Производная неявной функции. Дифференциалы

6. Имеется кольцо радиусом R . Радиус проволоки равен r , плотность материала равна ρ . Найдите силу F , с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m , находящуюся на оси кольца на расстоянии L от его центра. Постройте график функции $F = f(L)$. На каком расстоянии $L_{\max}$ от центра кольца сила имеет максимальное значение $F_{\max}$?

7. Твердый стержень длиной l скользит по вертикальной и горизонтальной осям, причем скорость точки B постоянна и равна v_0 . Найдите величину и направление ускорения a середины стержня AB (точки C) в тот момент, когда стержень образует с горизонтом угол α .



8. Узкий луч света от фонаря, вращающегося с угловой скоростью ω относительно вертикальной оси, попадает на вертикальную стену. Световое пятно бежит по стене по горизонтальной прямой. Расстояние от фонаря до стены L . Найдите скорость пятна в произвольной точке A . Скорость света считайте бесконечной.

4. Действия с векторами. Ряды

9. Докажите, что $\frac{d\vec{e}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}]$.

10. Каково отношение между высотой H горы и глубиной h шахты, если период колебаний математического маятника на вершине горы и на дне шахты один и тот же.

11. Высота цилиндрической банки равна радиусу основания. Банка обвязана шнурком, лежащим в плоскости осевого сечения цилиндра и проходящим через два малых углубления на окружности нижнего основания. Шнурок туго натянут. Можно ли снять шнурок с банки, не растягивая его и не разрывая?

5. Интегрирование

12. С какой силой притяжения действует материальный стержень длины L и массы M на материальную точку массы m , находящуюся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от одного из его концов?

13. В дне котла, имеющего форму полусферы радиуса $R = 1$ м и наполненного водой, образовалось отверстие площадью $s = 0,25$ см². Найти время истечения воды из котла.

14. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . При этом оно испытывает силу сопротивления, пропорциональную скорости. Сколько времени будет подниматься тело? Найти, на какую высоту оно поднимется. Получить путем предельного перехода формулу $h = \frac{v_0^2}{2g}$ для случая, когда сопротивление воздуха мало.

15. Пружина массивная. Про растяжение и центр масс.

16. Определить период колебаний математического маятника длины l , считая амплитуду колебаний α_0 произвольной. Исследовать результат при различных значениях α_0 .

17. Материальная точка движется по окружности радиуса R без начальной скорости с постоянным по модулю полным ускорением a . Найдите угол $\Delta\varphi$ поворота радиус-вектора к моменту, когда скорость материальной точки достигнет максимального значения.

6. Обработка данных. Решение трансцендентных уравнений

18. В этом задании предлагается изучить зависимость силы тока I , генерируемого солнечным элементом, включенным в цепь вместе с амперметром, от расстояния r до источника света. Свет излучается *внутри* самих светодиодов, и r , следовательно, надо измерять так, как показано на рис.

Заметим, что во время проведения опыта нельзя изменять пределы измерения амперметра: внутреннее сопротивление амперметра зависит от предела измерений, и таким образом, будет влиять на ток, текущий от солнечного элемента.

Результаты измерений занесены в таблицу

r , мм	9,0	14,5	20,0	25,5	31,0	36,5	42,0	47,5	53,0
I , мА	5,440	5,290	5,010	4,540	3,840	3,230	2,730	2,305	1,985
r , мм	58,5	64,0	69,5	75,0	80,5	86,0	91,5	97,0	102,5
I , мА	1,730	1,485	1,305	1,140	1,045	0,930	0,840	0,755	0,690

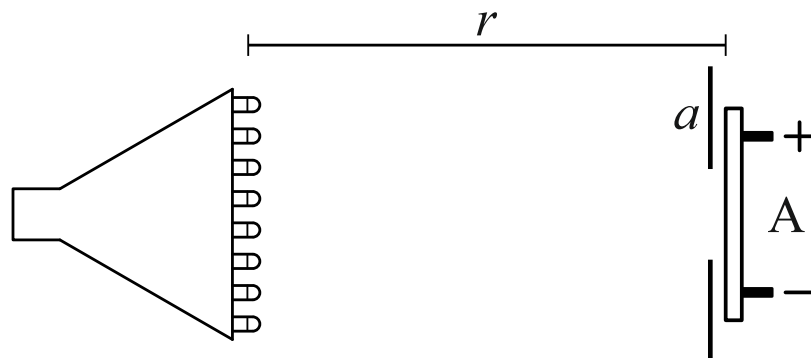


Рис. 1: Вид сверху на установку. Круглое отверстие радиусом a . Расстояние измеряется от точки внутри светодиодов до поверхности солнечного элемента.

Сила тока I зависит от радиуса отверстия a и расстояния до источника r .

1. Предложить вид зависимости силы тока от расстояния r и радиуса отверстия a .
2. По представленным данным определите размер диафрагмы a , а также значение силы тока I_a , когда источник располагается вплотную к приёмнику.

19. Решить уравнение Кеплера

$$y = a + x \sin y, \quad a = \text{const.}$$