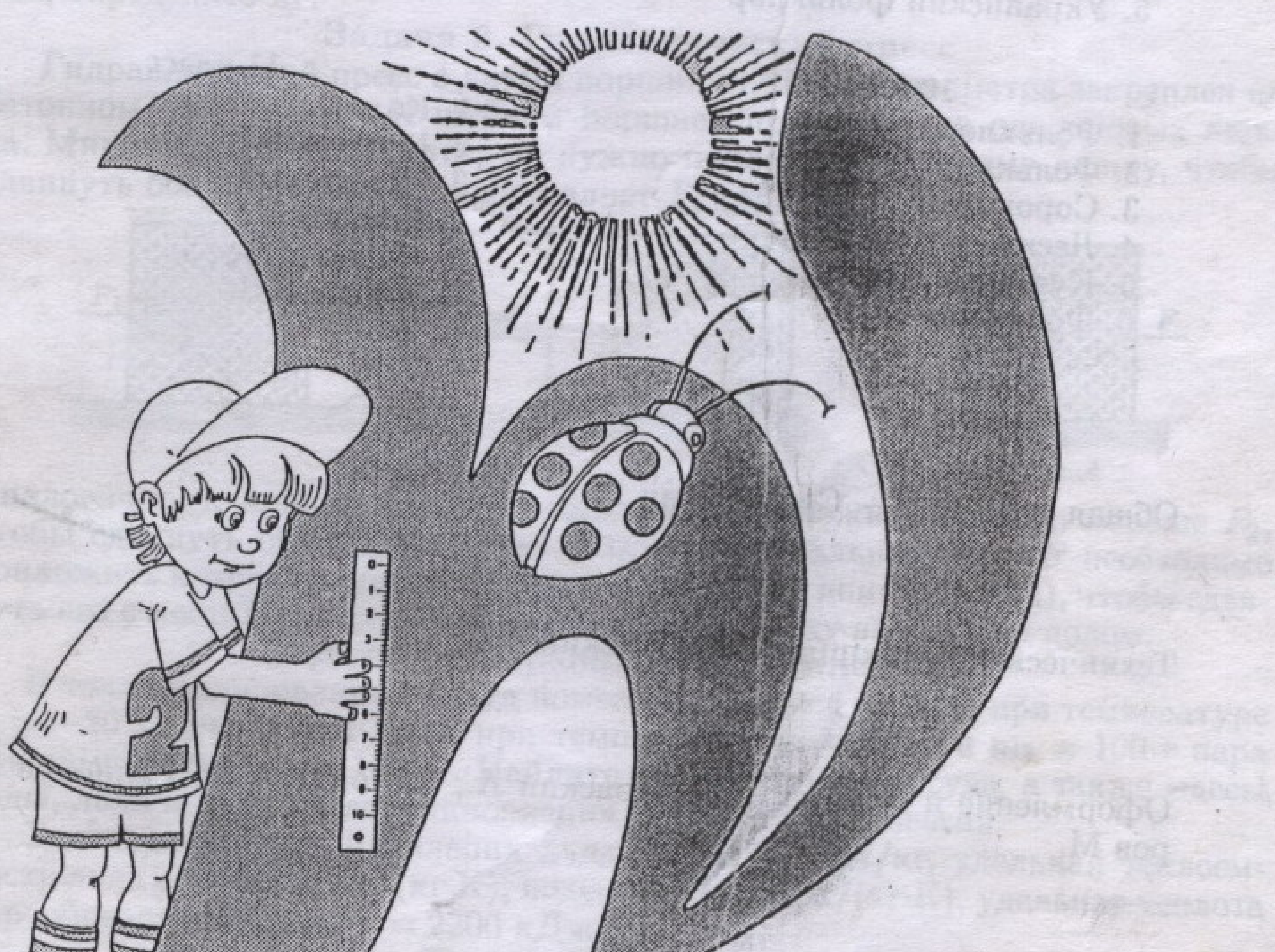
Министерство образования Российской Федерации
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2003/2004 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования Российской Федерации
Тел.: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: vip@pop3.mipt.ru

Авторы задач

8 класс	9 класс
1. Фольклор	1. Кузьмичев С.
2. Слободянин В.	2. Слободянин В.
3. Лесин Д.	3. Кузьмичев С.
4. Александров Д., Чудновский А.	4. Фольклор
5. Украинский фольклор	5. Фольклор

10 класс	11 класс
1. Фольклор	1. Калда Я.
2. Фольклор	2. Муравьев В.
3. Сорокин А.	3. Шеронов А.
4. Лесин Д.	4. Варламов С.
5. Кузнецов Е.	5. Чивилев В.
6. Фольклор	6. Горгадзе В.

Общая редакция — Слободянин В.

Техническая редакция — Чудновский А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Самокотин А., Родионов П., Егоров М.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 24 ноября 2003 г. в 01:27.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

8 класс

Задача 1. Пожарный катит бочку

Пожарный катит бочку на продовольственный склад (рис. 1). Для этого он медленно тянет за перекинутую через бочку веревку с силой $F = 300$ Н. При этом веревка параллельна склону, который составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найдите массу m бочки. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

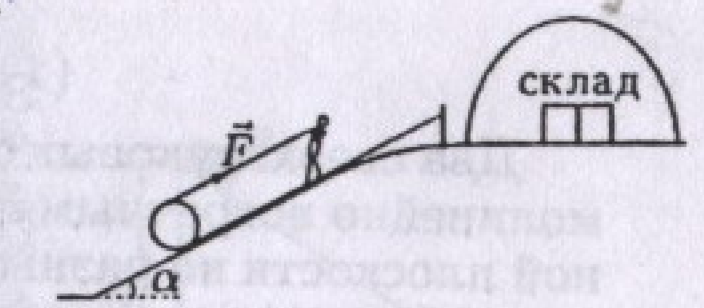


Рис. 1

Задача 2. Система в равновесии

Левые концы рычагов с длинами плеч l_1, $5l_1$ и $5l_2$, l_2 соответственно соединены нитью, к которой прикреплен груз массой M (рис. 2). К их правым концам с помощью нити подвешен подвижный блок с грузом массой $m = 1$ кг. Система находится в равновесии. Полагая, что рычаги и блок легкие, определите M.

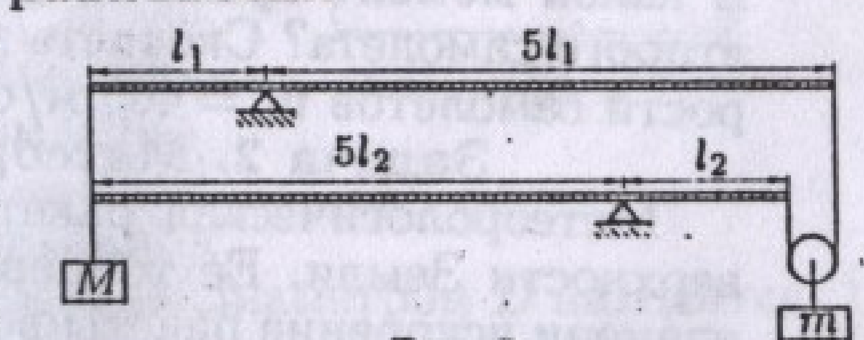


Рис. 2

Задача 3. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс с двумя поршнями разного диаметра закреплен на бетонном полу в цехе. К штокам поршней прижаты два одинаковых ящика. Минимальная сила, которую нужно приложить к левому ящику, чтобы сдвинуть оба ящика вправо, составляет F_1 (рис.3).

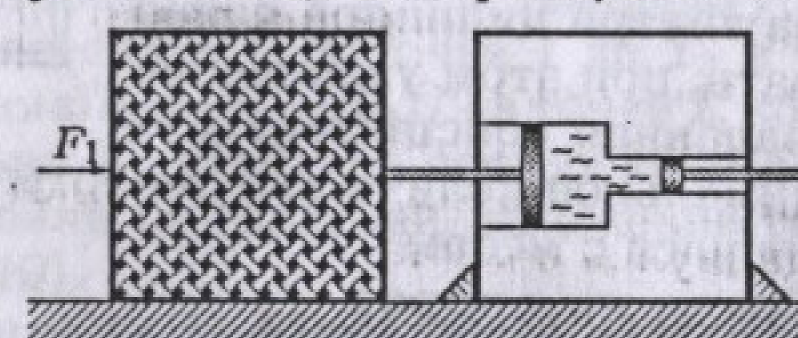


Рис. 3

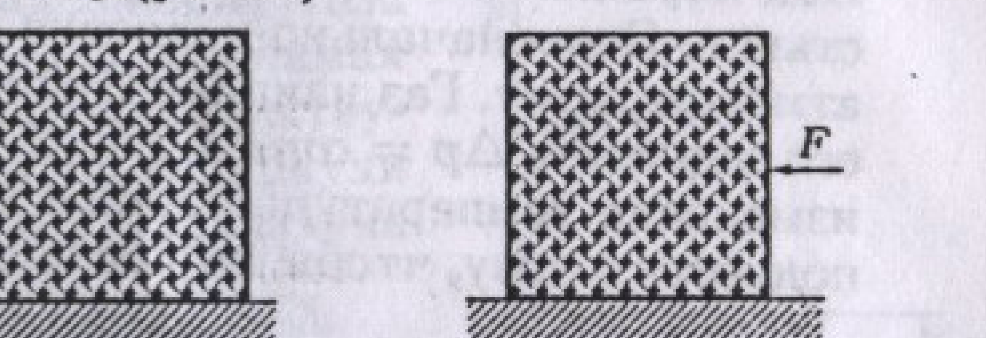


Рис. 4

Аналогично, к правому ящику необходимо приложить силу не меньше F_2, чтобы сдвинуть оба ящика влево. Какую минимальную силу F необходимо приложить к точно такому же отдельно стоящему ящику (рис. 4), чтобы сдвинуть его с места? Учитывайте трение только между ящиками и полом.

Задача 4. Выравнивание температур

В теплоизолированный сосуд поместили: $m_1 = 4$ кг льда при температуре $t_1 = -20°$C, $m_2 = 3$ кг воды при температуре $t_2 = 50°$C и $m_3 = 100$ г пара при температуре $t_3 = 100°$C. Найдите температуру в сосуде, а также массы воды, льда и пара после установления теплового равновесия.

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}1$ кДж/(кг·К), воды $c_2 = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r = 2300$ кДж/кг.

Задача 5. Лекарство

В цилиндрический сосуд с водой налили $V = 0{,}2$ л масла, которое образовало на воде слой толщиной $d = 1$ см. Затем в сосуд опустили плоскую таблетку из сала массой $m = 360$ г и толщиной $h = 5$ см. На какую высоту l таблетка будет выступать над маслом? Плотности воды $\rho_в = 1$ г/см^3, масла $\rho_м = 0{,}8$ г/см^3; сала $\rho_с = 0{,}72$ г/см^3.

9 класс

Задача 1. Звук от самолетов

Два сверхзвуковых самолета движутся горизонтально прямолинейно встречными курсами, находясь в одной вертикальной плоскости на разных высотах. В момент времени $t_0 = 0$ самолет 1 оказался точно над самолетом 2. Через время $t_1 = 1{,}8$ с после этого второй пилот услышал звук от первого самолета. В какой момент времени t_2 первый пилот услышал звук от второго самолета? Скорость звука в воздухе $u = 324$ м/с, скорости самолетов $v_1 = 405$ м/с и $v_2 = 351$ м/с.

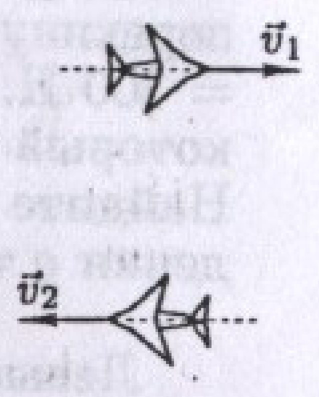


Рис. 5

Задача 2. Метеорологическая ракета

Метеорологическая ракета стартует в вертикальном направлении с поверхности Земли. Ее топливо сгорает за $\tau = 40$ с полета. В течении этого времени ускорение ракеты возрастает линейно от $a_0 = g$ до $a_\tau = 5g$. Найдите мощность двигателя ракеты перед окончанием его работы. Масса незаправленной ракеты $m_0 = 10$ кг, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Задача 3. Тяжелый поршень

В теплоизолированном цилиндрическом сосуде с вертикальными гладкими стенками на небольших опорах лежит тяжелый однородный поршень толщиной h и плотностью ρ (рис. 6). Под поршнем находится газ массой m с удельной теплоемкостью c. Первоначально давление газа внутри цилиндра равно атмосферному. Газ начинают нагревать, при этом увеличение его давления $\Delta p = \alpha m \Delta t$, где α — заданная константа, Δt — изменение температуры. Какое минимальное количество теплоты Q нужно подвести к газу, чтобы поршень сдвинулся с места?

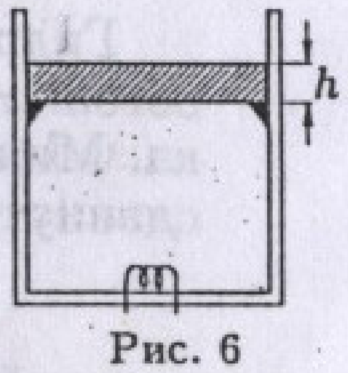


Рис. 6

Задача 4. Сосуд на опорах

Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью плотностью ρ_0 стоит на двух параллельных опорах, силы реакций которых составляют N_1 и N_2 (рис. 7). В сосуд опустили на нити шарик массой m и плотностью ρ так, что он оказался на одной вертикали со второй опорой. При этом шарик полностью погружен в воду и не касается сосуда. Определите новые силы N_1' и N_2' реакций опор.

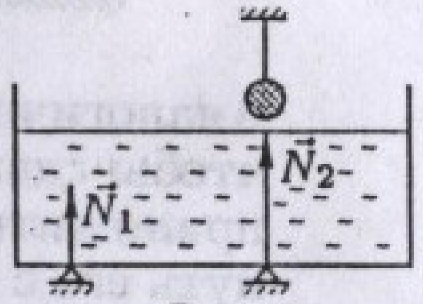


Рис. 7

Задача 5. Измерения в электрической цепи

Семь резисторов сопротивлениями $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 0{,}5$ кОм, $R_4 = 2{,}5$ кОм, $R_5 = 2$ кОм, $R_6 = 1$ кОм, $R_7 = 1$ кОм соединены с источником постоянного напряжения $U = 30$ В (рис. 8). К резисторам подключили два вольтметра и два амперметра. Определите их показания V_1, V_2, I_1, I_2. Приборы считайте идеальными.

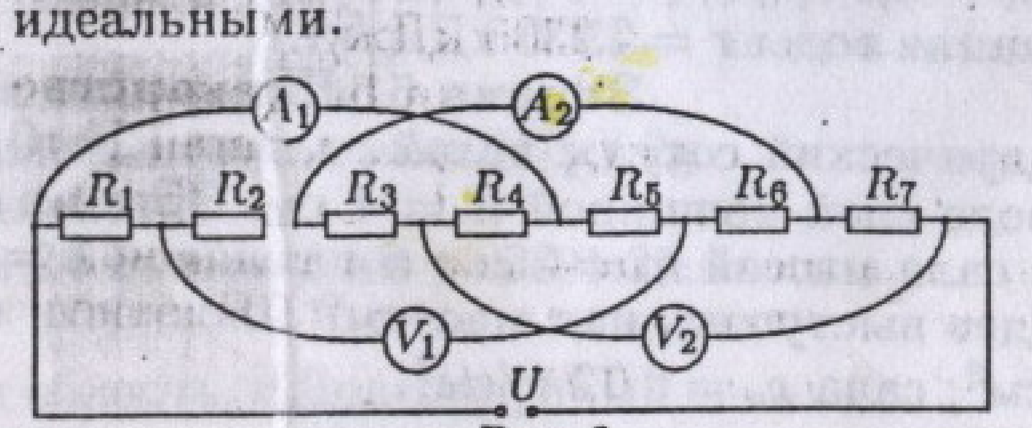


Рис. 8

10 класс

Задача 1. Клин и шайба (1)

Вблизи вершины клина массой M, высотой H и с длиной основания L удерживают небольшую шайбу массой m (рис. 9). Клин покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Шайбу отпускают и она соскальзывает к основанию клина. На какое расстояние S при этом переместится клин?

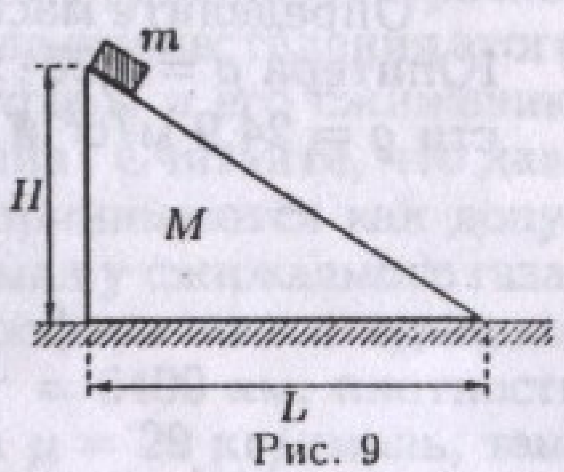


Рис. 9

Задача 2. Клин и шайба (2)

При выполнении условий предыдущей задачи найдите максимальную скорость V клина. Трением между клином и шайбой пренебречь.

Задача 3. Стакан-поплавок

В глубоком цилиндрическом сосуде с внутренним диаметром D находится вода, в которой дном вниз плавает тонкостенный металлический стакан массой m и высотой H. Благодаря направляющим стенки стакана и цилиндра остаются параллельными. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы утопить этот стакан, то есть заставить его пойти ко дну? Известно, что утопленный стакан не всплывает, а максимальная масса вмещаемой им воды равна M.

Задача 4. Точка на изохоре

В процессе $1-2-3$ температура идеального газа изменяется от T_1 в точке 1 до T_3 в точке 3, принимая значение $T_2 = (T_1 + T_3)/2$ в точке 2, которой соответствует объем V_2. Найдите построением с помощью циркуля и линейки без делений положение точки 2 на графике (рис. 10).

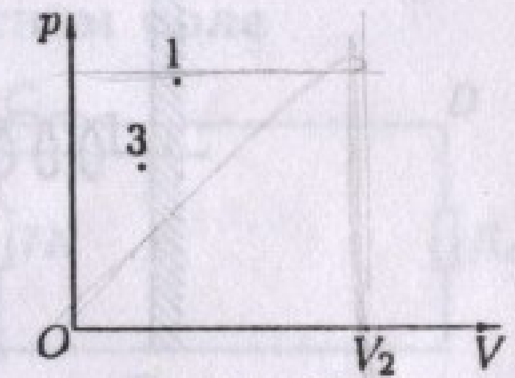


Рис. 10

Задача 5. Максимальный КПД цикла (1)

В тепловой машине в качестве рабочего тела используют идеальный одноатомный газ. Машина работает по циклу (рис. 11), состоящему из изохоры 1-2, изобары 2-3 и процесса 3-1, в котором давление и объем связаны линейной зависимостью. Найдите максимальный КПД $\eta_{\max}$ такого цикла.

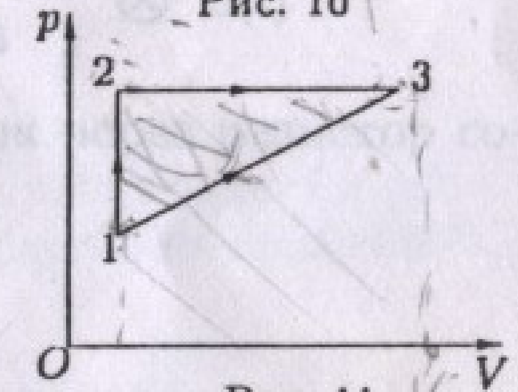


Рис. 11

Задача 6. Измерения в электрической цепи

Семь резисторов сопротивлениями $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 0{,}5$ кОм, $R_4 = 2{,}5$ кОм, $R_5 = 2$ кОм, $R_6 = 1$ кОм, $R_7 = 1$ кОм соединены с источником постоянного напряжения $U = 30$ В (рис. 12). К резисторам подключили два вольтметра и два амперметра. Определите их показания V_1, V_2, I_1, I_2. Приборы считайте идеальными.

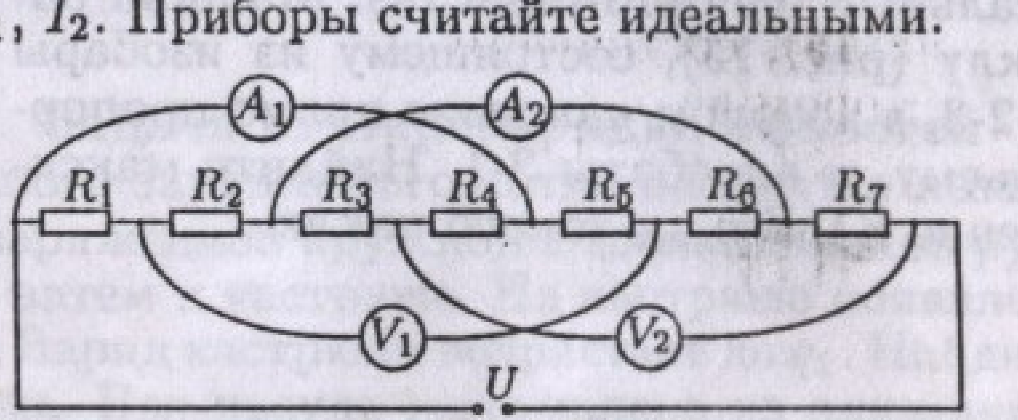


Рис. 12

11 класс

Задача 1. Взвешивание Земли

Определите массу m Юпитера. Считайте известными среднюю плотность Юпитера $\rho = 1{,}25 \cdot 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения на его поверхности $g = 24{,}9$ м/с^2 и гравитационную постоянную $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Задача 2. Двумерные колебания

На гладкой горизонтальной поверхности находится грузик, прикрепленный двумя одинаковыми пружинами к стенкам. Когда грузик находится в положении равновесия, пружины имеют одинаковое растяжение δ. Введем систему координат Oxy (рис. 13). Траектория грузика, совершающего малые колебания, изображена на рисунке 14. Определите δ, если длина пружин в нерастянутом состоянии равна a.

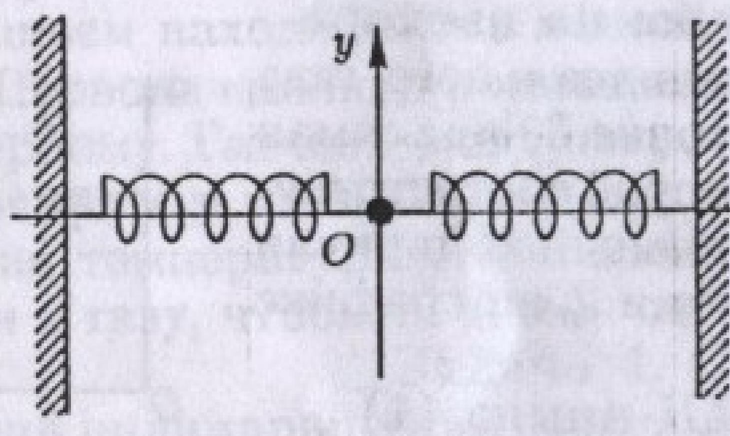


Рис. 13

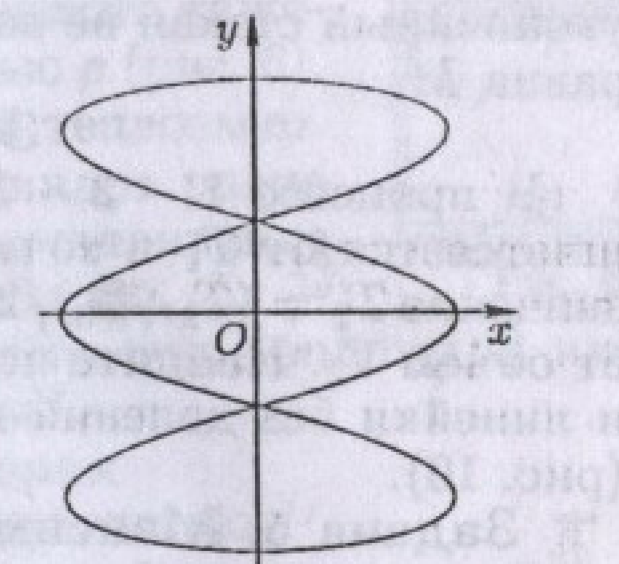


Рис. 14

Задача 3. Максимальный КПД цикла (2)

В тепловой машине в качестве рабочего тела используют идеальный одноатомный газ. Машина работает по циклу (рис. 15), состоящему из изобары 1-2, процесса 2-3, в котором давление прямо пропорционально объему, и адиабаты 3-1. Найдите максимальное значение КПД η_{max} такого цикла.

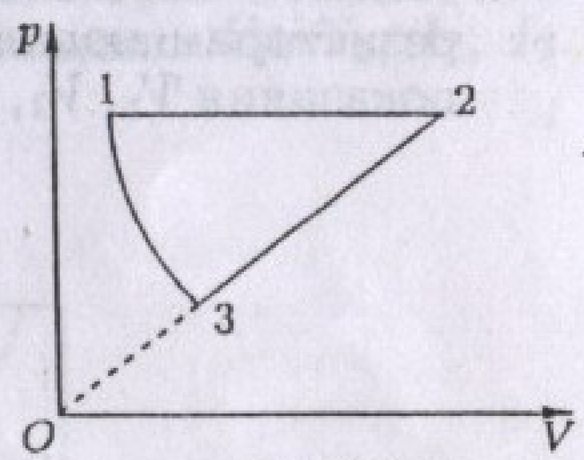


Рис. 15

Задача 4. Продавец воздуха

Говорят, что в распоряжении главного злодея романа А.Беляева «Продавец воздуха» была электростанция мощностью $W = 6$ ГВт (мощность Красноярской ГЭС). Оцените, через какое время τ после начала осуществления этого «коварного плана» по откачиванию воздуха из атмосферы и его сжижению жители Земли ощутят снижение атмосферного давления? Считайте, что давления от $p_1 = 730$ мм рт.ст. до $p_2 = 780$ мм рт.ст. воспринимаются как допустимые отклонения от нормального, теплота, отнимаемая у сжижаемого газа, передается воде мирового океана. Атмосфера и гидросфера имеют одинаковую среднюю температуру $t_0 = 4$°C. Радиус Земли $r = 6400$ км, плотность ртути $\rho = 13600$ кг/м^3. Для воздуха: молярная масса $\mu = 29$ кг/кмоль, температура кипения $t \approx -196$°C, теплота парообразования $L \approx 6{,}7$ кДж/моль, нормальное атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт.ст.

Задача 5. Проволочный каркас в магнитном поле

В проволочный каркас в форме двух прямоугольников с размерами $AB = BC = a$ и $CD = 2a$ впаяны небольшие по размерам резисторы с сопротивлениями R, $7R$ и R_x (рис. 16). Конструкция помещена в однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно ее плоскости и изменяющееся во времени с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = k$. При каком сопротивлении резистора R_x ток через резистор сопротивлением $7R$ не будет течь?

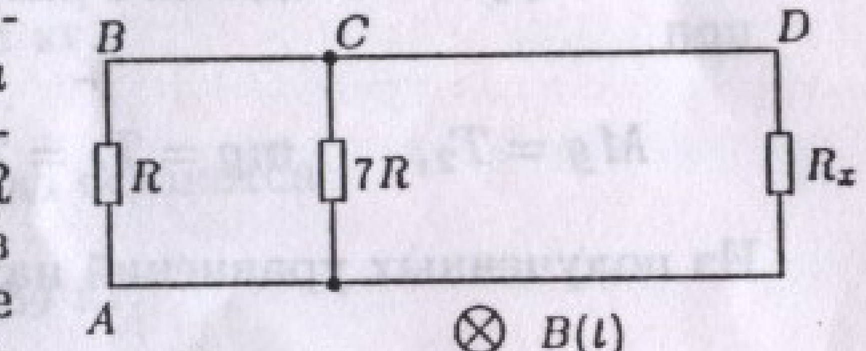


Рис. 16

Задача 6. Перезарядка емкостей

Вдали от большого заряженного котла находится незаряженная кастрюля. Небольшой незаряженной кружкой с изолированной ручкой прикасаются сначала к котлу, а затем к кастрюле. На кастрюле появляется заряд q_1. Процедуру повторяют. Заряд кастрюли возрастает до q_2. Найдите заряд q кружки после касания котла. Вся посуда изготовлена из алюминия. Кружкой касаются одних и тех же мест котла и кастрюли.

Возможные решения
8 класс

Задача 1. Пожарный катит бочку

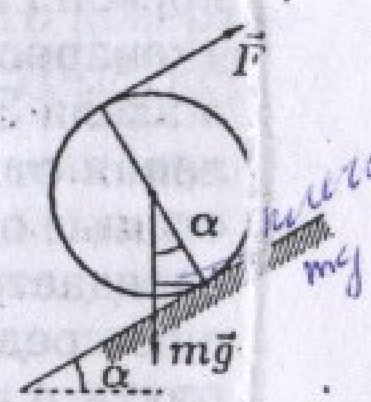


Рис. 17

Поскольку бочку катят медленно, момент силы тяжести относительно точки касания бочки со склоном уравновешивается моментом силы $\vec{F}$ (рис. 17). Плечо силы $\vec{F}$ равно $2R$, а плечо силы тяжести равно $R/2$, так как катет, лежащий против угла 30°, вдвое меньше гипотенузы. Следовательно,

Плечо mg $R\sin 30 = \frac{R}{2}$

$$2RF = \frac{R}{2}mg, \quad \text{откуда} \quad m = \frac{4F}{g} = 120 \text{ кг.}$$

Задача 2. Система в равновесии

Обозначим силы натяжения нитей через T_1, T_2, T_3 и T_4 (рис. 18). Условия равновесия для верхнего и нижнего рычагов имеют вид:

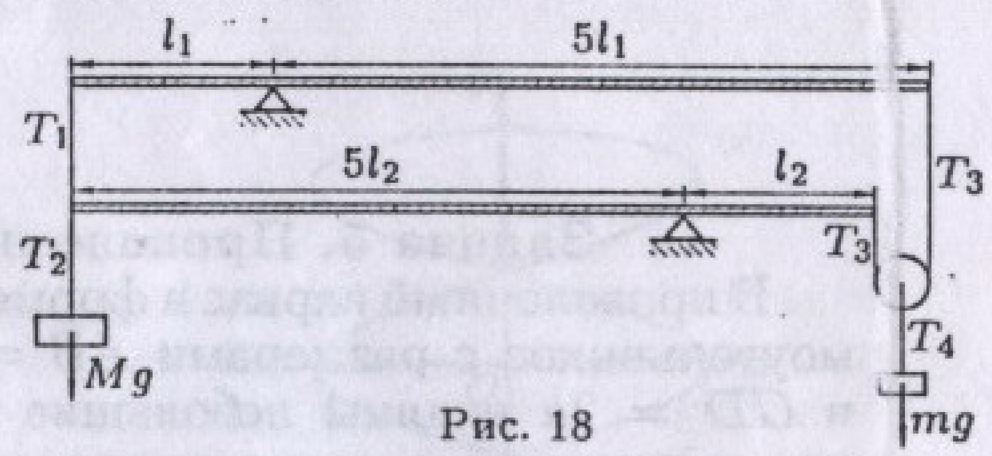


Рис. 18

$$T_1 l_1 = T_3 5l_1, \qquad (T_2 - T_1)5l_2 = T_3 l_2.$$

Блок и грузы находятся в равновесии при

$$Mg = T_2, \qquad mg = T_4 = 2T_3.$$

Из полученных уравнений находим $M = 2{,}6$ кг.

Задача 3. Гидравлический пресс

(Разбор условий)

Чтобы сдвинуть ящик с места, нужно преодолеть силу трения $F_{\text{тр}}$. В первом опыте силы $T_{1\text{л}}$ и $T_{1\text{п}}$ давления на левый и правый поршни соответственно связаны соотношением

$$T_{1\text{л}} = kT_{1\text{п}},$$

где k — отношение площадей поршней. Минимальная сила F_1 определяется условиями:

$$F_1 = F_{\text{тр}} + T_{1\text{л}}, \qquad T_{1\text{п}} = F_{\text{тр}}.$$

Аналогично, для второго опыта (когда сила действует справа):

$$F_2 = F_{\text{тр}} + T_{2\text{п}}, \qquad T_{2\text{л}} = F_{\text{тр}}, \qquad T_{2\text{л}} = kT_{2\text{п}}.$$

Из всех написанных уравнений находим

$$F = F_{\text{тр}} = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}.$$

Задача 4. Выравнивание температур

Рассчитаем, сколько энергии выделится при охлаждении системы, пока она не превратится в лед массой $M = m_1 + m_2 + m_3 = 7{,}1$ кг, находящийся при температуре t_1:

$$Q = rm_3 + c_2 m_3(100°\text{C} - 0°\text{C}) + c_2 m_2(t_2 - 0°\text{C}) +$$
$$+ \lambda(m_2 + m_3) + c_1(m_2 + m_3)(0°\text{C} - t_1) = 2086{,}2 \text{ кДж.}$$

Теперь посмотрим в какое состояние придет лед массой M, если к нему подвести теплоту Q. Для его нагрева до 0°C требуется

$$Q_1 = c_1 M(0°\text{C} - t_1) = 298{,}2 \text{ кДж.}$$

Еще останется подвести

$$Q_1' = Q - Q_1 = 1788 \text{ кДж.}$$

Для превращения льда в воду требуется

$$Q_2 = \lambda M = 2414 \text{ кДж.}$$

Поскольку $Q_1' < Q_2$, то в воду превратится не весь лед, а только

$$M_2 = M\frac{Q_1'}{Q_2} = 5{,}26 \text{ кг.}$$

Весь пар сконденсируется, следовательно, льда останется

$$M_1 = M - M_2 = 1{,}84 \text{ кг.}$$

Равновесная температура $t_0 = 0°$C.

Задача 5. Лекарство

Площадь сечения сосуда $S = V/d$, а таблетки $s = m/(\rho_c h)$. Толщина слоя масла после погружения таблетки

$$D = \frac{V}{S - s} = \frac{d}{1 - (md)/(\rho_c V h)} = 2 \text{ см.}$$

Применим закон Архимеда для сала:

$$\underbrace{\rho_c s h g}_{mg} = (\rho_м g D + \rho_в g(h - D - l))s,$$

откуда

$$l = h - D - \frac{\rho_c h - \rho_м D}{\rho_в} = 1 \text{ см.}$$

9 класс

Задача 1. Звук от самолетов

Границей зоны, в которую дошел звук от первого самолета, является конус. Его вершина в каждый момент времени совпадает с положением самолета. Осью конуса является траектория самолета. Для первого самолета угол $2\alpha_1$ раствора конуса определяется соотношением $\sin\alpha_1 = u/v_1$. Пусть H — высота первого самолета над вторым, а O_1 и O_2 — точки, в которых находились самолеты в момент t_0. В момент t_1 самолеты окажутся в точках A_1 и A_2 (рис. 19). Тогда $O_1A_1 = v_1t_1$, $O_2A_2 = v_2t_1$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{H}{(v_1+v_2)t_1}, \qquad t_1 = \frac{H}{(v_1+v_2)\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

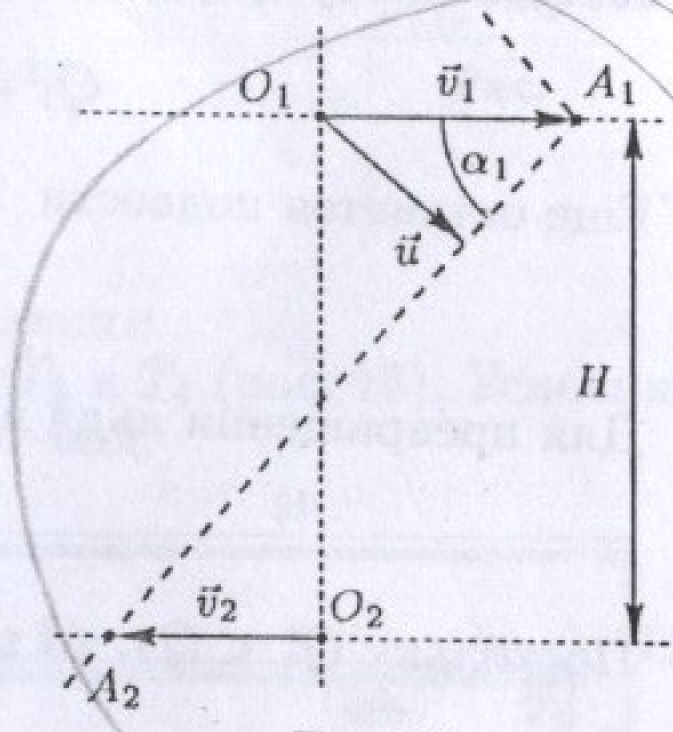


Рис. 19

Аналогично,

$$t_2 = \frac{H}{(v_1+v_2)\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Окончательно,

$$t_2 = t_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = t_1\sqrt{\frac{v_2^2-u^2}{v_1^2-u^2}} = 1{,}0\ \text{с}.$$

Задача 2. Метеорологическая ракета

Ускорение ракеты

$$a(t) = a_0 + (a_\tau - a_0)\frac{t}{\tau}.$$

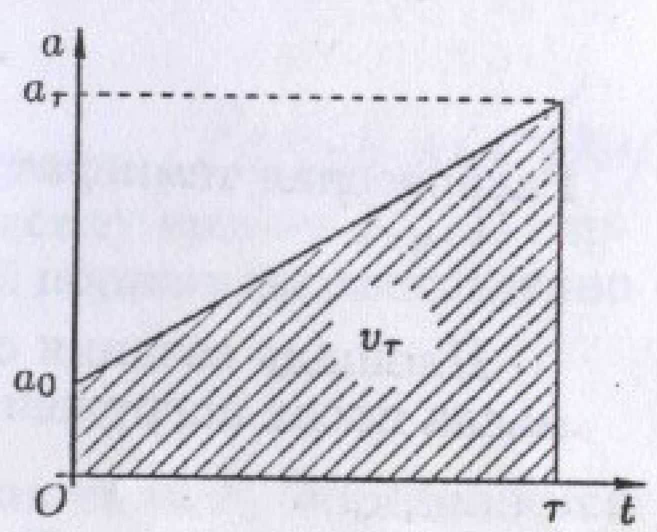


Рис. 20

По аналогии с тем, что пройденному пути соответствует площадь под графиком скорости, находим скорость v_τ ракеты в момент τ как площадь под графиком ускорения (рис. 20):

$$v_\tau = \frac{\tau}{2}(a_0 + a_\tau).$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$m_0a_\tau = F - mg,$$

где F — сила тяги в конце полета. Мощность двигателя в этот момент

$$N = Fv_\tau = \frac{m_0\tau}{2}(a_\tau + g)(a_0 + a_\tau) = 720\ \text{кВт}.$$

Задача 3. Тяжелый поршень

Пусть M — масса поршня, S — площадь его основания, тогда чтобы он сдвинулся с места, давление газа в цилиндре должно превысить атмосферное на величину

$$\Delta p = \frac{Mg}{S} = \rho gh.$$

Из связи Δp и Δt находим

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{\alpha m}.$$

Следовательно,

$$Q = cm\Delta t = \frac{c}{\alpha}\Delta p = \frac{c\rho gh}{\alpha}.$$

Задача 4. Сосуд на опорах

Пусть F и F' — силы давления жидкости на основание сосуда до и после погружения шарика, тогда

$$F' = F + \rho_0\frac{mg}{\rho}.$$

Поскольку сосуд легкий и цилиндрический, то при увеличении уровня воды центр масс сосуда с водой не смещается по горизонтали. Следовательно, точки приложения сил F и F' совпадают. Запишем условия равновесия сосуда до и после погружения шарика:

$$N_1 + N_2 = F, \qquad N_1' + N_2' = F',$$

$$N_1l_1 = N_2l_2, \qquad N_1'l_1 = N_2'l_2,$$

где l_1 и l_2 — плечи реакций опор относительно точки приложения силы F. Откуда

$$N_1' = N_1\left(1 + \frac{mg\rho_0}{(N_1+N_2)\rho}\right), \qquad N_2' = N_2\left(1 + \frac{mg\rho_0}{(N_1+N_2)\rho}\right).$$

Заметим, что ответ не зависит от места погружения шарика.

Задача 5. Измерения в электрической цепи

Перерисуем схему без вольтметров (рис. 21). Сопротивление каждой из параллельных ветвей цепи составляет

$$r = R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = R_5 + R_6 = 3\ \text{кОм},$$

поэтому полное сопротивление цепи

$$R = \frac{r}{3} + R_7 = 2\ \text{кОм}.$$

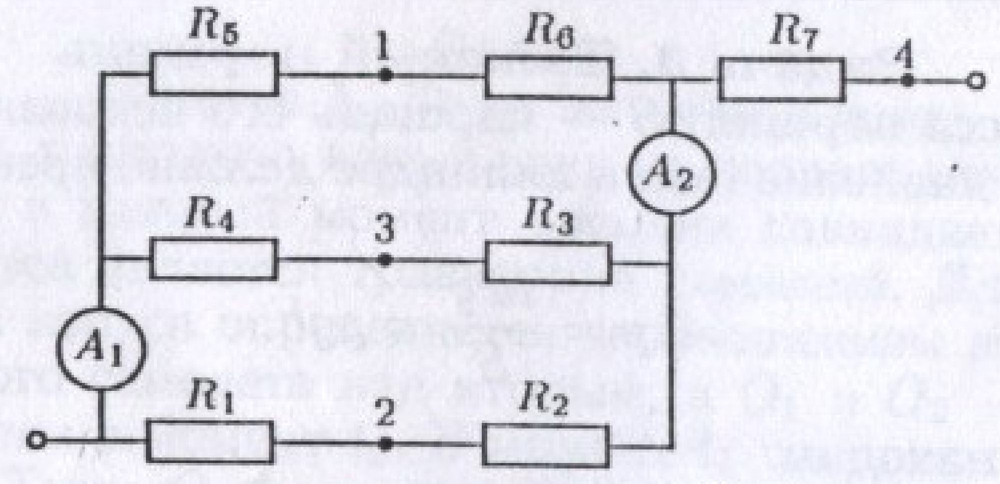


Рис. 21

Через резистор R_7 сила тока $I = U/R$. Через каждую из параллельных ветвей цепи течет одинаковый ток, поэтому сила тока в каждой из них $i = I/3$, откуда

$$I_1 = I_2 = 2i = \frac{2U}{3R} = 10 \text{ мА}.$$

Показания V_1 и V_2 вольтметров найдем как напряжения между соответствующими точками:

$$V_1 = |U_{12}| = iR_5 - iR_1 = \frac{U}{3R}(R_5 - R_1) = 5 \text{ В},$$

$$V_2 = |U_{34}| = iR_3 + IR_7 = \frac{U}{3R}(R_3 + 3R_7) = 17{,}5 \text{ В}.$$

10 класс

Задача 1. Клин и шайба (1)

Поскольку внешние силы, действующие на систему «клин-шайба», не имеют горизонтальных составляющих, горизонтальная координата центра масс системы не меняется:

$$m(L-S) - MS = 0, \qquad \text{откуда} \qquad S = \frac{m}{m+M}L.$$

Задача 2. Клин и шайба (2)

Скорость клина будет максимальной, когда шайба достигнет его основания. Пусть $\vec{u}$ — скорость шайбы в этот момент относительно клина, а $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ — ее скорость в неподвижной системе отсчета (рис. 22). По теореме косинусов для треугольника скоростей:

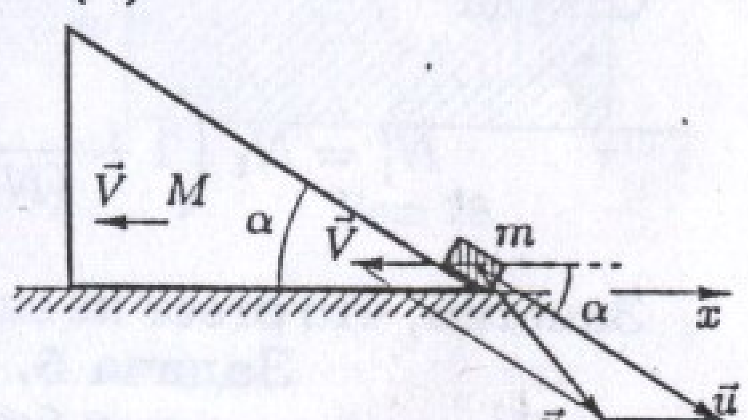


Рис. 22

$$v^2 = u^2 + V^2 - 2uV\cos\alpha. \qquad (1)$$

Поскольку внешние силы, действующие на систему «клин-шайба» вертикальны, проекция импульса системы на ось x не меняется: $0 = m(u\cos\alpha - V) - MV$, откуда

$$u = \frac{m+M}{m\cos\alpha}V. \qquad (2)$$

По закону сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Подставив (1) и (2) в последнее уравнение и учитывая, что $\cos\alpha = L/\sqrt{H^2+L^2}$, найдем

$$V = \sqrt{2gH\left(1+\frac{M}{m}\right)^{-1}\left(\frac{M}{m} + \left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{H^2}{L^2}\right)^{-1}}.$$

Задача 3. Стакан-поплавок

Будем медленно опускать стакан в воду. Для этого к нему нужно прикладывать вертикально вниз силу F, уравновешивающую сумму силы Архимеда и силы тяжести, действующих на стакан. Пока в стакане нет воды, F линейно зависит от глубины погружения x, причем $F(0) = 0$.

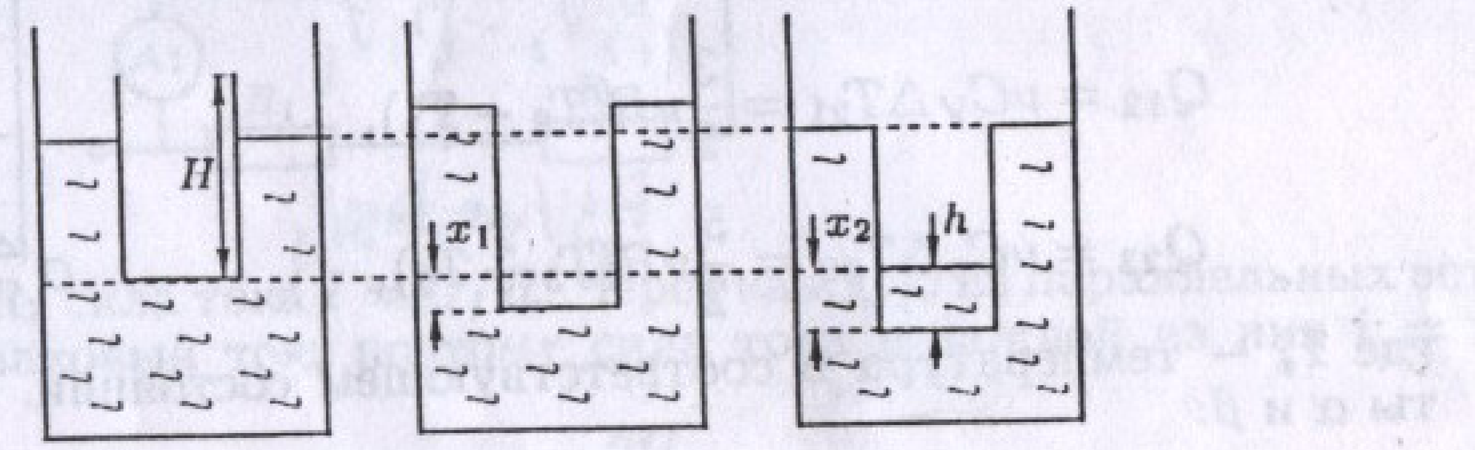


Рис. 23

Край стакана сравняется с уровнем жидкости в сосуде при $x = x_1$ (рис. 23). При этом $F(x_1) = Mg - mg = F_0$. По мере дальнейшего опускания стакана в него начнет затекать вода. Сила тяжести, действующая на стакан с жидкостью будет увеличиваться, а F — уменьшаться линейно с x. При $x = x_2$ сила F достигнет нулевого значения и стакан утонет:

$$mg + Mg\frac{h}{H} - Mg = F(x_2) = 0, \qquad \text{откуда} \qquad h = H\left(1 - \frac{m}{M}\right).$$

Нетрудно показать, что это произойдет, когда уровень воды в сосуде станет равным первоначальному, поэтому $x_2 = h$.

Построим график зависимости $F(x)$, $0 \le x \le x_2$ (рис. 24). Совершенной работе соответствует площадь под графиком:

$$A = \frac{1}{2}F_0 x_2 = \frac{1}{2}MgH\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2.$$

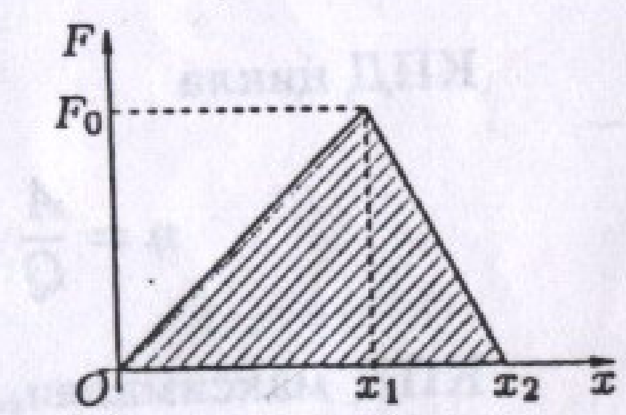


Рис. 24

Обратите внимание на то, что результат не зависит от диаметра сосуда.

Задача 4. Точка на изохоре

Через точку 1 проведем изобару до пересечения в точке A с изохорой V_2 (рис. 25). Соединим отрезком точки A и O. Через точку 1 проведем изохору до пересечения в точке B с прямой OA. Через точку B проведем изобару до пересечения в точке $1'$ с изохорой V_2. Полученная точка $1'$ лежит на изотерме T_1, так как из построения следует

$$\frac{V_1}{V_{1'}} = \frac{p_{1'}}{p_1}.$$

Аналогично построим точку $3'$ пересечения изотермы T_3 с изохорой V_2. В изохорическом процессе давление прямо пропорционально температуре. Поскольку

$$T_2 = \frac{T_1 + T_3}{2}, \quad \text{то} \quad p_2 = \frac{p_{1'} + p_{3'}}{2},$$

поэтому точка 2 лежит посередине отрезка $1'3'$.

Задача 5. Максимальный КПД цикла (1)

Пусть ν — количество газа, R — универсальная газовая постоянная. Система получает теплоту на участках 1-2 и 2-3:

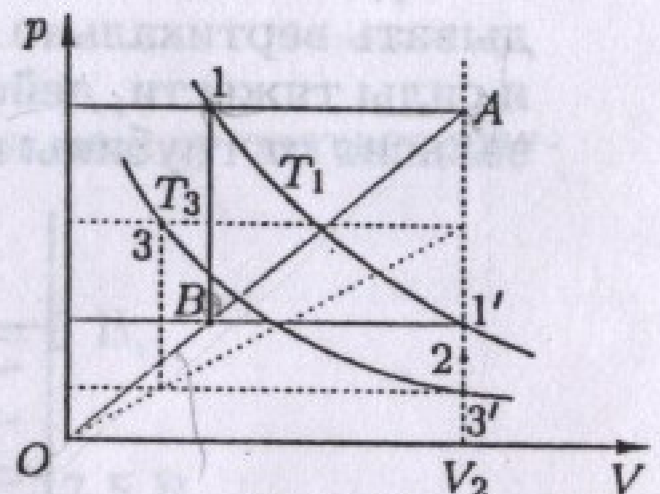


Рис. 25

$p_2V_2 - p_1V_1$

$$Q_{12} = \nu C_V \Delta T_{21} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1),$$

$p_3V_3 - p_2V_1$

$$Q_{23} = \nu C_p \Delta T_{32} = \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2),$$

где T_i — температура в соответствующем состоянии. Введем коэффициенты α и β:

$$\alpha = \frac{p_2}{p_1}, \qquad \beta = \frac{V_3}{V_1},$$

где p_i и V_i — давление и объем в соответствующем состоянии. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, получаем выражение для теплоты, подводимой к системе за цикл:

$$Q = Q_{12}+Q_{23} = \frac{3}{2}(p_2V_1 - p_1V_1) + \frac{5}{2}(p_2V_3 - p_2V_1) = \frac{3}{2}(\alpha-1)p_1V_1 + \frac{5}{2}\alpha(\beta-1)p_1V_1.$$

Работа газа за цикл равна площади треугольника 1-2-3 в координатах $(V; p)$:

$$A = \frac{1}{2}(\alpha-1)p_1 \cdot (\beta-1)V_1.$$

КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{3(\alpha-1)+5(\beta-1)} = \frac{1}{5} - \left(\frac{\frac{3}{5\beta} + \frac{1}{\alpha} - \frac{8}{5\alpha\beta}}{5 - \frac{2}{\beta} - \frac{3}{\alpha\beta}}\right).$$

КПД максимален, когда выражение в скобках минимально. Поскольку оно положительно и стремится к 0 при больших α и β, то

$$\eta_{\max} = \frac{1}{5}.$$

Задача 6. Измерения в электрической цепи

Перерисуем схему без вольтметров (рис. 26). Сопротивление каждой из параллельных ветвей цепи составляет

$$r = R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = R_5 + R_6 = 3 \text{ кОм},$$

поэтому полное сопротивление цепи

$$R = \frac{r}{3} + R_7 = 2 \text{ кОм}.$$

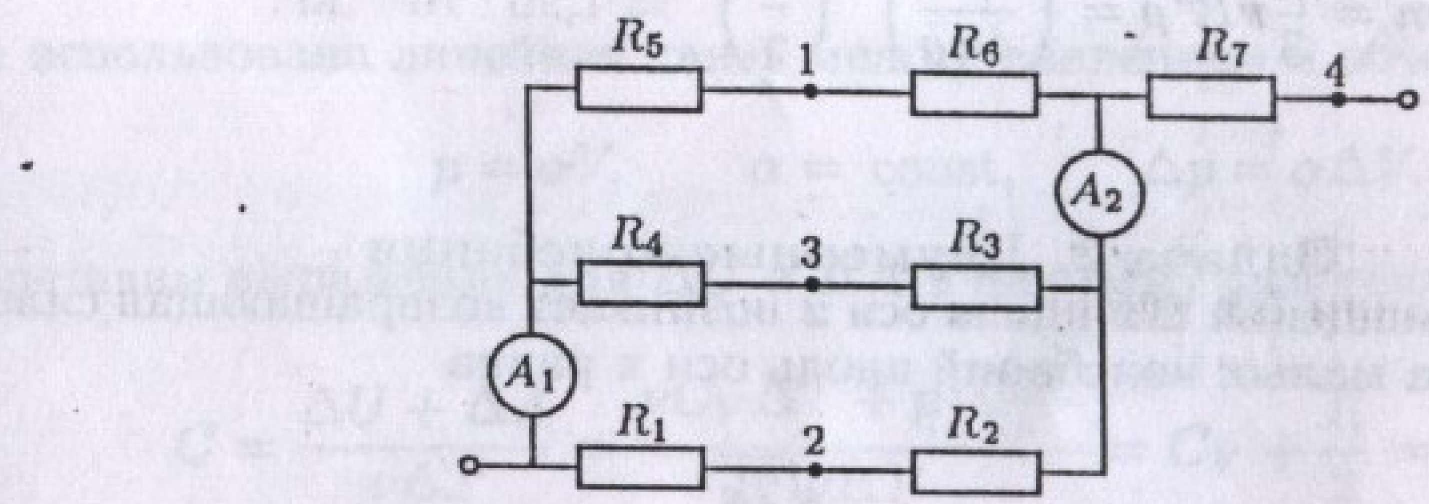


Рис. 26

Через резистор R_7 сила тока $I = U/R$. Через каждую из параллельных ветвей цепи течет одинаковый ток, поэтому сила тока в каждой из них $i = I/3$, откуда

$$I_1 = I_2 = 2i = \frac{2U}{3R} = 10 \text{ мА}.$$

Показания V_1 и V_2 вольтметров найдем как напряжения между соответствующими точками:

$$V_1 = |U_{12}| = iR_5 - iR_1 = \frac{U}{3R}(R_5 - R_1) = 5 \text{ В},$$

$$V_2 = |U_{34}| = iR_3 + IR_7 = \frac{U}{3R}(R_3 + 3R_7) = 17{,}5 \text{ В}.$$

11 класс

Задача 1. Взвешивание Земли

По закону всемирного тяготения

$$g = \frac{\gamma m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho R\gamma, \qquad \text{откуда} \qquad R = \frac{3g}{4\pi\gamma\rho}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^3 \approx 1{,}90\cdot 10^{27}\ \text{кг}.$$

Задача 2. Двумерные колебания

При малом смещении Δx вдоль оси x возникает возвращающая сила $F_1 = 2k\Delta x$. Частота малых колебаний вдоль оси x равна

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

где m — масса грузика, k — жесткость пружины. При малом смещении вдоль оси y возникает возвращающая сила

$$F_2 = 2F_0\frac{\Delta y}{\delta + a},$$

где $F_0 = k\delta$ — сила натяжения пружин в положении равновесия. Значит, частота малых колебаний вдоль оси y равна

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}\frac{\delta}{\delta + a}}.$$

Из картины двумерных колебаний видно, что $\omega_y/\omega_x = 1/3$. Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta + a} = \frac{1}{9}, \qquad \text{откуда} \qquad \delta = \frac{1}{8}a.$$

Задача 3. Максимальный КПД цикла (2)

Обозначим количество газа в системе через ν, его молярные теплоемкости при постоянном объеме или давлении через C_V и C_p соответственно. Символом Δ будем обозначать малые изменения соответствующих величин. Для любого процесса молярная теплоемкость

$$C = \frac{\Delta Q}{\nu\Delta T} = \frac{\Delta U + \Delta A}{\nu\Delta T},$$

где ΔQ — теплота, подведенная к системе, ΔT — изменение температуры, $\Delta U = \nu C_V\Delta T$ — изменение внутренней энергии, $\Delta A = p\Delta V$ — работа системы. Из закона Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$ находим

$$p\Delta V + V\Delta p = \nu R\Delta T.$$

Отсюда для процесса 2-3 получаем

$$\Delta V = \frac{\nu R\Delta T}{p + \alpha V} = \frac{\nu R\Delta T}{2p},$$

где использована линейная связь между давлением и объемом:

$$p = \alpha V, \qquad \alpha = \text{const}, \qquad \Delta p = \alpha\Delta V.$$

Подставим выражения для ΔU и ΔA в формулу для теплоемкости:

$$C = \frac{\Delta U + \Delta A}{\nu\Delta T} = \frac{\nu C_V\Delta T + p\frac{\nu R\Delta T}{2p}}{\nu\Delta T} = C_V + \frac{R}{2} = \frac{C_V + C_p}{2}.$$

Найдем теперь КПД цикла. Пусть T_1, T_2, T_3 — температуры в соответствующих состояниях системы, тогда на участке 1-2 газ получает теплоту

$$Q_{12} = \nu C_p(T_2 - T_1),$$

а на участке 2-3 отдает теплоту

$$Q_{23} = \nu C(T_2 - T_3).$$

На участке 3-1 теплообмена нет. КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{12}} = 1 - \frac{C(T_2 - T_3)}{C_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{C_V/C_p + 1}{2}\left(\frac{1 - T_3/T_2}{1 - T_1/T_2}\right).$$

В процессе 3-1 над системой совершается работа, поэтому $T_1 > T_3$. Следовательно, при увеличении T_2 выражение в скобках стремится к 1 — своему минимуму. Таким образом,

$$\eta_{\max} = \frac{1 - C_V/C_p}{2} = 0{,}2,$$

где использовано $C_V/C_p = 3/5$.

$F_0 = k\delta = F_x$

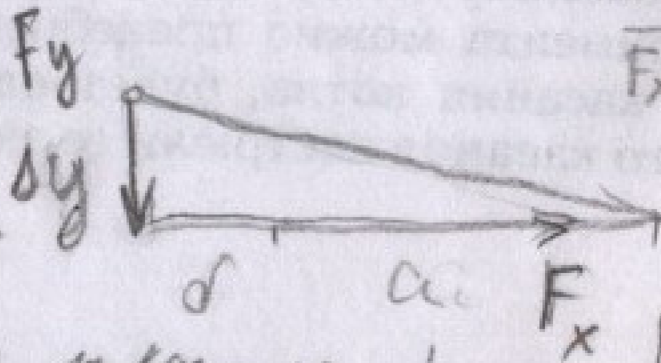
$F_y = \frac{k\delta\Delta y}{\delta + a} = ma$

$m a = \frac{k\delta}{\delta+a}\Delta y$

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\frac{F_y}{F_x} = tg\,\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\delta + a}$



$\omega_y = \sqrt{\frac{2k\cdot\delta}{m(\delta+a)}}$ у где $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{1}{3}$

$F_y = F_x\frac{\Delta y}{\delta + a}$

Задача 4. Продавец воздуха

Жители Земли ощутят изменение атмосферного давления, если масса атмосферы $M = 4\pi r^2 p_0/g$ уменьшится на

$$m = M\frac{p_0 - p_1}{p_0} = \frac{4\pi r^2(p_0 - p_1)}{g}.$$

Для этого можно использовать обращенную тепловую машину (тепловой насос) с охлаждаемым телом температурой $T_1 = 77$ K и нагреваемым телом температурой $T_0 = 277$ K. Количество теплоты Q, выделяющейся при преобразовании в жидкость воздуха массой m:

$$Q = \frac{m}{\mu}(C_p(T_0 - T_1) + L),$$

где $C_p = 3R/2$ — теплоемкость при постоянном давлении. Чтобы отобрать у воздуха такое количество теплоты и передать его воде при температуре T_0, требуется работа A. Эта работа минимальна, когда мы охлаждаем газ по обратному циклу Карно, для которого

$$\frac{A}{Q} = \frac{T_0 - T_1}{T_1}, \qquad \text{откуда} \qquad A = Q\frac{T_0 - T_1}{T_1}.$$

Окончательно,

$$\tau = \frac{A}{W} = \frac{4\pi r^2(p_0 - p_1)}{Wg\mu}(C_p(T_0 - T_1) + L)\frac{T_0 - T_1}{T_1} \approx 50 \cdot 10^3 \text{ лет.}$$

Задача 5. Проволочный каркас в магнитном поле

ЭДС в левом и правом контурах «направлены» против часовой стрелки (при $k > 0$) и их модули

$$\mathcal{E}_1 = ka^2, \qquad \mathcal{E}_2 = 2ka^2.$$

По второму правилу Кирхгофа для левого и правого контуров при токе I через резисторы с сопротивлениями R и R_x получаем

$$\mathcal{E}_1 = IR, \qquad \mathcal{E}_2 = IR_x.$$

Отсюда

$$R_x = R\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = 2R.$$

Задача 6. Перезарядка емкостей

Поскольку котел большой, изменением его заряда на протяжении всего эксперимента можно пренебречь. Поэтому заряд, возникающий на кружке после касания котла, будет одинаковым в первом и втором случае. После первого касания кастрюли ее заряд q_1, а заряд кружки $q - q_1$, после второго — соответственно q_2 и $q_1 + (q - q_2)$. Отношение зарядов двух соприкасающихся тел зависит только от их формы и взаимного расположения, поэтому

$$\frac{q_1}{q - q_1} = \frac{q_2}{q_1 + q - q_2}, \qquad \text{откуда} \qquad q = \frac{q_1^2}{q_2 - q_1}.$$