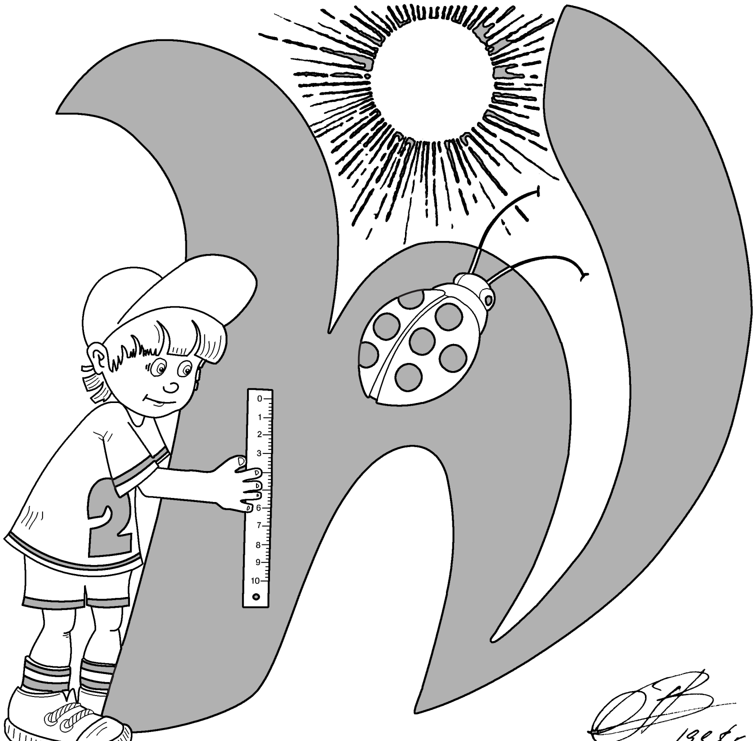
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Екатеринбург, 2015 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**
Сайт физических олимпиад школьников: `physolymp.ru`

Авторы задач

9 класс

1. Слободянин В.
2. Воробьёв И.
3. Замятнин М., Зыков И.
4. Аполонский А.
5. Мельниковский Л.

10 класс

1. Александров Д.
2. Шведов О.
3. Черноуцан А.
4. Воробьёв И.
5. Парфенов К.

11 класс

1. Варламов С., Гуденко А.
2. Савинов Е.
3. Гуденко А.
4. Воробьёв И.
5. Варламов С.

Общая редакция — Слободянин В.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Разгон поезда

Машинист настроил бортовой компьютер электрички так, чтобы он показывал среднюю скорость v на участке, пройденном между соседними опорами, поддерживающими контактный провод. Расстояния между любыми двумя соседними опорами одинаковы. Электричка отправляется с платформы «Новодачная» и разгоняется с постоянным ускорением. Через некоторое время машинист увидел, что компьютер показывает скорость $v_1 = 20$ км/ч. На следующем участке скорость оказалась $v_2 = 30$ км/ч. Какой была мгновенная скорость u электрички на границе между первым и вторым участками?

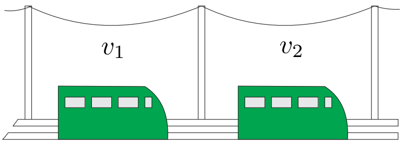


Рис. 1

Задача 2. Нажали и отпустили

Тележка соединена со стеной жестким стержнем. К ее упору прикреплена пружина, другой конец которой связан с бруском (рис. 2). Вначале пружина не деформирована. На брусок в течение некоторого времени действует постоянная горизонтальная сила F, направленная вдоль тележки. После прекращения действия этой силы брусок еще некоторое время смещается в сторону упора и возвращается, остановившись в исходной точке. Сила трения, действующая со стороны тележки на брусок, равна f. Трение в осях колес не учитывайте.

1. С какой силой N тележка давила на стержень в момент прекращения действия силы F?

2. Найдите наибольшее значение силы $N_{\max}$ давления тележки на стержень.

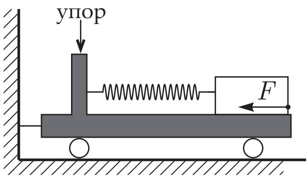


Рис. 2

Задача 3. Жара в холодильнике

В жаркие летние дни, когда в комнате установилась температура $t_0 = 30°C$, экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что время работы двигателя холодильника стало вдвое превышать время бездействия. Решив оптимизировать его работу, экспериментатор регулятором изменил температуру внутри холодильника на $\Delta\theta = 9$ °C. В результате, время бездействия стало вдвое больше времени работы. Определите:

1. На какие температуры t_1 и t_2 был настроен регулятор в начале и в конце эксперимента?

2. На какую внутреннюю температуру t_m надо выставить регулятор, чтобы двигатель холодильника начал работать без перерыва?

3. При какой выставленной регулятором температуре t_3 частота включения холодильника станет максимальной?

Указание: Регулятор задает температуру внутри холодильника t в небольшом интервале $t \pm \Delta t/2$. Когда температура внутри становится равной $t + \Delta t/2$, двигатель холодильника включается, когда она снижается до $t - \Delta t/2$ — выключается. Считайте, что:

1) мощность подводимого тепла пропорциональна разности температуры внутри холодильника и окружающей среды и постоянна во всем интервале внутренних температур $t \pm \Delta t/2$.

2) тепловая мощность, отбираемая двигателем во время его работы у внутреннего объема холодильника, не зависит от температур.

3) изменением температуры в комнате можно пренебречь.

Задача 4. Неидеальные диоды

Электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке 3, содержит три одинаковых резистора сопротивлением $R_1 = R_2 = R_3 = R$ и три одинаковых диода D_1, D_2, D_3. Зависимость силы тока, протекающего через диод, от напряжения на нём представлена на рисунке 4. Определите силу тока через амперметр I_{A} в зависимости от напряжения U_{AB} между точками A и B. Амперметр идеальный. Постройте график зависимости I_{A} от U_{AB}, указав значение силы тока и напряжение в характерных точках (например, максимум, минимум, излом).

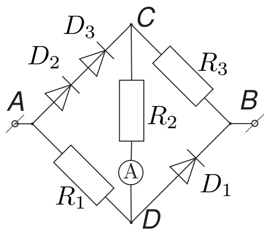


Рис. 3

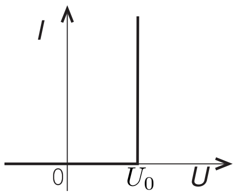


Рис. 4

Задача 5. Чунга-Чанга

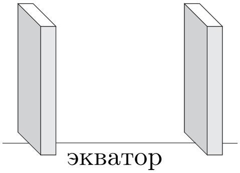


Рис. 5

Чебурашка и крокодил Гена весной поехали в Лагерь Дружбы на острове Чунга-Чанга. Остров расположен на экваторе. На территории лагеря построены два типовых 100-этажных корпуса (в виде прямоугольных параллелепипедов), один строго на востоке от другого. Здания корпусов параллельны друг другу и перпендикулярны экватору (рис. 5). Чебурашка поселился в западном копрусе, а крокодил Гена - на десятом этаже восточного корпуса. Окна их комнат оказались выходящими друг на друга. В день весеннего равноденствия, 21 марта, солнце светило в окно Гены в течение $T_1 = 2$ часов, а в окно Чебурашки — $T_2 = 4$ часов.

1. На каком этаже живёт Чебурашка?

2. Что показывали часы Чебурашки, когда окна в корпусе Гены ему впервые показались золотыми?

3. В течение какого времени окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми?

Примечание. Окна кажутся золотыми, когда в них отражается Солнце. Многократные отражения не учитывать. В 12 часов Солнце находилось в зените.

10 класс

Задача 1. Упругая система

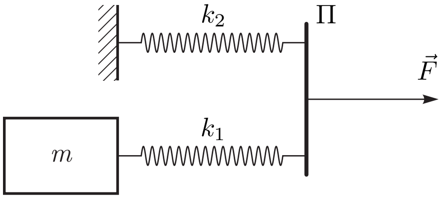


Рис. 6

На гладкой горизонтальной поверхности расположена конструкция, показанная на рисунке 6 (вид сверху). Один конец пружины жёсткости k_1 прикреплён к грузу массы m, второй — к палочке П. У пружины жёсткости k_2 один конец закреплён неподвижно, а второй прикреплён к той же палочке П. На палочку всё время действует сила F, остающаяся постоянной по величине и направлению что бы ни случилось. Поначалу груз m удерживают неподвижно, а затем отпускают без толчка.

1. Найдите максимальную скорость груза.

2. Найдите удлинение первой пружины в момент, когда её длина будет минимальна.

Считайте, что масса пружин и палочки равна нулю, длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, растяжения пружин в момент отпускания груза тоже одинаковы, силу F прикладывают к палочке таким образом, что она движется поступательно (не поворачивается при движении), трение отсутствует.

Задача 2. Исследование планеты

Спускаемый аппарат осуществляет посадку на поверхность экзотической планеты. Во время спуска проводилось измерение зависимости давления p в атмосфере планеты от расстояния z до поверхности планеты (график на отдельном листе). Измерение температуры, произведённое на высоте $z_1 = 5$ км дало значение $T_1 = 250$ К. Вычислите температуру T_0 у поверхности планеты. Считайте, что радиус планеты $R \gg z_1$. Атмосфера состоит из углекислого газа.

Примечание. График на отдельном листе необходимо сдать вместе с вашим решением.

Задача 3. Термоэлектродинамика

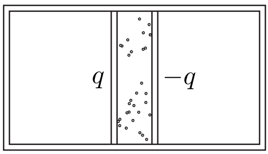


Рис. 7

Два диска, по которым равномерно распределены заряды q и $-q$, могут двигаться без трения в длинном непроводящем теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально (рис. 7). Расстояние между дисками много меньше их радиуса. Между дисками находится некоторое количество гелия, за дисками газа нет, система находится в равновесии. Заряды дисков мгновенно уменьшают вдвое, после чего ожидают прихода системы в равновесие. Пренебрегая теплообменом, найдите, во сколько раз изменятся температура газа и расстояние между дисками.

Задача 4. Стенка с дыркой

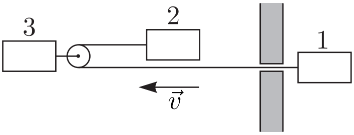


Рис. 8

Три одинаковых бруска движутся с одинаковыми скоростями $\vec{v}$. Длинная лёгкая упругая резинка, связывающая первый и второй бруски, проходит сквозь отверстие в массивной стене и через лёгкий блок, прикреплённый к третьему бруску (рис. 8). В начальный момент времени резинка не растянута. Определите скорости брусков после упругого столкновения первого бруска со стеной в момент времени, когда резинка оказалась

1. максимально растянутой;
2. снова ненатянутой.

Трение в системе не учитывайте. Считайте, что пока резинка не станет снова ненатянутой, груз 2 не сталкивается с блоком, а груз 1 не ударяется о стену.

Задача 5. Нелинейность

Некоторые элементы электрических цепей являются нелинейными, то есть сила тока, протекающего через них, не пропорциональна приложенному напряжению. Допустим, что у нас есть лампа накаливания, для которой сила тока $I_л$ пропорциональна $\sqrt{U_л}$, диод, у которого $I_д$ пропорциональна $U_д^2$, и источник постоянного напряжения. При этом и лампа, и диод обладают одинаковым свойством: если подключить любой из этих элементов к источнику в качестве нагрузки, то мощность тепловых потерь на нагрузке будет максимально возможной для данного источника. Если подключить к источнику лампу и диод, соединив их последовательно, то мощность потерь на такой нагрузке будет равна $P_1 = 7{,}2$ Вт. Какой будет мощность, если в качестве нагрузки к источнику присоединить лампу и диод, соединенные параллельно?

11 класс

Задача 1. Колебания

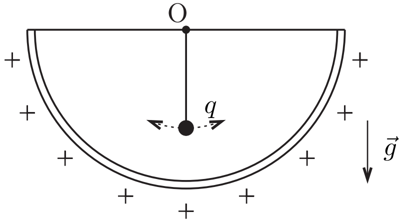


Рис. 9

По поверхности закреплённой диэлектрической полусферы равномерно распределён положительный электрический заряд. Ось симметрии полусферы вертикальна. В точке O, совпадающей с центром кривизны полусферы, закреплён математический маятник в виде небольшого шарика с зарядом q_1, висящего на нити, длина которой меньше радиуса полусферы (рис. 9). Период гармонических колебаний шарика вблизи положения равновесия, в котором нить вертикальна, равен T. После того, как заряд шарика изменили так, что он стал равен q_2, причем $|q_2/q_1| = 2$, период гармонических колебаний шарика вблизи нового положения равновесия, в котором нить тоже вертикальна, снова оказался равным T. Найдите числовое значение T, если известно, что период гармонических колебаний маятника в незаряженной чаше $T_0 = 1{,}0$ с. Поле поляризационных зарядов не учитывайте.

Задача 2. Проводящий кубик

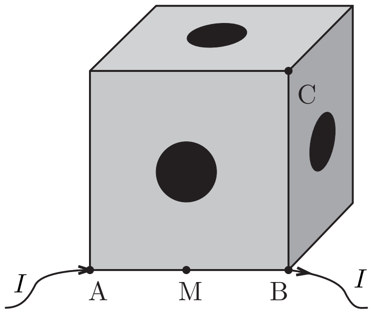


Рис. 10

Кубик составлен из шести одинаковых проводящих пластин с просверленными по центру одинаковыми отверстиями. В вершины кубика вставлены одинаковые маленькие хорошо проводящие шарики, к которым можно присоединять провода. Диаметры отверстий таковы, что электрическое сопротивление кубика между его соседними вершинами A и B оказалось равным $R_{AB} = r = 32$ кОм. Если через эти вершины пропустить ток $I = 1$ мА в направлении, указанном на рисунке, то разность потенциалов между точкой M (серединой ребра AB) и вершиной C будет равна $U_{MC} = \varphi_M - \varphi_C = U = 2{,}0$ В. Определите сопротивление R_{AC} между точками A и C. Как изменятся сопротивления R_{AB} и R_{AC}, если, не изменяя толщину пластин, увеличить их размеры и размер отверстий в 2 раза?

Задача 3. Реактивная трубка

В середине длинной трубки, открытой с обоих концов, перпендикулярно к её оси закреплён нагреватель в виде тонкой вольфрамовой сеточки. Система находится в воздухе при температуре $t = 20°$C, её общая масса $M = 17$ г. В начальный момент трубке сообщается скорость $v_0 = 1$ см/с вдоль её оси, к нагревателю начинает подводиться мощность $q = 20$ Вт, и трубка начинает разгоняться. Какой скорости достигнет трубка на пути разгона $S = 20$ м?

Сопротивлением воздуха пренебрегите. Давление внутри трубки считайте одинаковым, силу тяжести и теплообмен через стенку трубки не учитывайте. Считайте, что изменение кинетической энергии потока воздуха при пересечении сеточки мало по сравнению с изменением его внутренней энергии. Считайте воздух двухатомным газом с молярной массой $\mu = 29$ г/моль.

Задача 4. Космический объект

Космический объект, движущийся вдоль некоторой прямой с постоянной скоростью, испускает периодические радиоимпульсы. Астроном установил, что за время наблюдения Δt видимое направление на этот объект изменилось на малый угол $\Delta\varphi$, а период между моментами прихода радиоимпульсов изменился от T до $T + \Delta T$, где $\Delta T \ll T$. Найдите расстояние от наблюдателя до объекта. Скорость радиоимпульсов равна скорости света c.

Задача 5. «Миллиавтомобиль»

Очень маленький, размером с муравья, автомобиль, едет по ровной горизонтальной поверхности вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f. На его крыше закреплён точечный источник света S, находящийся на главной оптической оси линзы. Скорость автомобиля изменяется так, что скорость изображения S_1 точечного источника S остаётся постоянной и равной v_0. Определите на каких расстояниях от линзы возможно такое движение «автомобиля». Коэффициент трения между колёсами автомобиля и дорогой равен μ.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Разгон поезда

Первый способ (аналитический «со временем»). Пусть L — расстояние между соседними опорами, a — ускорение электрички. Исходя из условия задачи мы будем рассматривать два соседних участка 1–2 и 2–3 между соотвествующими опорами 1, 2 и 3 (рис. 11). Условимся, что средняя скорость на участке 1–2 есть v_1, а на участке 2–3, соответственно, v_2. Пусть u_1 — мгновенная скорость в момент прохождения первой опоры, электричка проходит участок 1–2 за некоторое время t_1, а участок 2–3 — за время t_2.

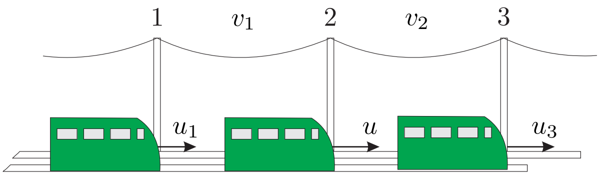


Рис. 11

Тогда из определения средней скорости на участке, его длину можно записать как

$$L = v_1 t_1 = v_2 t_2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку движение равноускоренное:

$$L = u_1 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}, \tag{2}$$

$$L = u t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \tag{3}$$

$$u = u_1 + a t_1. \tag{4}$$

Умножая почленно (2) на v_1/t_1 и (3) на v_2/t_2, затем, подставляя t_1 и t_2 из (1) и u_1 из (4) в (2) и (3), получаем

$$v_1^2 = u v_1 - \frac{aL}{2}, \qquad v_2^2 = u v_2 + \frac{aL}{2}.$$

Избавляясь от L, выражаем скорость u и находим её численное значение:

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26\ \text{км/ч}. \tag{5}$$

Второй способ (графический). Используем обозначения первого способа, а также равенство (1).

Построим график зависимости скорости электрички от времени. С учетом равенства (1) и численных значений скоростей, движение на участке 1–2 длится в полтора раза дольше, чем на 2–3 (например 6τ и 4τ).

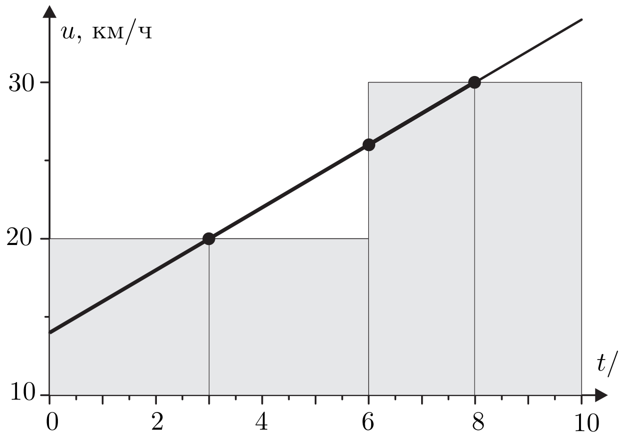


Рис. 12

Для любого участка при равноускоренном движении средняя скорость равна мгновенной скорости на середине временного интервала. Из графика следует, что изменение мгновенной скорости от 20 до 30 км/ч происходило за время 5τ. Откуда изменение скорости за 3τ равно 6 км/ч. Тогда искомая скорость 26 км/ч.

Третий способ (аналитический «без времени»). Используем обозначения первого способа. Пусть скорость на конце участка 2-3 равна u_3. Средняя скорость при равноускоренном движении:

$$v_1 = \frac{u_1 + u}{2}, \tag{6}$$

$$v_2 = \frac{u + u_3}{2}. \tag{7}$$

Перемещения на участках равны:

$$L = \frac{u^2 - u_1^2}{2a}, \tag{8}$$

$$L = \frac{u_3^2 - u^2}{2a}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$u^2 - u_1^2 = u_3^2 - u^2. \tag{10}$$

Решая систему (6), (7) и (10) относительно u получаем:

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26 \text{ км/ч}. \tag{11}$$

Задача 2. Нажали и отпустили

Пусть s — расстояние, на которое переместился брусок за время действия силы F, а x — наибольшее сжатие пружины. Чтобы брусок остановился в исходной точке, работа сил трения при этом перемещении должна быть равна работе силы F на перемещениииы s:

$$Fs = 2fx. \tag{12}$$

Из того, что в момент наибольшего сжатия пружины скорость бруска равна 0, следует:

$$Fs = fx + \frac{kx^2}{2}, \tag{13}$$

где k — жёсткость пружины. Из уравнения (13) с учётом (12) находим

$$kx = 2f. \tag{14}$$

Из (12) и (14) получим

$$ks = \frac{4f^2}{F} \qquad (15).$$

Сила давления тележки на стенку будет максимальна при максимальной деформации пружины (сила упругости максимальна, а сила трения ещё не изменила направления). Значит, значения силы давления на стенку в момент прекращения действия силы F и в момент, когда она максимальна, равны, соответственно,

$$N = ks + f = \frac{4f^2}{F} + f, \tag{16}$$

$$N_{\max} = kx + f = 3f. \tag{17}$$

Задача 3. Жара в холодильнике

Пусть P — мощность поступающей за счёт теплообмена из окружающей среды теплоты, $P = \alpha(t - t_0)$, P_0 — мощность отводимой за счёт работы холодильника теплоты, C — теплоёмкость холодильника с содержимым.

1. Для нагрева холодильника на Δt требуется время T (время бездействия):

$$T = \frac{C\Delta t}{P} = \frac{C\Delta t}{\alpha(t_0 - t)}. \tag{18}$$

Далее включается двигатель и температура в холодильнике понижается на Δt за время τ (время работы):

$$\tau = \frac{C\Delta t}{P_0 - P} = \frac{C\Delta t}{P_0 - \alpha(t_0 - t)}. \qquad (19)$$

Пусть изначально температура в холодильнике была равна $t = t_1$, при этом $\tau = 2T$, откуда, с учётом (18) и (19) получим:

$$t_1 = t_0 - \frac{2P_0}{3\alpha}.$$

Во втором случае $2\tau = T$ при $t = t_2$, откуда с учётом (18) и (19) получим:

$$t_2 = t_0 - \frac{P_0}{3\alpha}.$$

Тогда $\theta = t_2 – t_1 = P_0/(3\alpha)$, откуда

$$t_1 = t_0 – 2\theta = 12^\circ\text{C}, \quad t_2 = t_0 – \theta = 21^\circ\text{C}.$$

2. Двигатель холодильника будет работать непрерывно, если мощность отводимой им теплоты будет меньше или равна мощности теплоты, подводящейся из окружающей среды:

$$P_0 \leqslant \alpha(t_0 - t), \quad \text{откуда} \quad t \leqslant t_0 - \frac{P_0}{\alpha},$$

значит,

$$t_m = t_0 - \frac{P_0}{\alpha} = t_0 - 3\theta = 3\ ^\circ\text{C}.$$

3. В решении первого пункта задачи было показано, что время между двумя последовательными включениями холодильника равно

$$T + \tau = \frac{C\Delta t}{P} + \frac{C\Delta t}{\alpha(t_0 - t)} = \frac{C\Delta t P_0}{\alpha(t_0 - t)(P_0 - \alpha(t_0 - t))}.$$

Частота включения холодильника максимальна, когда максимальна величина $y = \alpha(t_0 - t)(P_0 - \alpha(t_0 - t))$. Для удобства обозначим $(t_0 - t)$ за x. График $y(x) = \alpha P_0 x - \alpha^2 x^2$ — парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому y максимально для вершины параболы. Координата вершины параболы $x_\text{в} = P_0/(2\alpha)$, значит,

$$t_3 = t_0 - \frac{P_0}{2\alpha} = t_0 - \frac{3}{2}\theta = 16{,}5\ ^\circ\text{C}.$$

Задача 4. Неидеальные диоды

Рассмотрим случай, когда «+» источника подключается к точке A. Напряжение U_AB в этом случае будем считать положительным. Если напряжение на диоде меньше величины U_0, ток через него не идет (диод закрыт). При малых значениях U_{AB} все три диода закрыты, а ток, протекающий через резисторы, равен

$$I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R}. \tag{1}$$

и течет от D к C. При постоении графика $I_{\text{A}}(U_{\text{AB}})$ это направление тока будем считать положительным. Зависимость (1) имеет место, пока напряжение на диоде D_1 не достигнет U_0, т.е. при

$$U_{DB} = I_A \cdot 2R < U_0,$$

или $U_{\text{AB}} < \frac{3}{2}U_0$. Итак, $I_A = \dfrac{U_{\text{AB}}}{3R}$ при $U_{\text{AB}} < \frac{3}{2}U_0$.

При $U_{AB} = 3U_0/2$ диод D_1 открывается, и, как следует из вольтамперной характеристики диода, напряжение на участке DB будет равно U_0 при любых значениях напряжения $U_{AB} > 3U_0/2$. Поэтому, пока не откроются диоды D_2 и D_3, ток через амперметр положителен и равен

$$I = \frac{U_0}{2R}$$

Диоды D_2 и D_3 открываются, когда напряжение на участке AC станет равным $2U_0$. А поскольку напряжение на участке CB при открытом диоде D_1 равно $U_0/2$, то открывание диодов D_2 и D_3 произойдёт при напряжении $U_{AB} = 2U_0 + U_0/2 = 5U_0/2$. При этом разность потенциалов на участке AC равна $2U_0$, а на участке DB U_0. Следовательно, напряжение U_{DC} при открытых диодах равно

$$U_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \varphi_B + U_0 - (\varphi_A - 2U_0) = \varphi_B - \varphi_A + 3U_0 = 3U_0 - U_{AB},$$

где φ_A, φ_B, φ_C и φ_D – потенциалы точек A, B, C и D соответственно. Поэтому ток через амперметр при открытых диодах равен

$$I_A = \frac{3U_0}{R} - \frac{U_{AB}}{R}. \tag{2}$$

Ток (2) при напряжении $U_{AB} = 5U_0/2$ совпадает с током до открывания диодов D_2 и D_3. Это значит, что зависимость тока через амперметр от U_{AB} при $U_{AB} > 5U_0/2$ — линейная убывающая функция, не имеющая разрыва в точке $U_{AB} = 5U_0/2$, с угловым коэффициентом наклона по модулю втрое большим, чем на участке $U < 3U_0/2$.

В случае, когда «+» источника подключен к B т.е. $U_{\text{AB}} < 0$, все диоды закрыты, и ток течет через три последовательно соединенных резистора. Его величина $I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R}$, при этом $I_A < 0$. График зависимости I_A от U_{AB} приведен на рисунке 13:

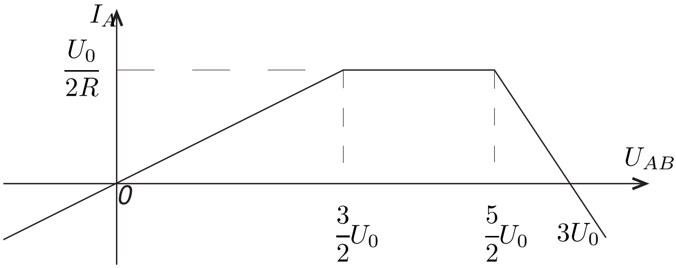


Рис. 13

Ответ:

$$I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R} \qquad \text{при } U_{\text{AB}} < \frac{3}{2}U_0,$$
$$I_A = \frac{U_0}{2R} \qquad \text{при } \frac{3}{2}U_0 < U_{\text{AB}} < \frac{5}{2}U_0,$$
$$I_A = \frac{3U_0 - U_{\text{AB}}}{R} \qquad \text{при } U_{\text{AB}} > \frac{5}{2}U_0.$$

Задача 5. Чунга-Чанга

Чебурашка и Гена видят, как Солнце перемещается с востока на запад с угловой скоростью
$$\omega = \frac{360^\circ}{24\ \text{ч}} = 15^\circ/\text{ч}.$$

Как следует из рисунка 14, Солнце видно из окон крокодила Гены от полудня, когда Солнце в зените, до времени, когда оно скроется за корпусом Чебурашки. При этом оно сместится на угол
$$\alpha = \omega T_1 = 30^\circ.$$

По аналогии найдём, что за время, пока Солнце светило в окно Чебурашки, оно сместилось на угол
$$\beta = \omega T_2 = 60^\circ.$$

Пусть высота одного этажа равна h, номер этажа на котором живёт Чебурашка n, а расстояние между корпусами вдоль экватора, соответственно, L. Тогда, исходя из рисунка 14, мы можем записать два уравнения:
$$\frac{L}{(100-10)h} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\frac{L}{(100-n)h} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Из них находим номер этажа, на котором жил Чебурашка:

$$n = 100 - 90\frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 70.$$

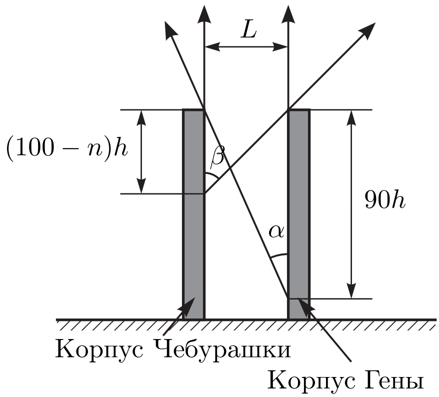


Рис. 14

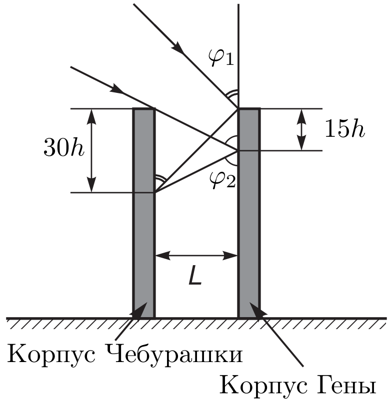


Рис. 15

Заметим, что в полдень (в 12 часов) Солнце находится строго в зените. Через некоторое время t_1 окна в корпусе Гены стали казаться Чебурашке золотыми. Это произошло тогда, когда прямые солнечные лучи, отраженные от окон верхнего этажа корпуса Гены, попали в окно Чебурашки (рис. 15). За время t_1 Солнце опустилось угол φ_1 такой, что

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L}{30h} = \sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_1 = 60^\circ.$$

Значит, $t_1 = \varphi_1/\omega = 4$ ч, и часы Чебурашки показывали 16 часов в момент, когда окна корпуса Гены стали казаться золотыми.

Пусть через время t_2 после полудня окна перестали казаться золотыми. В этот момент луч от Солнца, отражающийся от корпуса Гены и попадающий в окно Чебурашки, проходит через край корпуса Чебурашки. Найдём угол φ_2, который в этот момент будет составлять Солнце с вертикалью:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L}{15h} = 2\sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_2 \approx 73{,}9^\circ.$$

Значит, $t_2 = \varphi_2/\omega \approx 4{,}93$ ч. Окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми в течение 56 минут.

10 класс

Задача 1. Упругая система

Из условия следует, что сумма сил натяжения пружин всегда равна F, растяжения пружин в начальный момент одинаковы и равны $x_0 = F/k$, где $k = k_1 + k_2$, суммарная начальная энергия пружин $E_0 = F^2/2k$.

1. В момент, когда скорость груза максимальна, его ускорение равно нулю, значит первая пружина недеформирована, а вторая растянута силой F. Приравнивая работу силы F изменению энергии системы, получим

$$F\left(\frac{F}{k_2} - \frac{F}{k}\right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{F^2}{2k_2} - \frac{F^2}{2k},$$

откуда максимальная скорость груза:

$$v = F\sqrt{\frac{k_1}{mk_2(k_1 + k_2)}}.$$

2. Так как сумма сил натяжения пружин постоянна, минимальность одной из них означает максимальность другой, поэтому в момент минимального удлинения одной из пружин скорость изменения длины будет нулевой у обеих пружин, а значит, будет равна нулю и скорость груза. Тогда для растяжений пружин x_1 и x_2 в этот момент получим систему уравнений:

$$\begin{cases} k_1x_1 + k_2x_2 = F, \\ F(x_2 - x_0) + \dfrac{kx_0^2}{2} = \dfrac{k_1x_1^2}{2} + \dfrac{k_2x_2^2}{2}. \end{cases}$$

Решение системы существенно облегчается, если заметить, что начальные значения растяжений $x_1 = x_2 = x_0$ должны ей удовлетворять, так как скорость груза в начальный момент равна нулю. Второе решение

$$x_1 = -x_0, \qquad x_2 = x_0\frac{2k_1 + k_2}{k_2}.$$

Таким образом удлинение первой пружины в момент, когда её длина будет минимальна, равно

$$x_1 = -\frac{F}{k_1 + k_2}.$$

Отрицательный знак означает, что пружина в этот момент будет сжата.

Задача 2. Исследование планеты

Рассмотрим участок атмосферы площадью поперечного сечения S, находящийся между слоями с координатами z и $z+\Delta z$. На него действуют: снизу — сила давления $p(z)S$, сверху — сила давления $p(z+\Delta z)S$; также действует направленная вниз сила тяжести $\rho S\Delta zg$, где ρ — плотность воздуха на данной высоте. Так как атмосфера находится в равновесии, сумма сил, приложенных к рассматриваему участку, равна 0:

$$(p(z) - p(z+\Delta z))S - \rho S\Delta zg = 0$$

Перепишем данное уравнение в виде $\Delta p = -\rho g\Delta z$, где $\Delta p = p(z+\Delta z) - p(z)$. Учитывая, что температура атмосферы T выражается через давление, плотность, молярную массу μ и универсальную газовую постоянную R соотношением $p = \frac{\rho}{\mu}RT$, получим:

$$T = \frac{p}{-\Delta p/\Delta z}\frac{\mu g}{R}$$

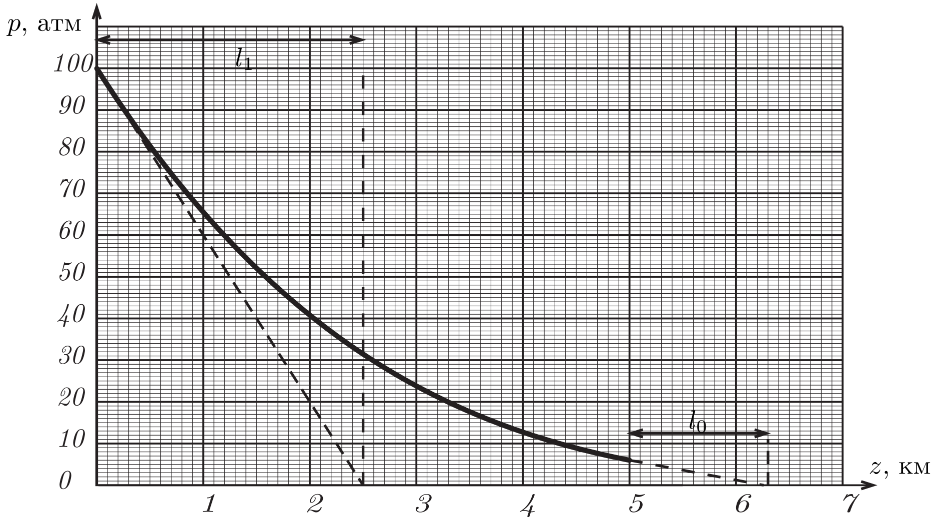


Рис. 16

Величины μ и g можно считать постоянными: атмосферу считаем состоящей из углекислого газа, g считаем постоянным, так как радиус планеты много больше величины перемещения спускаемого аппарата. Следовательно, температура пропорциональна величине:

$$T \propto \frac{p}{\Delta p/\Delta z}.$$

Это выражение при $z = 0$ и $z = 5$ км можно найти графически: провести касательную к графику и отметить точку пересечения касательной с горизонтальной осью. Учитывая, что $l_0 = 2{,}5$ км, $l_1 = 1{,}25$ км, для температуры T_0 у поверхности планеты получим $T_0 = T_1 l_0 / l_1 = 680 \pm 40$ K. Ответ записан с погрешностью, так как касательные проводятся с некоторой точностью. Нахождение погрешностей не требовалось и не оценивается.

Задача 3. Термоэлектродинамика

Обозначим через V, P и T начальные значения объёма, давления и температуры газа, d — начальное расстояние между дисками, а те же величины с индексом 1 — те же параметры в конечном состоянии. Так как расстояние между дисками много меньше их радиуса, напряжённость поля диска можно вычислять, считая его равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S},$$

где S — площадь дисков.

Тогда на второй диск со стороны первого действует сила $F = qE$:

$$F = qE = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Сила пропорциональна квадрату заряда и не зависит от расстояния между пластинами, поэтому конечное равновесное давление будет в четыре раза меньше начального.

Энергия конденсатора равна

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = Fd = PV.$$

Рассмотрим систему, состоящую из газа и заряженных пластин. Её энергия равна

$$W = PV + \frac{3}{2}PV = \frac{5}{2}PV = \frac{5}{2}\nu RT.$$

Энергия системы в конечном равновесном состоянии должна равняться начальной энергии:

$$\frac{5}{2}P_1V_1 = \frac{3}{2}PV + \frac{P}{4}V, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{5}{2}\nu RT_1 = \frac{7}{4}\nu RT, \qquad \text{и} \qquad T_1 = \frac{7}{10}T.$$

Теперь, используя $P_1 = P/4$:

$$\frac{P_1V_1}{PV} = \frac{T_1}{T} = \frac{7}{10}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{d_1}{d} = \frac{V_1}{V} = \frac{14}{5}.$$

Полученный ответ подтверждает предположение о малости d в конечном состоянии.

Задача 4. Стенка с дыркой

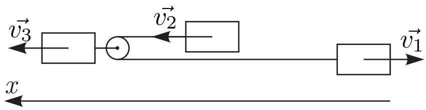


Рис. 17

При упругом ударе бруска 1 о стену изменяется направление его скорости при сохранении величины скорости. В этот момент времени скорости равны $v_1 = -v$, $v_2 = v_3 = v$ (рис. 17).

1. Резинка будет максимально натянутой, когда скорость увеличения её длины станет равна нулю. Эту скорость можно выразить через скорости брусков в момент максимального растяжения:

$$v_{\text{растяжения}} = 2v_3 - v_2 - v_1 = 0. \tag{20}$$

На систему не действуют внешние силы, поэтому, из закона сохраниения импульса следует:

$$v_3 + v_2 + v_1 = v. \tag{21}$$

Запишем второй закон Ньютона для первого и второго брусков:

$$m\frac{\Delta v_2}{\Delta t} = T, \quad m\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = T.$$

Отсюда видно, что изменение скоростей первого и второго бруска в любой момент времени связано соотношением $\Delta v_1 = \Delta v_2$, а значит, и суммарные изменения скоростей связаны таким же образом:

$$v_2 - v = v_1 - (-v). \tag{22}$$

Из трех уравнений (20), (21), (22) получаем значения скоростей в момент времени, когда резинка максимально растянута

$$v_1 = -\frac{2}{3}v, \quad v_2 = \frac{4}{3}v, \quad v_3 = \frac{1}{3}v.$$

2. Обозначим скорости брусков в момент времени, когда резинка снова не натянута, как v_1, v_2, v_3. Закон сохранения импульса (21) и связь между скоростями v_1 и v_2 (22) остаются прежними.

Условием того, что резинка не натянута, является равенство нулю потенциальной энергии резинки. Из закона сохранения энергии следует:

$$3v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \tag{23}$$

Из уравнений (21), (22), (23) получаем два решения. Первое решение:

$$v_1 = -v, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v,$$

соответствует начальной ситаувции, которая больше не повторится.

Второе решение:

$$v_1 = -\frac{1}{3}v, \quad v_2 = \frac{5}{3}v, \quad v_3 = -\frac{1}{3}v,$$

является ответом на второй вопрос задачи.

Задача 5. Нелинейность

Сначала установим, при каком требовании к нагрузке мощность потерь максимальна для данного источника. Пусть ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны соответственно $\mathscr{E}$ и r , а сила тока, протекающего через нагрузку равна I. Тогда мощность потерь $P_{\text{н}} = IU_{\text{н}} = I(\mathscr{E} - Ir)$. В зависимости от сопротивления нагрузки R сила тока может изменяться от нуля (если R бесконечно велико) до тока короткого замыкания источника $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{r}$ (при $R = 0$). Легко заметить, что максимум $P_{\text{н}}$ соответствует $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{2r} = \frac{I_0}{2}$ (это координата вершины параболы – графика функции $P_{\text{н}}(I)$). В этом случае сопротивление нагрузки $R = r$, а напряжение $U_{\text{н}} = IR = \frac{\mathscr{E}}{2}$. Значит, при таком напряжении сила тока, протекающего и через лампу, и через диод равна $\frac{I_0}{2}$, и связь тока с напряжением для них дается выражениями:

$$I_{\text{л}} = \frac{I_0}{2}\sqrt{\frac{2U_{\text{л}}}{\mathscr{E}}} = \sqrt{\frac{I_0 U_{\text{л}}}{2r}}, \qquad I_{\text{д}} = \frac{I_0}{2}\left(\frac{2U_{\text{д}}}{\mathscr{E}}\right)^2 = \frac{2U_{\text{д}}^2}{I_0 r^2}.$$

Обратные выражения:

$$U_{\text{л}} = \frac{2r}{I_0}I_{\text{л}}^2, \qquad U_{\text{д}} = r\sqrt{\frac{I_0 I_{\text{д}}}{2}}.$$

Далее можно действовать двумя путями:

Первый способ (алгебраический):

Запишем для последовательного подключения уравнение для напряжения на нагрузке (общий ток через диод и лампу обозначим I_1):

$$\mathscr{E} - I_1 r = (I_0 - I_1)r = U_{\text{л}}(I_1) + U_{\text{д}}(I_1) = \frac{2r}{I_0}I_1^2 + r\sqrt{\frac{I_0 I_1}{2}}$$

Если в этом уравнении сделать подстановку $I_1 = I_0 x$, то для x получится уравнение $1 - x = 2x^2 + \sqrt{\frac{x}{2}}$. Оно сводится к уравнению четвертой степени, но решать его не нужно. Отметим только, что в левой части стоит монотонно убывающая функция от x, а в правой – монотонно растущая при $x > 0$. Поэтому в этой области данное уравнение имеет один корень. Запишем теперь также уравнение для параллельного подключения (ток источника I_2):

$$\mathscr{E} - I_2 r = (I_0 - I_2)r = U_{\text{л}}(I_{\text{л}}) = U_{\text{д}}(I_{\text{д}}) = \frac{2r}{I_0}I_{\text{л}}^2 = r\sqrt{\frac{I_0 I_{\text{д}}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} I_{\text{л}} = \sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_2)}{2}} \\ I_{\text{д}} = \frac{2(I_0 - I_2)^2}{I_0} \end{cases}$$

и при этом $I_2 = I_л + I_д = \sqrt{\frac{I_0(I_0-I_2)}{2}} + \frac{2(I_0-I_2)^2}{I_0}$. Это уравнение для I_2, в котором можно сделать подстановку $I_2 = I_0(1-y)$, и тогда $1-y = 2y^2+\sqrt{\frac{y}{2}}$. Это уравнение ничем не отличается от уравнения для x, и у него один корень. Значит, $y = x$, или $I_1+I_2 = I_0$! Заметим, что мощность потерь в первом случае $P_1 = I_1(\mathscr{E}-I_1 r) = rI_1(I_0-I_1)$, а во втором: $P_2 = I_2(\mathscr{E}-I_2 r) = rI_2(I_0 - I_2) = r(I_0 - I_1)I_1 = P_1 = 7{,}2$ Вт.

Второй способ (графический): Построив графики вольтамперных характеристик (ВАХ) лампы и диода, можно графически построить и графики ВАХ двух нагрузок, соответствующих последовательному и параллельному соединению (рисунки 1, 2).

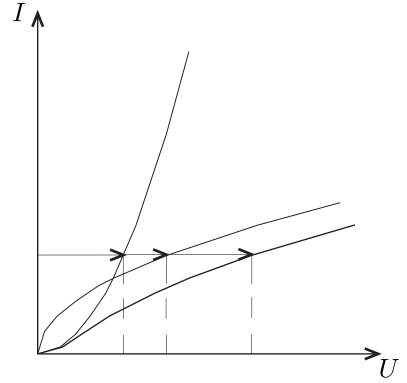


Рис. 18

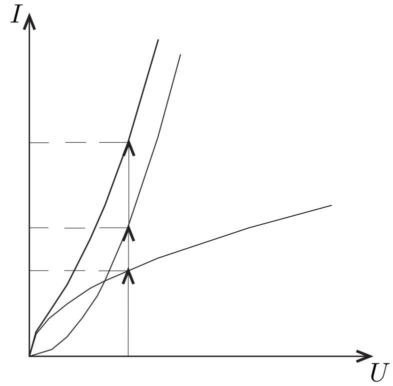


Рис. 19

Если в качестве единиц масштабов по осям тока и напряжения выбрать соответственно I_0 и $\mathscr{E}$, и построить их на одном графике (рисунок 3), то они будут симметричны относительно биссектрисы координатного квадранта. Токи через источник для каждой из нагрузок (I_1 и I_2) определяются решением уравнения $U(I) = \mathscr{E} - Ir$, то есть пересечением на графике 3 ВАХ нагрузки с прямой $\frac{U}{\mathscr{E}} = 1 - \frac{I}{I_0}$, которая также обладает указанной симметрией, поэтому точки пересечения расположены также симметрично, и поэтому:

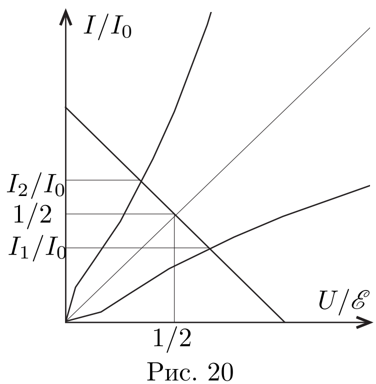


Рис. 20

$$\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} = 1 \Rightarrow I_1 + I_2 = I_0$$

Теперь снова легко обнаружить, что: $P_2 = I_2(\mathscr{E} - I_2 r) = rI_2(I_0 - I_2) = r(I_0 - I_1)I_1 = P_1 = 7{,}2$ Вт. Окончательно, $P_2 = P_1 = 7{,}2$ Вт.

11 класс

Задача 1. Колебания

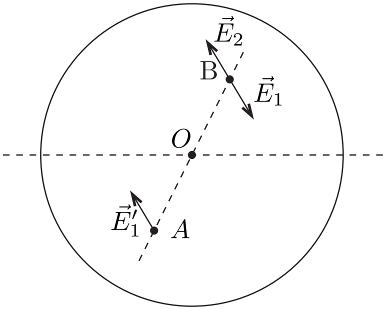


Рис. 21

Известно, что напряженность электростатического поля внутри равномерно заряженной сферы равна нулю. Поле в некоторой точке A складывается из полей, создаваемых верхней и нижней половинами сферы:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0. \qquad (1)$$

Пусть точка B симметрична точке A относительно центра сферы (рис. 21). Из соображения симметрии напряженность поля, создаваемого в точке A нижней половиной сферы, равна по модулю и противоположна по направлению полю, создаваемому в точке B верхней половиной сферы : $\vec{E}_1' = -\vec{E}_1$. Тогда по формуле (1) получим $\vec{E}_1' = \vec{E}_2$, то есть величины напряженности поля, создаваемого однородно заряженной полусферой в симметричных относительно ее центра точках, равны.

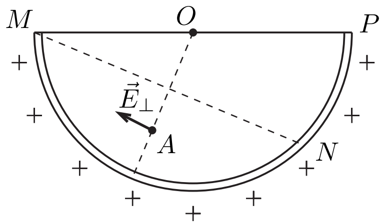


Рис. 22

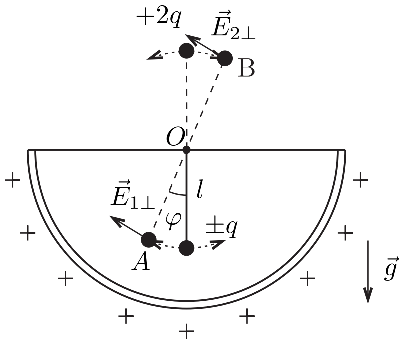


Рис. 23

Определим направление составляющей поля, перпендикулярной нити маятника, в точке A (рис. 22). Проведем плоскость, перпендикулярную нити маятника, проходящую через левый край сферы. Тогда часть MN сферы создает поле, параллельное нити маятника. Составляющая поля, перпендикулярная нити маятника, создается только оставшейся частью полусферы, следовательно большая часть заряда, создающего это поле, расположена в части полусферы, более удаленной от точки A; значит, составляющая поля направлена в сторону смещения маятника.

После изменения заряда шарика его положение равновесия должно располагаться выше точки подвеса, так как иначе невозможно равенство старого и нового периодов. Когда шарик расположен выше точки подвеса, при его смещении от положения равновесия возвращающая сила может возникнуть только за счет электростатического взаимодействия, следовательно должно быть $q_2 > 0$ (рис. 23).

В нижней точке при отклонении маятника на небольшой угол φ от положения равновесия возникает возвращающая сила f_1. Вклад в эту силу за счет электрического взаимодействия заряда с чашей пропорционален величине заряда и углу отклонения, поэтому:

$$f_1 = (\alpha q_1 - mg)\varphi.$$

В верхней точке (заряд шарика q_2) возвращающая сила равна:

$$f_2 = (-\alpha q_2 + mg)\varphi.$$

Соответствующие уравнения колебаний имеют вид (здесь l — длина нити маятника):

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} + (mg - \alpha q_1)\,\varphi = 0 &\quad \text{для нижней точки,}\\ ml\ddot{\varphi} + (\alpha q_2 - mg)\,\varphi = 0 &\quad \text{для верхней точки.} \end{aligned}$$

Тогда частоты колебаний вблизи нижнего и верхнего положений равновесия будут равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \beta q_1,\\ \omega_2^2 &= -\omega_0^2 + \beta q_2, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = g/l$ - частота колебаний в незаряженной полусфере, $\beta = \alpha/(ml)$ — константа.

Условие задачи может реализовываться в двух случаях: $q_1 > 0$ и $q_1 < 0$. В обоих случаях шарик вначале колеблется вблизи нижнего, а затем вблизи верхнего положения равновесия.

Случай 1

Рассмотрим случай $q_1 > 0$. Тогда $q_2 = 2q_1$.

По условию $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, следовательно, получаем

$$\omega_0^2 - \beta q_1 = -\omega_0^2 + 2\beta q_1, \qquad \text{отсюда} \qquad \beta q_1 = \frac{2}{3}\omega_0^2$$

Следовательно $\omega^2 = \frac{1}{3}\omega_0^2$ и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0\sqrt{3} = 1{,}73 \text{ с}.$$

Здесь $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ — период колебаний маятника в незаряженной полусфере.

Случай 2

Рассмотрим случай $q_1 < 0$. Тогда $q_2 = -2q_1$.

Аналогично случаю 1 приравниваем значения частот ω_1 и ω_2, находим $\beta q_1 = -2\omega_0^2$. Отсюда $\omega^2 = 3\omega_0^2$ и период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \text{ с.}$$

Задача 2. Проводящий кубик

Примем потенциал вершины B за ноль. При пропускании через вершины A и B тока I, из соображений симметрии, получим, что потенциал точки M равен

$$\varphi_M = \frac{1}{2}\varphi_A = \frac{1}{2}Ir,$$

а разность потенциалов

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = (\varphi_A - \varphi_M) + (\varphi_M - \varphi_C) = \frac{1}{2}Ir + U.$$

Пустим через вершину B ток I в обратном направлении, так, чтобы скомпенсировать выходящий из неё ток I, и выведем этот ток через вершину C. Для этого придётся на вершину C подать потенциал, равный

$$\varphi_C = -\left(\frac{1}{2}Ir + U\right).$$

Напомним, что $\varphi_B = 0$. Разность потенциалов между вершинами A и C окажется равной

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = 2\left(\frac{1}{2}Ir + U\right) = 2U + Ir.$$

По принципу суперпозиции, ток I будет входить в вершину A, а выходить и из вершины C (из вершины B ток не выходит и не входит). По закону Ома:

$$R_{AC} = \frac{U_{AC}}{I} = \frac{2U}{I} + r = 36 \text{ кОм.}$$

Пусть длина ребра куба равна a, толщина пластины — d. Заметим, что сопротивление куба $R \sim L/S \sim a/ad = 1/d$ – не зависит от длины a стороны квадрата, где $L \sim a$ – характерный размер, а $S \sim ad$ – характерное поперечное сечение пластины при расчёте сопротивления кубика. Следовательно, при изменении длины стороны квадратной пластины и неизменной её толщине d, сопротивление пластины не изменится.

Задача 3. Реактивная трубка

Такая трубка с нагревателем представляет собой реактивный двигатель, принцип работы которого аналогичен принципу работы водомётного катера. Действительно, из-за нагрева и, соответственно, расширения, скорость горячего воздуха на выходе из трубки оказывается больше скорости холодного воздуха на входе в трубку. В результате возникает реактивная сила, разгоняющая трубку. Найдём выражение для этой реактивной силы тяги. В системе отсчета, связанной с трубкой, поток воздуха с небольшой скоростью продувается через трубу с нагревателем в виде сетки. (Кстати, это стандартная лабораторная установка для измерения теплоёмкости газов C_p при постоянном давлении). Найдём изменение температуры воздуха. Пренебрегая изменением кинетической энергии потока воздуха, запишем закон сохранения энергии для массы m газа, протекающего через трубку в единицу времени. Если этот воздух в холодном состоянии занимал объём V_1, а в горячем V_2, то по первому началу термодинамики подведённая к газу за единицу времени теплота q расходуется на изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и работу газа против внешнего давления $A = P(V_2 - V_1)$: $q = \Delta U + A$, или

$$q = U_2 - U_1 + PV_2 - PV_1 = (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) =$$
$$= \frac{m}{\mu}\Big((C_V T_2 + RT_2) - (C_V T_1 + RT_1)\Big) = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T,$$

где $C_V = 5R/2$ — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, $C_P = C_V + R = 7R/2$ молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — универсальная газовая постоянная, T_2 и T_1 — температуры воздуха на выходе и на входе в трубку, соответственно. Если скорость холодного воздуха v, а изменение скорости течения воздуха Δv, то реактивная сила:

$$F_p = m\Delta v = \frac{mv\Delta v}{v} = \frac{mv\Delta T}{T} = \frac{v\mu q}{C_P T} = \beta v.$$

Сила тяги оказывается пропорциональной скорости движения трубки. Коэффициент пропорциональности:

$$\beta = \frac{\mu q}{C_P T} = 6{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{кг/с}.$$

По закону Ньютона:

$$M dv = F_p dt = \beta v dt = \beta dS, \quad \text{следовательно,} \quad M\Delta v = \beta S.$$

Окончательно, $v = v_0 + \dfrac{\beta S}{M} = 9$ см/с.

Задача 4. Космический объект

При угле φ между направлением движения объекта и направлением к наблюдателю посланные через время T_0 импульсы будут приниматься наблюдателем через промежуток времени $T = T_0(1 + (v/c)\cos\varphi)$, где v - скорость объекта.

В самом деле, если из точки A испущен первый импульс, то следующий импульс испускается через время T_0 из точки B на расстоянии vT_0. Пути к наблюдателю почти параллельны, а разница их составляет отрезок $BC = AB\cos\varphi = vT_0\cos\varphi$ (рис. 24), проходимый за дополнительное время $(vT_0\cos\varphi)/c$, где c - скорость света. В сумме с T_0 это и дает выражение для T. Пока угол φ можно считать почти постоянным, такое же соотношение будет верным для любых промежутков времени Δt_0 при испускании сигналов и Δt при их приеме:

$$\Delta t = \Delta t_0(1 + (v/c)\cos\varphi).$$

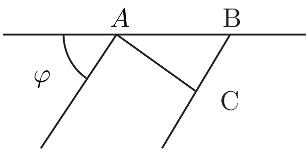


Рис. 24

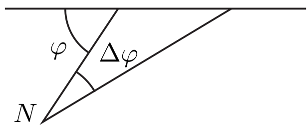


Рис. 25

Теперь вычислим приращение периода при приеме при изменении угла φ на $\Delta\varphi$ (если из направление точки N (наблюдатель) к космическому объекту повернулось на угол $\Delta\varphi$, то начальный угол переходит в угол $\varphi - \Delta\varphi$ (рис. 25)):

$$\Delta T = \left|\frac{dT}{d\varphi}\right|\Delta\varphi = T_0\frac{v}{c}\sin\varphi\Delta\varphi$$

($v\sin\varphi$ это составляющая скорости, перпендикулярная к радиусу вектору).

Тогда при времени перемещения Δt_0, отвечающему времени наблюдения Δt имеем $\Delta\varphi = v\Delta t_0\sin\varphi/r$, где r - искомое расстояние. Исключая скорость из выражения для ΔT, получим:

$$\Delta T = T_0(\Delta\varphi)^2 r/c\Delta t_0 = T(\Delta\varphi)^2 r/c\Delta t$$

поскольку $T_0/T = \Delta t_0/\Delta t$. Окончательно получаем:

$$r = \frac{c\Delta T\Delta t}{T(\Delta\varphi)^2}.$$

Поскольку рассмотрение проводилось только в системе отсчёта наблюдателя, то результаты применимы в общем случае, а не только при скоростях объекта $v \ll c$.

Задача 5. «Миллиавтомобиль»

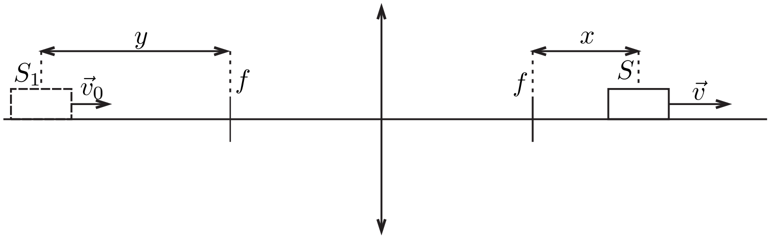


Рис. 26

Если расстояние от источника S до переднего фокуса линзы равно x, а от его изображения до заднего фокуса y, то по формуле тонкой линзы в форме Ньютона ($xy = f^2$) для малых перемещений Δx и Δy получим:

$$x\Delta y + y\Delta x = 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{v}{v_0} = -\frac{x}{y} = -\frac{xy}{y^2} = -\frac{f^2}{y^2}.$$

отсюда скорость автомобиля: $v = -v_0 f^2/y^2$. Знак «$-$» означает, что если автомобиль удаляется от фокуса (x растет, то есть $v > 0$), его изображение приближается к фокусу (y уменьшается, $v_0 < 0$). Ускорение автомобиля:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\frac{v_0 f^2}{y^3}\frac{dy}{dt} = 2\frac{v_0^2 f^2}{y^3} = 2\frac{v_0^2 x^3}{f^4}.$$

Это ускорение не может превышать (по модулю) значения $a_{max} = \mu g$. Следовательно, получаем неравенство:

$$\frac{2v_0^2|x|^3}{f^4} \leqslant \mu g, \qquad \text{откуда} \qquad |x| \leqslant f\sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}},$$

т.е. автомобиль не может удалиться от фокуса на расстояние большее, чем $f\sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}$. Следовательно, расстояние l от автомобиля до линзы может изменяться в пределах:

$$f\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right) \leqslant l < f \qquad \text{или} \qquad f < l \leqslant f\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right).$$

Изображение может быть как мнимым ($l < f$), так и действительным ($l > f$).

Если $v_0 < \sqrt{\frac{\mu g f}{2}}$, то

$$0 < l < f \qquad \text{или} \qquad f < l \leqslant f\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right).$$