Условия, возможные решения и критерии оценивания задач 9 класса

Теоретический тур

Задание 1. Тише едешь... В безветренную погоду на озере была проведена серия испытаний радиоуправляемой модели катера с бензиновым двигателем, в ходе которых выяснилось, что при скорости $v_1 = 5{,}00$ км/ч путевой расход топлива составляет $\lambda_1 = 20{,}0$ г/км, а при скорости $v_2 = 15{,}0$ км/ч расход равен $\lambda_2 = 40{,}0$ г/км. Запас топлива на борту модели $M = 100$ г.

- Выведите зависимость путевого расхода топлива λ от скорости v.
- Какое максимальное время τ_x может работать двигатель у неподвижной модели?
- При какой скорости модели v_0 путевой расход топлива минимален и каково его значение λ_0? Полученные результаты должны быть найдены с погрешностью, не превышающей 1%.
- На какое максимальное расстояние L_0 и за какое время τ_0 сможет уплыть модель?
- Какие значения τ_1 может принимать время прохождения моделью расстояния $L_1 = 3$ км?

Примечание. Считайте, что при работе двигателя массовый расход топлива μ (г/с) **линейно** зависит от мощности силы сопротивления, а сила сопротивления **пропорциональна** скорости модели относительно воды. Модель движется равномерно и при любой скорости ее осадка не меняется.

Задание 2. С дымком При проведении аэрофотосъёмки была получена фотография, на которой видны два шлейфа дыма от паровозов (рис. 9.1). Одной клетке на фотографии соответствует 50 м на местности. Известно, что один паровоз двигался равномерно по кольцевой ветке железной дороги, а другой с такой же скоростью по прямой.
Определите:

- направление скорости ветра;
- радиус R кольцевой железной дороги;
- отношение скорости паровоза v к скорости ветра u;
- направление прямой железнодорожной ветки (выполнить построения с помощью циркуля и линейки).

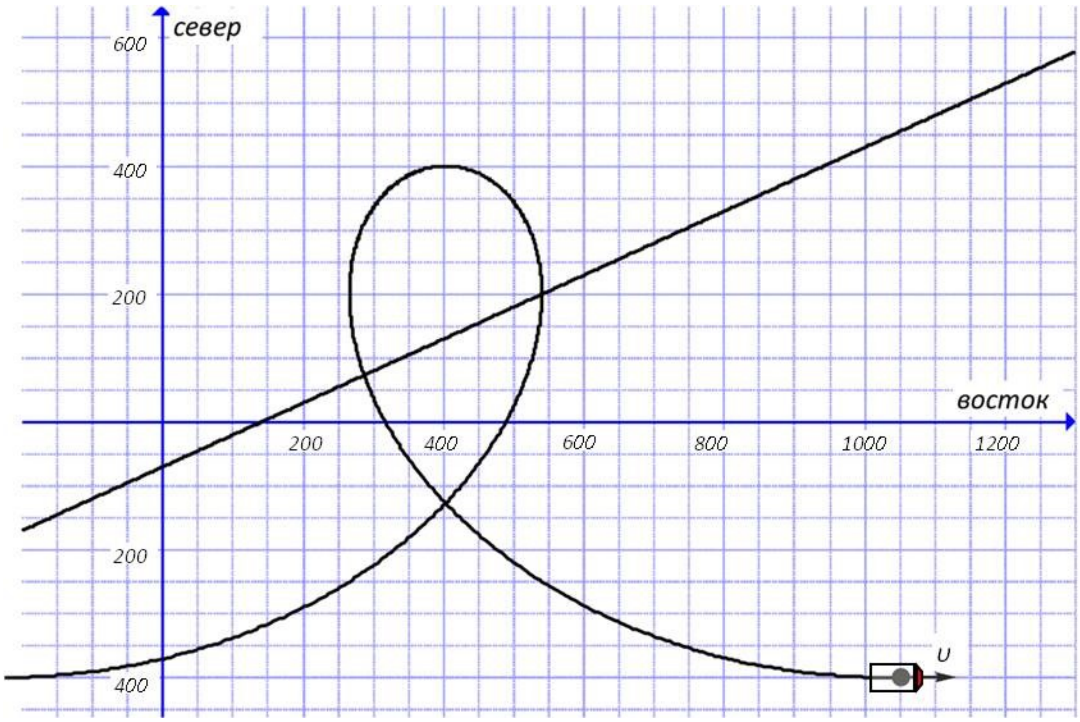


Рис. 9.1

Задание 3. Нелинейная спираль Сопротивление R спирали зависит от температуры по закону $R = R_0 + \alpha(t - t_0)$, где t – температура спирали, $R_0 = 10$ Ом, $\alpha = 40{,}0 \cdot 10^{-3}$ Ом/°С, $t_0 = 20$°С. На спираль подаётся напряжение $U = 220$ В, и за время $\tau_1 = 100$ мкс она нагревается от t_0 до $t_1 = 80$°С.

- До какой температуры t_2 нагреется спираль за время $\tau_2 = 334$ мкс от момента включения?

- Определите теплоёмкость спирали.

При данных температурах и временах излучением и теплоотдачей можно пренебречь.

Задание 4. Два нелинейных элемента Электрическая цепь состоит из двух одинаковых нелинейных элементов X, потенциометра, сопротивление между неподвижными контактами которого $R = 100$ Ом, и идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 10$ В(рис. 9.2). Вольтамперная характеристика элемента X приведена на рис. 9.3.

Определите:

1. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при крайних положениях движка потенциометра.

2. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра в центре.

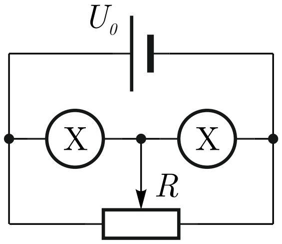


Рис. 9.2

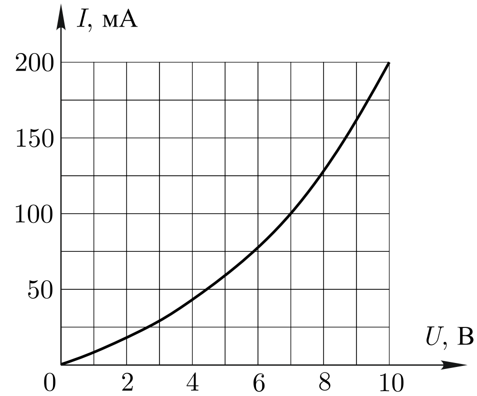


Рис. 9.3

3. Минимальную суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах. При каких положениях движка потенциометра эта мощность достигается? Ответ обоснуйте.

4. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра, в котором сопротивление его левого плеча равно 25 Ом.

Задание 5. Лазер в сосуде Внутри стеклянного тонкостенного цилиндрического сосуда радиуса R вблизи его стенки в точке A расположен микролазер, размеры которого гораздо меньше R. Сосуд заполнен водой, а снаружи находится воздух. Половина внутренней поверхности сосуда, соответствующая дуге ACB, зачернена и поглощает свет. Изначально луч лазера направлен в точку B.

Лазер начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки в плоскости рисунка вокруг оси, проходящей через точку A (рис. 9.4). Показатель преломления воды $n = 4/3$.

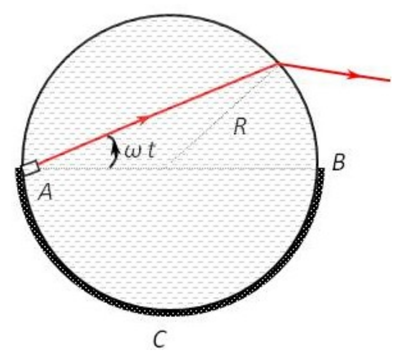


Рис. 9.4

- Через какое время τ луч перестанет выходить из сосуда?
- Чему будет равна скорость «зайчика» на зачернённой поверхности цилиндра в момент времени $1{,}5\tau$ от начала его движения?

Примечание. Вам может потребоваться закон Снелла: $n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2$, где n_1 и n_2 – показатели преломления света в первой и второй среде, φ_1 и φ_2 углы падения и преломления.

Возможные решение и критерии оценивания

Возможное решение Т-9-1

При движении со скоростью v расстояние L катер преодолевает за время $\tau = \dfrac{L}{v}$. При этом мощность сил сопротивления равна $N = Fv = kv^2$, где k – размерный коэффициент. Так как по условию массовый расход топлива линейно зависит от мощности сил сопротивления $\mu = \mu_0 + \alpha N$, где μ_0 и α – размерные коэффициенты, то линейный расход топлива равен $\lambda = \dfrac{\mu\tau}{L} = \alpha v + \dfrac{\mu_0}{v}$.

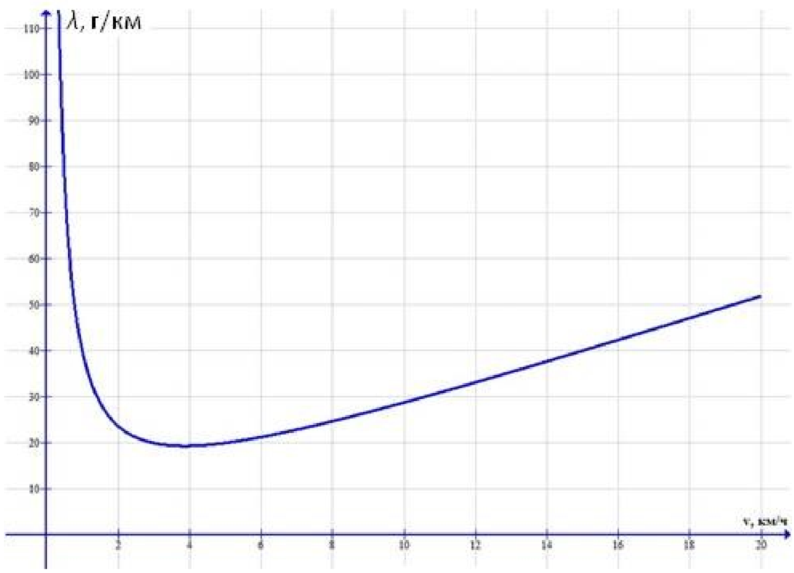


Рис. 9.10

Найдем константы α и μ_0 по известным значениям v_1, λ_1, v_2 и λ_2. Для этого запишем уравнения для линейного расхода $\lambda_1 = \alpha v_1 + \dfrac{\mu_0}{v_1}$ и $\lambda_2 = \alpha v_2 + \dfrac{\mu_0}{v_2}$. Решая систему, получим: $\alpha = \dfrac{\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}{v_1^2 - v_2^2} = 2{,}5\dfrac{\text{г} \cdot \text{ч}}{\text{км}^2}$ и $\mu_0 = \dfrac{v_1 v_2(v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1)}{v_1^2 - v_2^2} = 37{,}5\dfrac{\text{г}}{\text{ч}}$. С учетом найденных размерных коэффициентов уравнение для линейного расхода приобретает вид: $\lambda = 2{,}5v + \dfrac{37{,}5}{v}$. График этой зависимости представлен на рисунке 9.10.

В режиме холостого хода двигатель неподвижной модели сможет проработать $\tau_x = \dfrac{M}{\mu_0} = 160$ мин. Умножив полученное выражение для λ на v, получим квадратное уравнение (с размерными коэффициентами, полученными ранее)

$$2{,}5v^2 - \lambda v + 37{,}5 = 0, \tag{9.1}$$

дискриминант которого обращается в ноль при $\lambda_0 = 19{,}4$ г/км, что соответствует $v_0 = 3{,}87$ км/ч.

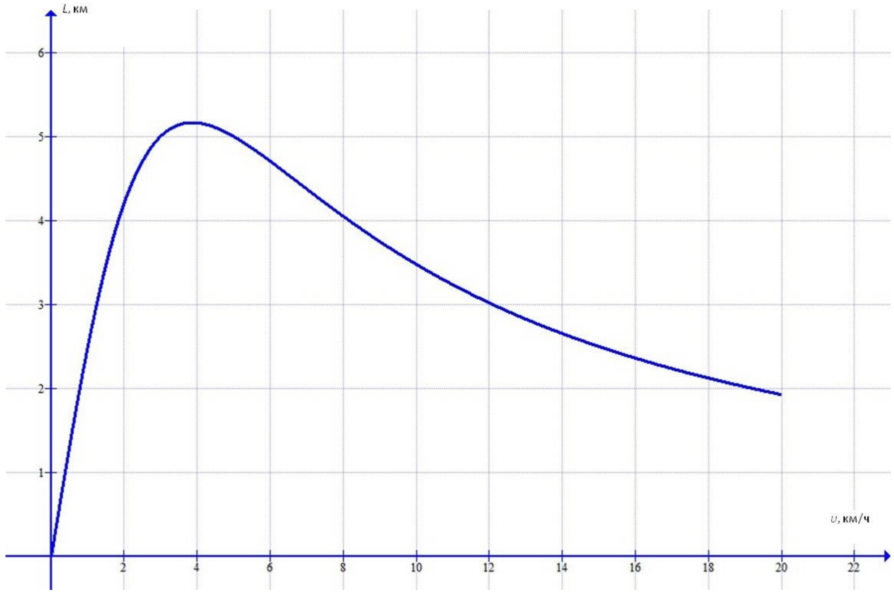


Рис. 9.11

Максимальное расстояние, на которое может уплыть модель, двигаясь с оптимальной скоростью, $L_0 = \dfrac{M}{\lambda_0} = 5{,}2$ км, и на его предоление требуется время $\tau_0 = \dfrac{L_0}{v_0} = 80$ мин. Зависимость предельной дальности движения от скорости приведена на рисунке 9.11.

Так как требуемое расстояние $L_1 = 3$ км меньше предельной дальности L_0, то модель не обязана придерживаться оптимальной стратегии и может плыть быстрее или медленнее. Из ранее полученного квадратного уравнения $2{,}5v^2 - \lambda v + 37{,}5 = 0$ с учетом $\lambda = \dfrac{M}{L_1} = \dfrac{100}{3}$ г/км. Выбирая при решении больший корень, находим максимально допустимую скорость $v_{11} = 12{,}1$ км/ч, при которой еще хватает топлива на заданной дистанции L_1, и получаем соответствующее ей минимально возможное время движения 15 мин. Большему корню $v_{12} = 1{,}24$ км/ч соответствует максимально возможное время движения 145 мин. Окончательно получаем $\tau_1 \in [15 \text{ мин}; 145 \text{ мин}]$.

Критерии оценивания Т-9-1

1. Выражение для мощности двигателя через скорость .... 1 балл
2. Получена общая зависимость линейного расхода от скорости .... 1 балл

- $\mu = \lambda v$ .... 0,5 балла
- $\lambda = \dfrac{\mu_0}{\nu} + \alpha v$ .... 0,5 балла

3. Найдены значения коэффициентов зависимости $\lambda(v)$ .... 1 балл

- численное значение μ_0 .... 0,5 балла
  - если есть выражение для μ_0 без численного значения .. 0,3 балла
- численное значение α .... 0,5 балла
  - если есть выражение для α без численного значения ... 0,3 балла

4. Найдено максимальное время работы на холостом ходу .... 1 балл

- если есть выражение для τ_x без численного значения .... 0,5 балла

5. Найден минимальный линейный расход и оптимальная скорость .... 3 балла

- идея нахождения .... 1 балл
- численное значение λ_0 .... 1 балл
  - если есть выражение для λ_0 без численного значения .. 0,5 балла
- численное значение v_0 .... 1 балл
  - если есть выражение для v_0 без численного значения .. 0,5 балла

6. Найдено предельное расстояние и время движения до него .... 1 балл

- численное значение L_0 .... 0,5 балла
  - если есть выражение для L_0 без численного значения .. 0,3 балла
- численное значение τ_0 .... 0,5 балла
  - если есть выражение для τ_0 без численного значения .. 0,3 балла

7. Получен диапазон времен движения на заданную дальность .... 2 балла

- идея нахождения дипазона .... 1 балл
  - если идея нахождения не для всех значений τ_1 .... 0,5 балла

- найден диапазон времен движения .... 1 балл
  - если найдены не все значения τ_1 .... 0,5 балла

Примечание. Минус 0,1 балла за запись численных ответов с необоснованно завышенной точностью (слишком много значащих цифр).

Возможное решение Т-9-2

Так как паровоз находится в точке B и шлейф расположен западнее, можно сделать вывод, что дует восточный ветер (на запад).
Следовательно, расстояние между точками A и B в направлении с севера на юг (16 клеток = 800 м) определяет диаметр кольцевой линии (радиус $R = 400$м).

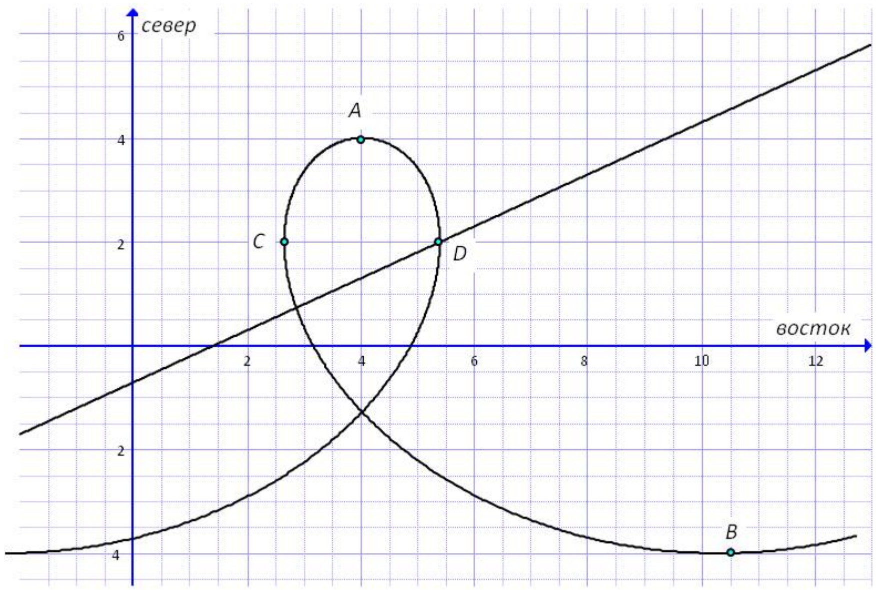


Рис. 9.12

Касательная к шлейфу в точке D направлена с севера на юг. По закону сложения скоростей такое возможно, если в системе отсчета паровоза скорость ветра w направлена вдоль меридиана. Так как точка D расположена южнее точки A на $R/2$, угол $\alpha = 30°$ и $v = 2u$.

Применим закон сложения скоростей. Шлейф дыма от паровоза, движущегося по прямолинейному пути, направлен вдоль скорости ветра относительно паровоза. Но сам паровоз может двигаться в двух разных направлениях.

Из произвольной точки проведем отрезок в западном направлении до пересечения со шлейфом (точка L). Это будет вектор скорости ветра u. Построим окружность вдвое большего радиуса с центром в точке O, точка пересечения которой со шлейфом K задаст направление KO вектора

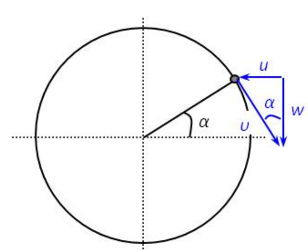


Рис. 9.13

скорости поезда относительно земли $v = 2u$. Скорость ветра в системе отсчета паровоза направлена вдоль шлейфа.

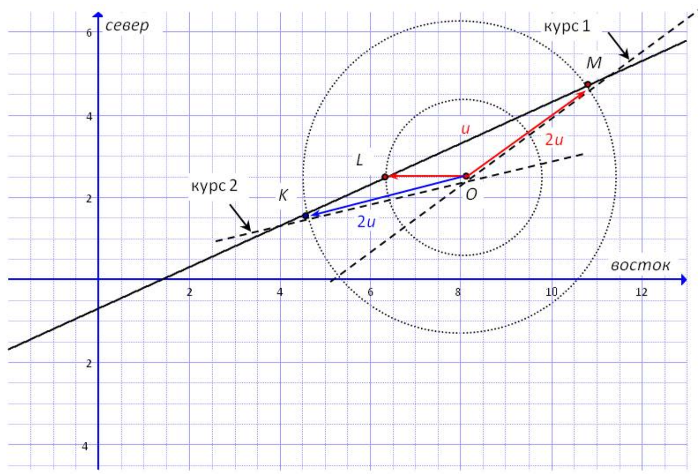


Рис. 9.14

Критерии оценивания Т-9-2

1. Определено направление ветра. .... 1 балл
2. Найден радиус железнодорожного кольца. .... 1 балл
3-5 Нахождение отношения скоростей поезда и ветра:

- решение через отношение путей:
  3. найден путь для дыма; .... 1 балл
  4. найден путь для паровоза; .... 1 балл
  5. найдено отношение скоростей $(1{,}93 \pm 0{,}05)$; .... 1 балл

- решение через закон сложения скоростей:
  3. использована связь направления шлейфа со скоростью
  ветра в СО паровоза; .... 1 балл
  4. использован закон сложения скоростей для точек C или D; .... 1 балл
  5. найдено отношение скоростей $\dfrac{v}{u} = 2$. .... 1 балл

6. Верно описаны построения (на основе закона сложения скоростей)
для нахождения направления прямого пути паровоза. .... 2 балла
7. Найдены направления прямого пути паровоза.

- верно найдено только одно направление; .... 1,5 балла

- верно найдены оба направления. .... 3 балла

Возможное решение Т-9-3

По закону Джоуля-Ленца тепловая мощность, выделяющаяся на спирали, равна

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0 + \alpha(t - t_0)} \tag{9.2}$$

Поскольку излучение и теплоотдача не учитывается, то количество теплоты, выделившееся за малое время $\Delta\tau$, идет на увеличение температуры спирали на Δt градусов:

$$N\Delta\tau = C\Delta t \tag{9.3}$$

Поэтому

$$\frac{U^2}{C}\Delta\tau = R(t)\Delta t \tag{9.4}$$

С помощью графика зависимости $R(t) = R_0 + \alpha(t - t_0)$ найдем время нагревания до t_1, так как согласно (9.4) оно пропорционально площади под этим графиком:

$$\frac{U^2}{C}\tau_1 = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha(t_1 - t_0))}{2} \cdot (t_1 - t_0) \tag{9.5}$$

Аналогично для нагревания до t_2:

$$\frac{U^2}{C}\tau_2 = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha(t_2 - t_0))}{2} \cdot (t_2 - t_0) \tag{9.6}$$

Из (9.5) получаем:

$$C = \frac{2U^2\tau_1}{2R_0(t_1 - t_0) + \alpha(t_1 - t_0)^2} = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Дж}}{{}^\circ\text{C}} \tag{9.7}$$

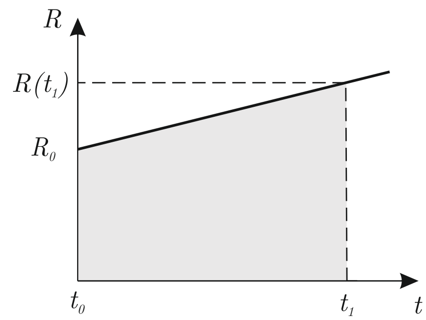


Рис. 9.15

Исключая C из (9.5) и (9.6), получаем квадратное уравнение:

$$\frac{\alpha}{2}(t_2 - t_0)^2 + R_0(t_2 - t_0) - \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(\frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)^2 + R_0(t_1 - t_0)\right) = 0 \tag{9.8}$$

Откуда

$$t_2 = 188\,{}^\circ\text{C} \tag{9.9}$$

(отрицательный корень не имеет физического смысла)

Критерии оценивания Т-9-3

1. Получена формула (9.2). .... 1 балл
2. Получена формула $Q = c\Delta t$. .... 1 балл
3. Идея равенства теплот. .... 1 балл
4. Получена формула (9.4). .... 1 балл
5. Идея нахождения площади под графиком. .... 1 балла
6. Получена формула (9.5) или (9.6). .... 2 балла
7. Значение C. .... 1 балл
8. Значение t_2. .... 1 балла
9. Отброшен второй корень. .... 1 балл

Возможное решение Т-9-4

1. При крайних положениях движка реостата напряжение на одном из элементов X равно нулю, а на втором 10 В. Из графика видно, что через второй элемент при этом течет ток (200 ± 2) мА, значит, суммарная мощность $W_1 = (0 + 10 \cdot 0{,}2)$ Вт $= (2{,}00 \pm 0{,}02)$ Вт.

2. При центральном положении реостата получаем симметричную цепь, следовательно, напряжение на каждом из элементов X будет 5 В. По графику ток равен (60 ± 3) мА, и суммарная мощность $W_2 = (2 \cdot 5 \cdot 0{,}06)$ Вт $= (0{,}60 \pm 0{,}03)$ Вт.

3. Исходя из 1 и 2 пунктов, логично предположить, что минимальная мощность достигается при центральном положении движка реостата. Сдвинем движок реостата из центрального положения в левую сторону. Пусть при этом напряжение на левом элементе уменьшилось на U' и стало $\dfrac{U_0}{2} - U'$, тогда на правом элементе напряжение стало равным $\dfrac{U_0}{2} + U'$. На левом элементе ток стал равен $I_0 + \Delta I_л$, а на правом $I_0 + \Delta I_п$, где I_0 – ток через элементы X при центральном положении движка реостата.

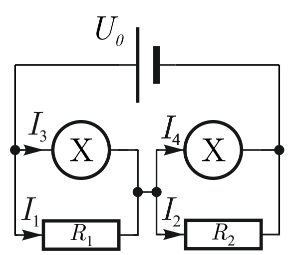
Выразим изменение мощности по сравнению с центральным положением движка реостата:

$$\Delta P = \left(\frac{U_0}{2} - U'\right)(I_0 + \Delta I_л) + \left(\frac{U_0}{2} + U'\right)(I_0 + \Delta I_п) - U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0}{2}(\Delta I_л + \Delta I_п) + U'(\Delta I_п - \Delta I_л).$$

Заметим, что $\Delta I_п > 0$, а $\Delta I_л < 0$. Кроме того, так как график ВАХ по мере увеличения напряжения растет все быстрее, то $|\Delta I_п| > |\Delta I_л|$, поэтому $\Delta P > 0$ при любых U', значит, центральное положение движка реостата соответствует минимальной мощности. То есть $W_{min} = W_2$.

4. Нарисуем эквивалентную схему.

Сопротивление левого резистора $R_1 = 25$ Ом, а правого $R_2 = 75$ Ом. Пусть напряжение на левом резисторе равно U, токи через резисторы равны I_1 и I_2, а через элементы X – I_3 и I_4. Тогда можем записать:



$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{U_0 - U}{R_2} \\ I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \end{cases}$$

Откуда получим $I_4 - I_3 = U\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) - \dfrac{U_0}{R_2} = U \cdot 0{,}053\ \text{Ом}^{-1} - 133$ мА.

Из полученного выражения видно, что по мере роста U от 0 до $\dfrac{U_0}{2}$ разность токов будет монотонно возрастать. Если же искать разность токов исходя из ВАХ, то по мере увеличения U разность токов будет монотонно убывать.

Последовательными приближениями подберем значение U, удовлетворяющее нашему выражению и ВАХ. Получим $U = (3{,}5 \pm 0{,}2)$ В. Тогда из графика находим токи через элементы X, примерно равные соответственно $I_3 = (35 \pm 4)$ мА и $I_4 = (87 \pm 5)$ мА. Суммарная выделяющаяся мощность

$$W = I_3 \cdot U + I_4(U_0 - U) = (0{,}035 \cdot 3{,}5 + 0{,}087 \cdot (10 - 3{,}5))\ \text{Вт} = (0{,}7 \pm 0{,}1)\ \text{Вт}.$$

Критерии оценивания Т-9-4

Вопрос №1.

1. Продемонстрировано понимание того, как текут токи, и определены напряжения на элементах X. .... 1 балл

2. Значение мощности $(2{,}00 \pm 0{,}02)$ Вт. .... 1 балл

Вопрос №2.

3. Продемонстрировано понимание того, как текут токи, и определены напряжения на элементах X. .... 1 балл

4. Значение мощности $(0{,}60 \pm 0{,}03)$ Вт. .... 1 балл*

Вопрос №3.

5. Указано, что минимальная мощность достигается при центральном положении движка реостата. .... 1 балл

6. Приведено корректное доказательство минимальности мощности. .... 2 балла

Вопрос №4.

7. Предложен корректный способ, позволяющий определить токи через элементы X. .... 2 балла

8. Значение мощности $(0{,}7 \pm 0{,}1)$ Вт. .... 1 балл*

* Баллы за численные значения ставятся только при использовании правильного метода. При попадании численного значения в двойные „ворота“ ставится 0,5 балла.

Возможное решение Т-9-5

1. Воспользуемся законом Снелла для преломления луча лазера:

$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2 \quad (9.10)$$

С учетом того, что коэффициент преломления воздуха равен 1, найдем условие полного внутреннего отражения:

$$\sin\alpha_{\text{крит}} = \frac{1}{n} \quad (9.11)$$

$$\alpha_{\text{крит}} = \omega\tau = \arcsin\frac{1}{n} \approx 49^\circ \quad (9.12)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{1}{n} \quad (9.13)$$

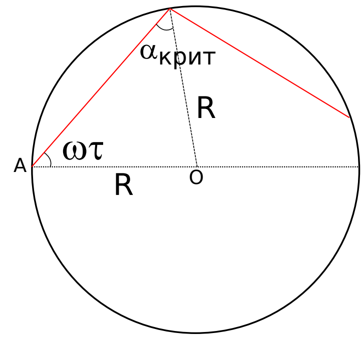


Рис. 9.16

2. Через время 1.5τ угол будет:

$$\beta = 1.5\omega\tau \approx 73^\circ \quad (9.14)$$

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta \approx 34^\circ \quad (9.15)$$

Так как $\gamma < 180^\circ$, то лазерный луч несколько раз отразится, прежде чем попадет на зачерненную половину поверхности сосуда. Посчитаем количество отражений n. Рассмотрим треугольники $\triangle AA_1O$, $\triangle AA_2O$, ..., $\triangle AA_nO$. Углы $\angle A_{k-1}A_kO$ и $\angle A_kA_{k+1}O$ $(k = 1,...,n)$ равны из условия отражения. Отсюда следует, что рассматриваемые треугольники равны, так как они равнобедренные, и углы при основании равны. Условие на количество отражений будет иметь вид:

$$n \cdot \gamma < 180^\circ < (n+1)\cdot\gamma \quad (9.16)$$

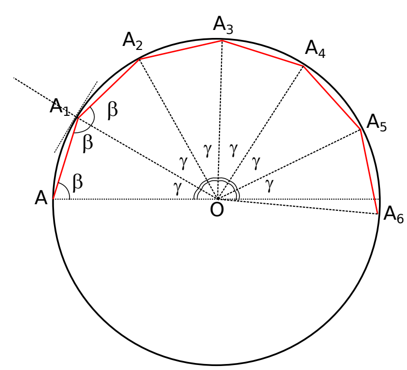


Рис. 9.17

$$n < 5.3 < n+1 \quad (9.17)$$

Следовательно количество отражений $n = 5$. Тогда зависимость угловой координаты зайчика от времени $\varphi(t)$ в окрестности $t = 1.5\tau$ будет иметь вид:

$$\varphi(t) = (n+1)\gamma(t) = (n+1)(180^\circ - 2\beta(t)) = (n+1)(180^\circ - 2\omega t) = 1080^\circ - 12\omega t \quad (9.18)$$

Отсюда видно, что зависимость коодинаты от времени линейная, поэтому находим модуль угловой и линейной скоростей:

$$\omega_з = 12\omega \tag{9.19}$$

$$\upsilon_з = 12\omega R \tag{9.20}$$

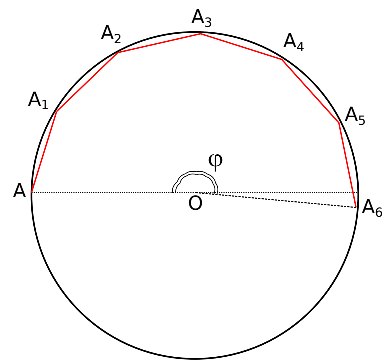


Рис. 9.18

Критерии оценивания Т-9-5

1. Условие (9.11) полного внутреннего отражения . . . . 2 балла
2. Найдено $\alpha_{\text{крит}}$ и τ . . . . 1 балл
3. Идея про несколько отражений . . . . 2 балла
4. Найдено число отражений при $t = 1.5\tau$ . . . . . . 2 балла
5. Записана зависимость координаты от времени $\varphi(t)$ 1 балл
6. Найдена линейная и/или угловая скорость . . 2 балла

Условия, возможные решения и критерии оценивания задач 10 класса

Теоретический тур

Задание 1. На льдине Рядом с мальчиком, стоящим на берегу реки, проплывает со скоростью v_0 тяжёлая льдина прямоугольной формы с ровной горизонтальной поверхностью. Мальчик пускает камень массы m скользить по поверхности льдины от её края. Начальная скорость камня равна скорости льдины и направлена под углом $\alpha = 60°$ к берегу (рис. 10.1).

Мальчик заметил, что когда камень оказался на расстоянии h от ближнего к нему края льдины, скорость камня была минимальной.

- Какое количество теплоты Q выделится за время скольжения камня по поверхности льдины?
- На каком расстоянии s от мальчика, стоящего на берегу реки, будет находиться камень в момент окончания его скольжения по льдине?

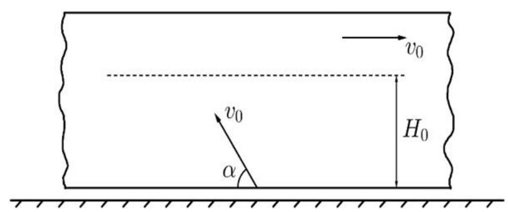


Рис. 10.1

Задание 2. Раздельный вылет Двум одинаковым соприкасающимся шарикам радиуса $r = 5$ см сообщают горизонтальную скорость u. Шарики движутся по нижнему колену закреплённой стоящей на боку U-образной трубки (рис. 10.2). Расстояние между осями колен $h = 1{,}00$ м, они сопряжены по полуокружности, трения в системе нет, зазор между стенками и шариками мал.

При каких значениях скорости u один шарик вылетит из верхнего колена, а другой из нижнего? Ускорение свободного падения g.

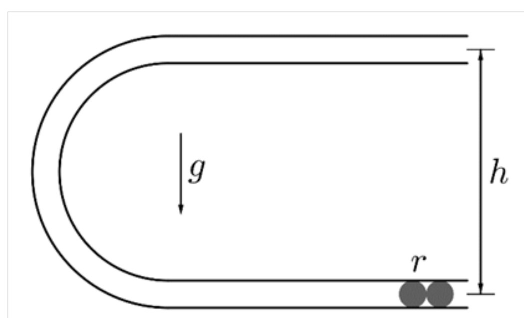


Рис. 10.2

Задание 3. В архиве лорда Кельвина Однажды, разбирая архив лорда Кельвина, теоретик Баг обнаружил график (рис. 10.3) и пояснительную записку из которой следовало, что Кельвин изучал изохорные процессы. От времени чернила выцвели, и координатные оси с графика исчезли, но осталась пометка о последней точке графика, соответствующей давлению $p = 2000$ мм рт. ст. и температуре $127\,°$C. стенками и шариками мал.

Баг понял, что на графике была приведена зависимость давления содержимого сосуда

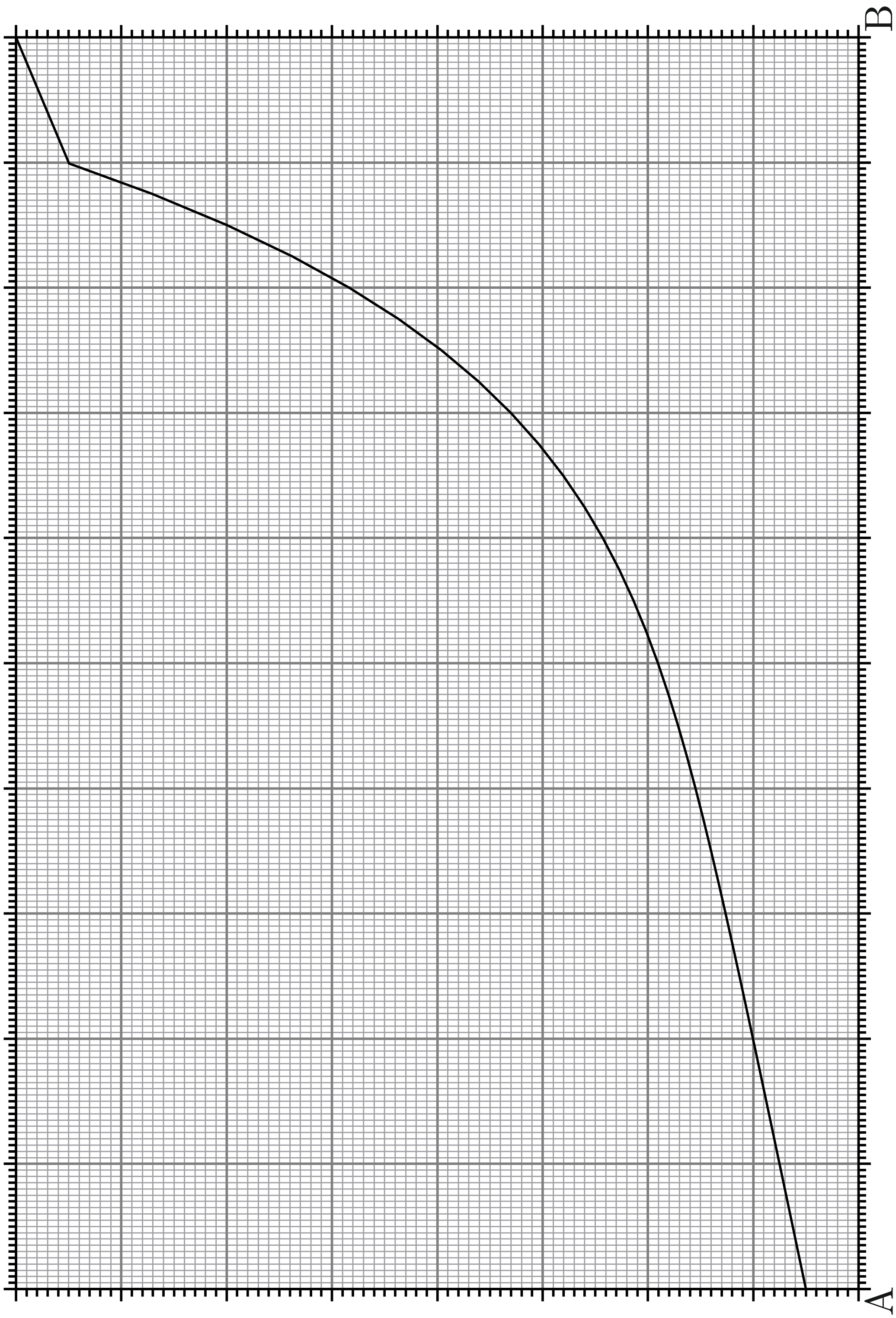


Рис. 10.3

от температуры и что в сосуде кроме воздуха находится ещё какое-то вещество, которое претерпевало фазовый переход. Для выяснения, что же это было за вещество, Баг решил вычислить давление насыщенного пара этого веществ в точке, которую обозначил знаком вопроса.

- Что это было за вещество?

- Чему равно давление и температура в точке, помеченной знаком вопроса. Ответ обоснуйте. Найдите температуру содержимого сосуда в состоянии, когда 30 % всей жидкости, попавшей в сосуд, испарилось.

Задание 4. Мостик с диодами и конденсаторами Электрическая цепь (рис. 10.4) составлена из трёх одинаковых конденсаторов ёмкостью $C_1 = C_2 = C_3 = C$, двух одинаковых диодов, двух идеальных амперметров, ключа и регулируемого источника напряжения. Зависимость силы тока через диод от напряжения на нём представлена на рис. 10.5.

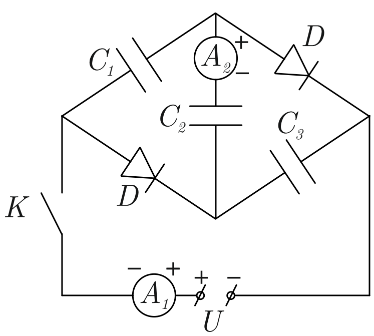


Рис. 10.4

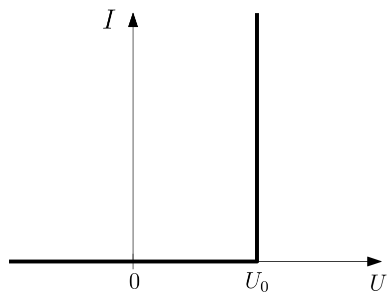


Рис. 10.5

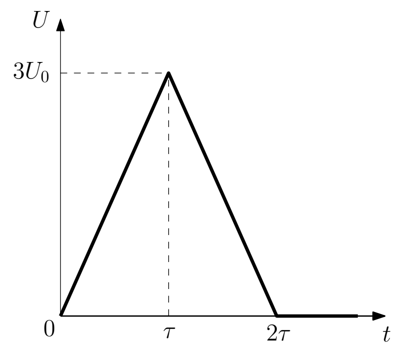


Рис. 10.6

- Пусть напряжение источника постоянно и равно $3U_0$. Сколько теплоты выделится в цепи при замыкании ключа K?

- Пусть напряжение источника зависит от времени $U = U(t)$ так, как показано на рис. 10.6. Ключ K постоянно замкнут. Определите зависимости от времени $I_1(t)$ и $I_2(t)$ показаний амперметров A_1 и A_2. Нарисуйте графики зависимости $I_1(t)$ и $I_2(t)$ с указанием значений характерных точек на графике. Полярность источника и полярность подключения амперметров указаны на рис. 10.4. Во всех случаях в начальный момент времени конденсаторы не заряжены.

Задание 5. Ом-м-м... Электрическая цепь (рис. 10.7) собрана из одинаковых омметров и резистора, сопротивление которого $R = 1$ кОм.

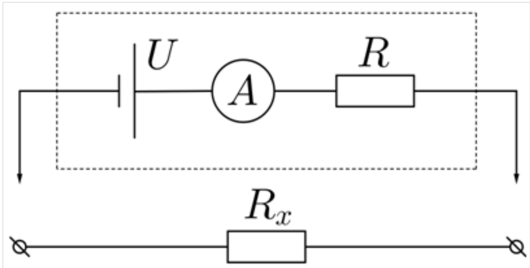


Рис. 10.7

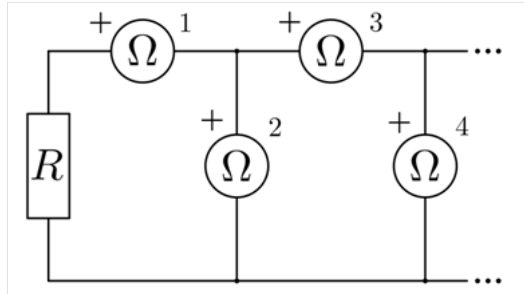


Рис. 10.8

Все омметры включены в цепь так, что у приборов с нечётным номером клемма, помеченная знаком плюс, находится слева, а у чётных — сверху. Определите показания первого, четвёртого и тринадцатого омметров.5 **Указание:** считайте, что омметр состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U, резистора сопротивлением $R = 1$ кОм и идеального амперметра (рис. 10.8). При подключении к омметру исследуемого резистора показания амперметра, встроенного в омметр, автоматически пересчитываются (например, с помощью встроенного микропроцессора) так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления исследуемого резистора R_x, подключённого к омметру.

Возможные решение и критерии оценивания

Возможное решение Т-10-1

Перейдём в инерциальную систему отсчёта, в которой льдина неподвижна. В этой системе отсчёта скорость камня $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{камня}} - \vec{v}_{\text{льдины}}$. В начальный момент скорость камня относительно льдины $\sqrt{3}v_0$.

Когда скольжение прекратится, скорость камня относительно льдины будет равна нулю. В этой системе отсчёта вся кинетическая энергия камня перейдёт в теплоту:

$$Q = \frac{3mv_0^2}{2}.$$

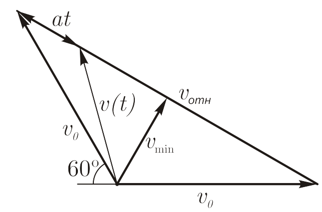


Рис. 10.10

Движение камня в системе отсчёта льдины равноускоренное: на камень действует постоянная сила трения скольжения, направленная против относительной скорости. Так как льдина движется равномерно, движение камня равноускоренное и в исходной системе отсчёта. Из треугольника скоростей $(\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t)$ видим, что скорость минимальна в момент, когда относительная скорость уменьшилась в два раза, так как минимальная скорость перпендикулярна относительной скорости, а треугольник равнобедренный. Таким образом, скорость камня относительно мальчика минимальна через время $t/2$, где t – время движения до остановки.

Для равноускоренного торможения до остановки верно, что за первую половину времени тело проходит $\frac{3}{4}$ пути, поэтому максимальное удаление камня от края льдины $y = \frac{4}{3}h$. Относительно льдины тело переместилось на $L = \frac{y}{\sin 30°} = 2y = \frac{8}{3}h$ в направлении $v_{\text{отн}}$.

Время равноускоренного торможения до остановки можно найти из условия $\frac{4}{3}h = \frac{1}{2}v_0 \cos 30° \cdot t$, получается $t = \frac{16}{3\sqrt{3}}\frac{h}{v_0}$.

Смещение камня по горизонтали составляет $S_x = v_0 t - L_x = \frac{4}{3\sqrt{3}}h$. Смещение относительно мальчика

$$s = \sqrt{S_x^2 + y^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}h.$$

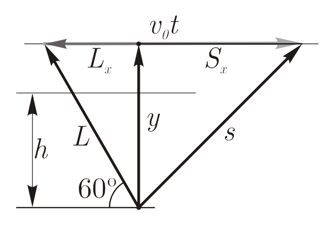


Рис. 10.11

Критерии оценивания Т-10-1

1. Найдена начальная относительная скорость $v_{\text{отн}} = \sqrt{3}v_0$ ... 1 балл

2. Найдено количество теплоты $Q = \frac{3mv_0^2}{2}$ .... 2 балла

3. Указано, что движение камня равноускоренное .... 2 балла

- использование .... 1 балл
- доказательство .... 1 балл

4. Найден момент, когда скорость минимальна .... 2 балла

5. Найдена максимальное перемещение $y = \frac{4}{3}h$ в направлении, перпендикулярному краю льдины .... 1 балл

6. Найдено время до остановки .... 0,5 балла

7. Найдено перемещение камня вдоль льдины $L_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}}h$ к моменту окончания скольжения .... 0,5 балла

8. Найдено искомое расстояние от мальчика $s = 8\frac{h}{3\sqrt{3}}$ .... 1 балл

Возможное решение Т-10-2

На изогнутом участке центры шариков движутся по окружности радиуса $R = h/2$. Точка O на рисунке – её центр.

Скатывающая сила – проекция силы тяжести на касательную к траектории центра шарика – в нижней части скругления для переднего шарика больше, чем для заднего. Поэтому шарики не расходятся и давят друг на друга. В верхней части скругления скатывающая сила больше для заднего шарика, он отстаёт от переднего.

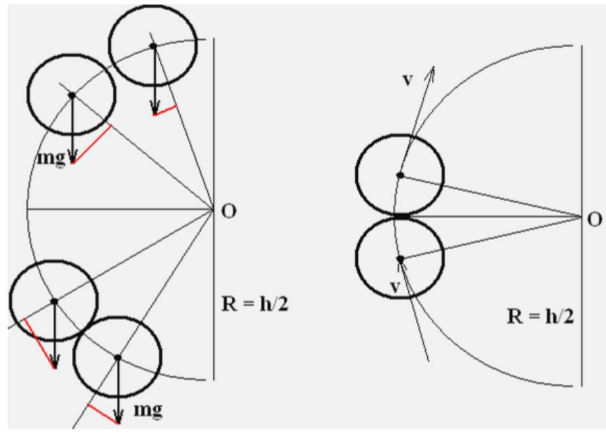


Рис. 10.12

Критическое положение, где сила давления шарика на шарик уменьшается до 0, а их контакт исчезает, отвечает равенству скатывающих сил. Это случай, когда точка соприкосновения шариков находится на одной горизонтали с точкой O (правая часть рис.).

Из сохранения энергии для скорости шариков v в критическом положении получаем: $v^2 = u^2 - 2gR = u^2 - gh$, где u начальная скорость.

Далее шарики движутся раздельно. Центр переднего шарика в критическом положении выше точки O Передний окажется в верхнем колене, поднявшись на $h/2 - r$ от его положения в критический момент. Из сохранения энергии для его скорости вылета имеем:

$$v_1^2 = v^2 - 2g\left(\frac{h}{2} - r\right) = u^2 - 2g(h - r).$$

Условие, что передний шарик доберётся до верхнего колена и вылетит

$$v_1^2 > 0,\ \text{то есть}\ u^2 > 2g(h - r).$$

Задний шарик не доберётся до верхнего колена и вылетит из нижнего, если его скорость обратится в 0 ещё на участке скругления. Граничный случай нулевая скорость заднего шарика в верхнем колене. Тогда из закона сохранения энергии получим:

$$\frac{2mu_{\max}^2}{2} = 2mgh + \frac{mv_1^2}{2},\ \text{и}\ u_{\max}^2 = 2g(h + r).$$

Тогда диапазон u задан неравенствами:

$$2g(h + r) > u^2 > 2g(h - r)$$

или

$$\sqrt{2g(h + r)} > u > \sqrt{2g(h - r)},$$
$$4{,}58\ \text{м/с} > u > 4{,}36\ \text{м/с}.$$

Здесь числа посчитаны для $g = 10$ м/с^2.

Критерии оценивания Т-10-2

1. Обоснование того, что на нижней четверти окружности шарики контактируют ...1 балл
2. Обоснование того, что на верхней четверти окружности шарики не контактируют 1 балл
3. Найдены положения шариков в момент исчезновения контакта...............1 балл
4. Найдена связь скорости v шариков в момент исчезновения
контакта с u ($v^2 = u^2 - gh$) ....1 балл
5. Найдена связь скорости v_1 вылета верхнего шарика
через верхнюю трубку и v $\left(v_1^2 = v^2 - 2g\left(\frac{h}{2} - r\right)\right)$ ....1 балл
6. Условие вылета верхнего шарика через верхнюю трубку..................0,5 балла
7. Найдена связь скорости v_2 нижнего шарика в верхней части
трубки с v $\left(v_2^2 = v^2 - 2g\left(\frac{h}{2} + r\right)\right)$..1 балл
8. Условие вылета нижнего шарика через нижнюю трубку ....0,5 балла
9. Аналитический диапазон для u (по 1 баллу за каждую границу) ....2 балла
10. Численный диапазон для u (по 0,5 балла за каждую границу) ....1 балл

Возможное решение Т-10-3

1. Анализируя график выделяем участки кривой:
(0-1) – давление насыщенных паров много меньше давления воздуха, смесь ведёт себя, как идеальный газ;
(1-2) – активный процесс испарения воды;
(2-3) – испарение всей жидкости, и увеличение давления, как у идеального газа.

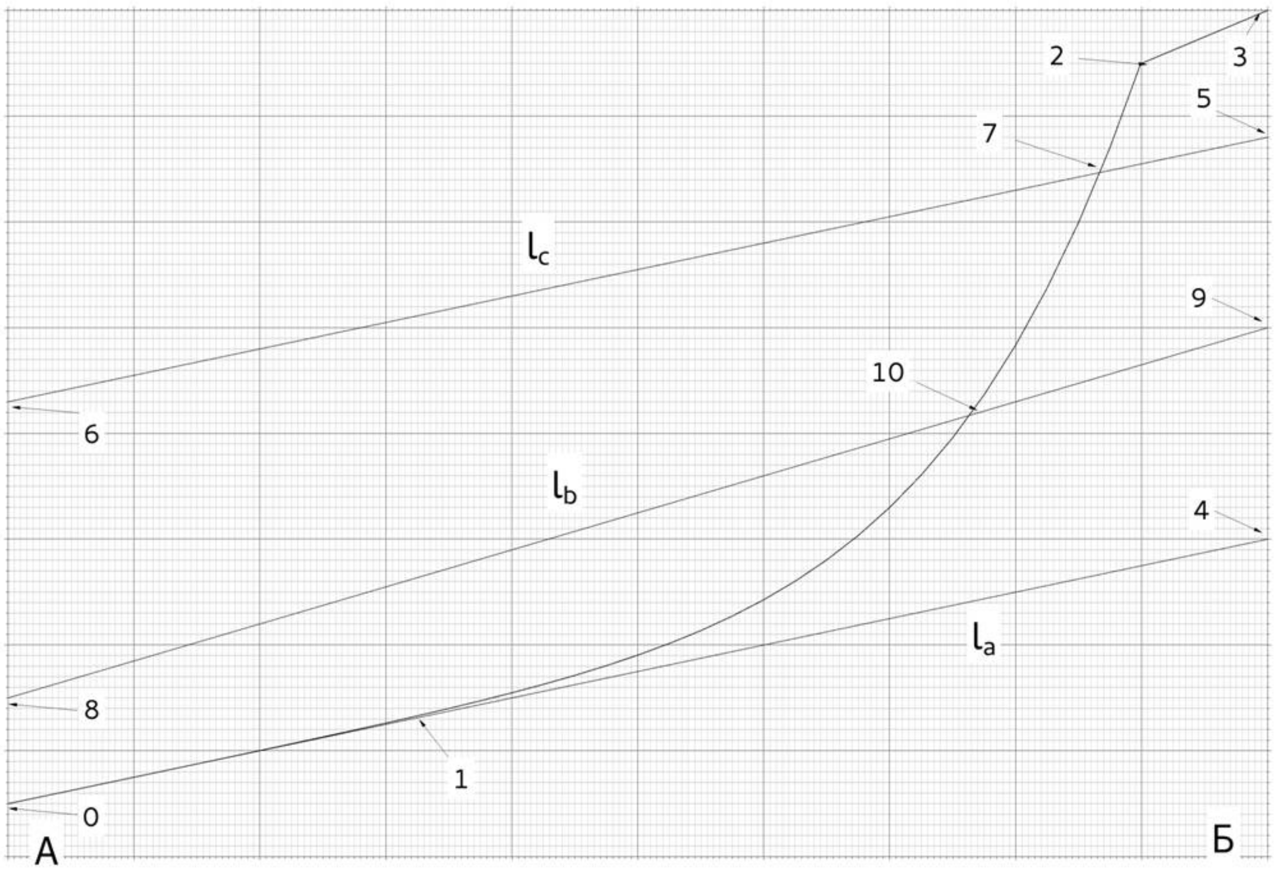


Рис. 10.13

При изохорическом нагреве давление идеального газа зависит от температуры ко следующему закону:

$$P = \frac{\nu RT}{V},$$

следовательно, коэффициент наклона прямой $p(T)$ для идеального пропорционален количеству вещества в единице объема. На участке $(2-3)$ коэффициент наклона в два раза больше коэффициента наклона $(0-1)$, т. е. при полном испарении количество вещества удвоилось.

Строим касательную к участку $(0-1)$ и она пересекает вертикальную ось в точке (4). Эта касательная l_a показывает зависимость парциального давления воздуха в смеси, и так как при испарении количество вещества удвоилось, то в точке (3) давление в два раза выше, чем в точке (4). С другой стороны между точками (3) и (4) 50 вертикальных делений по 20 торр, т. е. Их разница 1000 торр, и точка (3) имеет значение давления 2000 торр, (4) – 1000 торр, а точка (0) имеет значение 500 торр. Давление в точках A и B равно 400 торр.

Так как давление в точке (4) в два раза больше давления в точке (0), то температура в точке (4) больше в два раза, чем в точке (0). Это значит, что их разница составляет $T_0 = T_4/2$, а количество маленьких делений по горизонтальной оси 200 дел.

Заметим, что разность между кривой смеси и прямой l_a дает давление насыщенных паров воды. Для воды мы знаем, что давление насыщенных паров при 100° C(373 K) равно атмосферному, т. е. по условию задачи 760 торр, таким образом, необходимо найти, в какой точке давление смеси превышает давление воздуха на 760 торр. Для этого проводим прямую l_c, параллельную прямой l_a и смещенную на 760 торр вверх, т. е. на 38 делений по вертикальной оси, т. е. проходящую через точки(5) и (6). Эта прямая пересечёт кривую смеси в точке (7), температура которой будет составлять 100°C(373 K), и будет отстоять по горизонтальной оси на расстояние 173 клеточки от точки (0). Таким образом

$$\frac{T_4 - T_0}{200} = \frac{T_0}{200} = \frac{373 - T_0}{173} => T_0 = 200 \text{ K} => T_4 = 400 \text{ K}.$$

2. Заметим, что нам необходимо найти такую температуру, при которой давление превышает давление воздуха l_a на 40% от давления паров воды, если бы она вся испарилась, но это равно 40% давления самого воздуха. Т.к. в точке (0) давление воздуха равно 500 торр, то 40% - это 200 торр. Смещаемся на 10 делений вверх в точку (8), аналогично находим точку (9). Прямая l_b, проходящая через эти точки, пересечёт кривую смеси в точке (10), температура которой составляет (80 ± 1)°C $= (353 \pm 1)$ K.

Критерии оценивания Т-10-3

1. Идея проведения касательной к началу графика как к изохоре, соответствующей сухому воздуху (на графике или аналитически) .... 1 балл
2. Нахождение изохоры, соответствующей смеси сухого воздуха и полностью испарившейся воде (на графике или аналитически) .... 1 балл
3. Идея о том, что прямые пересекаются в начале координат .... 1 балл
4. Нахождение численного значения давления в точках и (400 торр). Нахождение масштаба по оси температуры .... 1 балл
5. Утверждение, что давление насыщенных паров при 373 К равно 1 атм ...... 1 балл
6. Метод нахождения точки 373 К на рисунке ....1 балл
7. Нахождение температур в точках (200 К) и (400 К) (по 1 баллу за каждую) ....2 балла
8. Идея, что 40% испарившейся воды соответствует 0,4 расстояния между прямыми из пункта (1) ....1 балл
9. Нахождение численного значения температуры, при которой испарилось 40% воды (353 ± 1 К) ....1 балл

Возможное решение Т-10-4

При малых напряжениях источника U диоды закрыты, конденсаторы соединены последовательно и напряжение на каждом из них $\frac{U}{3}$. Напряжения на диодах при этом равны $2\frac{U}{3}$. Если они достигают значения U_0 (т.е. при $U = 3\frac{U_0}{2}$), диоды становятся открытыми, и конденсаторы уже нельзя считать соединенными последовательно.

Пусть U_1,U_2 и U_3 – напряжения на конденсаторах при полярности, указанной на . 10.14(источник не показан).

Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = U \\ U_1 + U_2 = U_0 \\ U_2 + U_3 = U_0 \end{cases}$$

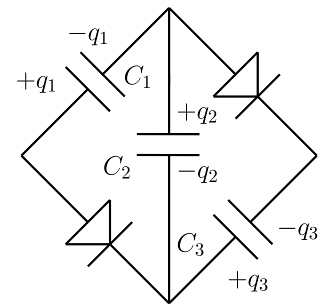


Рис. 10.14

Откуда получаем:

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = U - U_0 \\ U_2 = 2U_0 - U \end{cases}$$

Рассмотрим пункт 1) задачи. При $U = 3U_0$ имеем:

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = 2U_0 \\ U_2 = -U_0 \end{cases}$$

(полярность $_2$ противоположна указанной на рисунке). Через диоды прошли заряды

$$q_D = -q_2 + q_3 = CU_0 + 2CU_0 = 3CU_0,$$

при этом

$$q_1 = CU_1 = 2CU_0.$$

Значит, через источник прошел заряд

$$q_{\text{ист}} = q_1 + q_D = 5CU_0,$$

работа источника

$$A_{\text{ист}} = q_{\text{ист}}U = 15CU_0^2.$$

Энергия W_C конденсаторов при этом

$$W_C = 2\frac{C(2U_0)^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = 4{,}5CU_0^2.$$

Тогда количество выделившегося тепла

$$Q = A_{\text{ист}} - W_C = 10{,}5CU_0^2.$$

Перейдем к пункту 2). До момента времени $t = \tau/2$, пока $U \leq 3U_0/2$, напряжение на диодах меньше U_0, а напряжения на конденсаторах равны $U/3$. При этом токи через амперметры

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t_1} = C\frac{\Delta U_1}{\Delta t} = \frac{CU_0}{\tau}$$

При $t = \tau/2$ через диоды начинает течь ток, а напряжения на конденсаторах

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = U - U_0 \\ U_2 = 2U_0 - U \end{cases}$$

При этом токи через амперметры

$$I_2 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = C\frac{\Delta(2U_0 - U)}{\Delta t} = -CC\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{3CU_0}{\tau},$$

$$I_1 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} + \frac{\Delta q_D}{\Delta t} = \frac{\Delta q_3}{\Delta t} - \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = 2C\frac{\Delta U}{\Delta t} + C\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{9CU_0}{\tau}.$$

При уменьшении напряжения в интервале времени от τ до 2τ ток через диоды не течет, напряжение на конденсаторах изменяется на одну и ту же величину

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = -\frac{\Delta U}{3}.$$

При этом, с учетом знака напряжения U_2, модуль U_2 возрастает. Ток тогда

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = C\frac{\Delta U_1}{\Delta t} = \frac{C\Delta U}{3\Delta t} = -\frac{CU_0}{\tau}.$$

Графики зависимостей $I_1(t)$, $I_2(t)$ выглядят так:

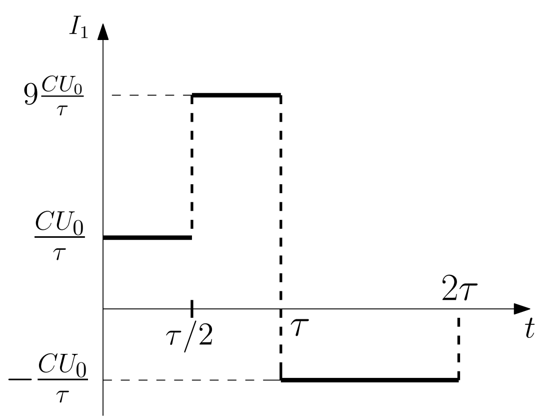


Рис. 10.15

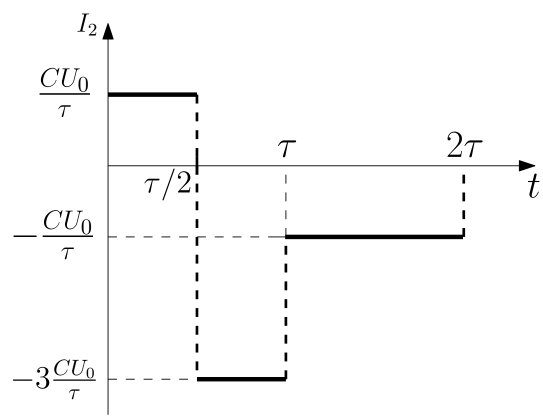


Рис. 10.16

Критерии оценивания Т-10-4

1. Найдено напряжение источника, при котором
диоды открываются $U_{\text{откр}} = \frac{3}{2}U_0$ .... 1 балл
Вопрос 1: .... 2,5 балла
2. Найдены заряды на конденсаторах
$q_1 = q_3 = 2CU_0$,$q_2 = CU_0$ .... 0,2+0,2+0,2 балла
3. Найден заряд, прошедший через источник $q_{\text{ист}} = 5CU_0$ .... 0,6 балла
4. Записан закон сохранения энергии $A_{\text{ист}} = Q + W_C$ .... 0,5 балла
5. Получен ответ $Q = 10{,}5CU_0^2$ .... 1 балл
Вопрос 2: .... 6,5 баллов
6. Указано, что при $t < \tau/2$ напряжения на конденсаторах равны ...... 0,5 балла
7. Найдены токи $I_1 = I_2 = \frac{CU_0}{\tau}$ .... 0,5+0,5 балла*
8. Записана система для напряжений при $\tau/2 < t < \tau$ (или любое эквивалентное соотношение) .... 1 балл
9. Найдены токи $I_1 = \frac{9CU_0}{\tau}, I_2 = -\frac{3CU_0}{\tau}$ .... 0,5+0,5 балла*
10. Указано, что при $\tau < t < 2\tau$ ток через диоды не течет .... 1 балл
11. Записан закон сохранения зарядов
(или любое эквивалентное соотношение) .... 0,5 балла
12. Найдены токи $I_1 = I_2 = -\frac{CU_0}{\tau}$ .... 1+1 балл*
**Комментарий:* Если у тока правильное значение, но неправильный знак, то ставится на 0,2 балла меньше. Если ток не нанесен на график (или нанесен неправильно), ставится на 0,2 балла меньше.

Возможное решение Т-10-5

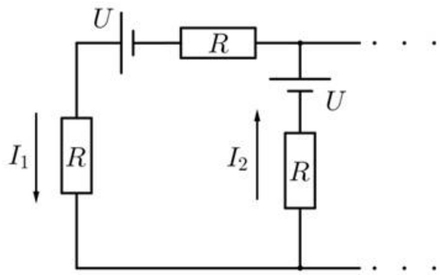


Рис. 10.17

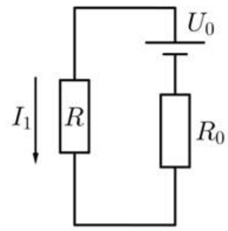


Рис. 10.18

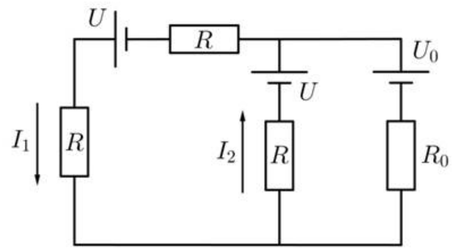


Рис. 10.19

Всю цепь омметров (рис. 10.17) можно эквивалентно (без изменения тока через резистор R) заменить идеальным источником напряжения U_0 и резистором сопротивления R_0 (рис. 10.18). Поскольку число звеньев бесконечно, то значения U_0 и R_0 не зависят от номера звена, начиная с которого производится замена. Тогда эта же схема эквивалентна приведенной на рис. 10.19. Для нахождения U_0 и R_0 воспользуемся формулами последовательного и параллельного соединения источников:

$$U_0 = U + \left(\frac{U}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right)\frac{RR_0}{R+R_0},$$

$$R_0 = \frac{RR_0}{R+R_0} + R.$$

Отсюда находим:

$$U_0 = \frac{(3+\sqrt{5})U}{2},\ R_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R.$$

Тогда сила тока, протекающего через внешний резистор,

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0+R} - \frac{U\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\left(R + R\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{U}{R}.$$

Показание первого омметра

$$R_1 = \frac{U}{I_1} - R = 0.$$

Показание второго омметра находим, применив закон Кирхгофа для контура с внешним резистором и первыми двумя омметрами

$$2U = 2I_1R + I_2R.$$

Тогда

$$I_2R = 2(U - I_1R) = 0.$$

Оказывается, что сила тока I_2, текущего через второй омметр равна нулю. Следовательно,

$$R_2 = \frac{U}{0} - R = \infty.$$

В следующих ветвях все повторяется. Нечетные омметры показывают ноль, четные – бесконечность, поэтому $R_1 = R_{13} = 0, R_4 = \infty$.

Критерии оценивания Т-10-5

1. Записано уравнение для определения U_0 ....2 балла
2. Записано уравнение для определения R_0 ....2 балла
3. Найдены параметры источника ....0,5+0,5 балла
4. Найдена сила тока через резистор ....1 балл
5. Найдены показания первого омметра ....0,5 балла
6. Записано уравнение для определения силы тока через второй омметр ....1 балл
7. Найдена сила тока через второй омметр ....0,5 балла
8. Показано, что сила тока через все четные/нечетные омметры одинакова..0,5+0,5 балла
9. Приведены показания четвертого и тринадцатого омметров...........0,5+0,5 балла

Условия, возможные решения и критерии оценивания задач 11 класса

Теоретический тур

Задача 1. Слинки Пружину «слинки» удерживают за верхний виток так, что ее нижний виток находится на высоте $h = 1$ м над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 1{,}5$ м. Пружину отпускают. Через какое время τ она упадет на пол? В нерастянутом состоянии витки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться. Ответ дать с точностью 0,02 с.

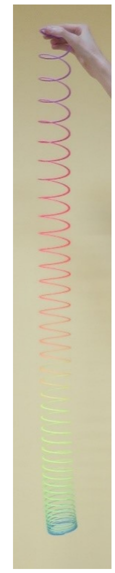


Рис. 11.1

Задача 2. Я тучка, тучка, тучка... В приближении адиабатической атмосферы оцените:

1. высоту H атмосферы Земли;
2. высоту h_0 нижней кромки облаков;

Температура на поверхности Земли $t_0 = 27°$C, а относительная влажность воздуха $\varphi = 80\%$. Считайте, что $h_0 \ll H$.

Указание: Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии.

Таблица 11.1

Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры

$t, {}^0$C	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
P_H, мм.рт.ст.	7,01	8,05	9,21	10,5	12,0	13,6	15,5	17,5	19,8	22,4	25,2	28,4	31,8

Примечание: Воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой $\mu = 29$ г/моль

Задача 3. Бусинка Заряд Q равномерно распределен по поверхности диэлектрической тонкостенной закрепленной трубы радиуса R и длиной H. Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноудаленного от торцов) сечения.

Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считайте известным.

Задача 4. И снова МГД Модель морского магнитогидродинамического двигателя, установленного под днищем катера (рис. 11.2) представляет собой прямоугольный канал ($a = 1{,}0$ м, $l = 2$ м, $h = 10$ см). К хорошо проводящим плоскостям hl подключен идеальный источник постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E} = 100$ В. Магнитное поле $B = 1$ Тл пронизывает канал перпендикулярно непроводящим плоскостям al. При движении катера с таким двигателем с постоянной скоростью u скорость вытекающей относительно катера воды $v = 10$ м/с.

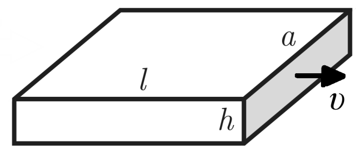


Рис. 11.2

Удельное сопротивление морской воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Ом $\cdot$ м, ее плотность $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Найдите скорость движения катера, силу тяги, полезную мощность и КПД двигателя.

Задача 5. Лунное затмение Как известно, Солнце не является точечным источником света, а имеет малый угловой диаметр (при наблюдении с Земли) $2\delta = 0{,}52°$. Этот факт приводит к тому, что область полной тени за Землей оказывается конечной.

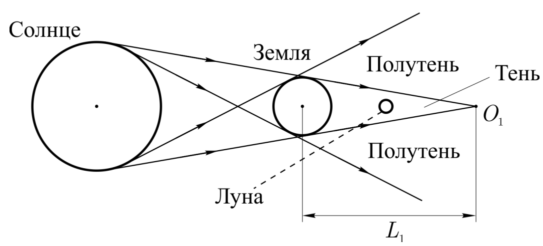


Рис. 11.3

1. Пусть рефракция (явление преломления солнечных лучей в земной атмосфере) отсутствует. На каком расстоянии L_1 от Земли еще будет наблюдаться полная тень? Найдите продолжительность полного лунного затмения в этом случае.

2. В действительности рефракция оказывает существенное влияние на размер области полной тени. Пусть атмосфера Земли имеет приведенную высоту $h = 8$ км и средний показатель преломления $n = 1{,}00028$.

   Полагая, что границу тени образуют лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, определите на каком максимальном расстоянии L_2 теперь будет наблюдаться полная тень? Какая часть площади лунного диска окажется затенена?

Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, угловой диаметр Луны равен угловому диаметру Солнца 2δ, период обращения Луны вокруг Земли $T_0 = 27{,}3$ сут.

Возможные решения и критерии оценивания

Возможное решение Т-11-1

По теореме о движении центра масс время падения пружинки - это время падения тела с высоты $H = h + h_c$, где h_c - высота центра масс относительно положения нижнего витка висящей пружины. Найдем эту высоту. Пусть жесткость одного витка пружины k, его масса m, число витков в пружине N. Тогда из условия равновесия для i-ого витка получаем:

$$k\Delta x_i = (i-1)mg \tag{11.1}$$

Координата i-ого витка равна

$$x_i = \sum_1^i \Delta x_i = \frac{mgi(i-1)}{2k} \tag{11.2}$$

Тогда, с учетом того, что число витков $N \gg 1$, получаем:

$$l = x_N = \frac{mgN(N-1)}{2k} \approx \frac{mgN^2}{2k} \tag{11.3}$$

Вычислим координату центра масс:

$$h_c = \frac{1}{mN}\sum_1^N mx_i = \frac{1}{N}\sum_1^N \frac{mgi(i-1)}{2k} = \frac{1}{N}\Big(\frac{mgN^3}{6k} + O(N^2)\Big) \approx \frac{mgN^2}{6k} = \frac{l}{3} \tag{11.4}$$

Время падения пружины

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\big(h+\frac{l}{3}\big)}{g}} \approx 0.55\,\text{c} \tag{11.5}$$

Если учесть длину пружины в сжатом состоянии, то поправка на положение центра масс не превысит l_0, а поправка на время падения, соответственно, составит

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{l_0}{2\big(h+\frac{l}{3}\big)} \approx 2\% \Rightarrow \Delta\tau = 0.01\,\text{c} \tag{11.6}$$

Критерии оценивания Т-11-1

1. Идея о применении теоремы о движении центра масс .... 2 балла
2. Определено положение центра масс пружины .... 4 балла
   - Расчитано растяжение элемента пружинки .... 1 балл
   - Координата элемента пружинки .... 1 балл
   - Координаты центра масс .... 2 балла
3. Найдено время τ падения пружины без учета l_0 .... 3 балла
4. Сделана оценка влияния l_0 на время падения, или корректно учтено l_0 ... 1 балл

Возможное решение Т-11-2

Рассмотрим перемещение порции одного моля воздуха в атмосфере. В адиабатическом приближении по закону сохранения энергии работа внешнего по отношению к выделенной порции воздуха давления расходуется на изменение внутренней U и потенциальной $\mu g z$. Тогда:

$$P_1V_1 - P_2V_2 = U_2 - U_1 + \mu g(z_2 - z_1) \tag{11.1}$$

Перегруппировав слагаемые, получаем:

$$c_p \Delta T = -\mu g \Delta z \tag{11.2}$$

Отсюда получаем зависимость температуры от высоты

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{c_p} z = T_0 - \frac{2\mu g}{7R} z \tag{11.3}$$

Высоту атмосферы можно оценить по высоте, при которой температура воздуха обращается в абсолютный ноль:

$$H \approx \frac{7RT_0}{2\mu g} \approx 30 \text{ км} \tag{11.4}$$

Нижняя кромка облаков образуется в точке росы, то есть на такой высоте h_0, при которой парциальное давление водяного пара сравнивается с давлением насыщенного пара $P(z)$, учитывая, что на поверхности Земли давление пара $P_0 = \varphi P_H(T_0)$.

По законам гидростатики парциальное давление водяного пара с высотой изменяется по закону:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \tag{11.5}$$

Так как $h_0 \ll H$, то можно считать изменения температуры и давления воздуха малыми, поэтому его плотность практически постоянна и равна $\rho \approx P_0 \mu_{H_2O}/RT_0$. Тогда давление изменяется по линейному закону:

$$\frac{P(z)}{P_H(T_0)} \approx \frac{P_0}{P_H(T_0)} - \frac{\rho g z}{P_H(T_0)} = \varphi\Big(1 - \frac{\mu_{H_2O} g z}{RT_0}\Big) \tag{11.6}$$

Используя таблицу зависимости давления насыщенного пара от температуры и зная зависимость температуры от высоты, построим график зависимости давления насыщенного пара от высоты $P_H(z)/P_H(T_0)$. На этой же координатной плоскости построим график зависимости парциального давления водяного пара $P(z)/P_H(T_0)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет искомой высотой.

Из графиков получаем, что $h_0 \approx 0.43$ км. Заметим, что на этой высоте парциальное давление паров понизилось примерно на 6% по сравнению с давлением у поверхности Земли, а температура - менее, чем на 2%, что вполне оправдывает наши приближения.

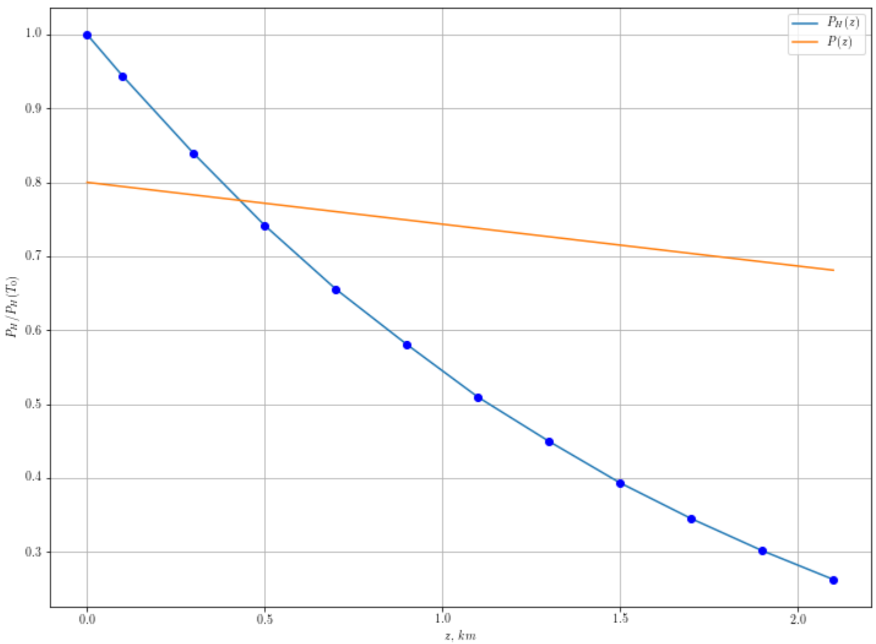


Рис. 11.4
Зависимость давления от высоты

Альтернативное решение Выделим полубесконечный цилиндр воздуха сечением S. Рассмотрим небольшую порцию на высоте от z до $z+dz$. Запишем условие равновесия для этой порции:

$$P(z)S = P(z+dz)S + g\rho S dz \Rightarrow dP = -\rho g dz \tag{11.1}$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона, уравнения Пуассона в форме $\rho^{1-\gamma}T = const$ и с учетом (1) получаем:

$$\frac{7}{2}RdT = -\mu g dz \tag{11.2}$$

Проинтегрировав, получаем зависимость температуры воздуха от высоты:

$$T = T_0 - \frac{2\mu g}{7R}z \tag{11.3}$$

Дальнейшее решение полностью совпадает с основным

Примечание: Можно находить зависимость давления от высоты так же через уравнение Пуассона, а затем делать оценку, приравнивая нулю давление на высоте H. Зависимость $P(z)$ при этом получается следующая:

$$P(z) = P(0)\left(1 - \frac{2\mu g}{7RT_0}z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Критерии оценивания Т-11-2

1. Записан закон сохранения энергии или 2 закон Ньютона .... 1 балл
2. Найдена зависимость температуры или давления от высоты .... 1,5 балла
3. Сделана оценка высоты атмосферы .... 1,5 балла
4. Идея, объясняющая причину происхождения нижней кромки облаков . 1,5 балла
5. Получена зависимость парциального давления водяного пара от высоты 2 балла
6. Получено значение высоты $h_0 = 0{,}4 - 0{,}5$ км (графически или подбором) 2 балла
7. Проверено используемое приближение .... 0,5 балла

Возможное решение Т-11-3

Для определения зависимости $E_r(r)$ вблизи положения равновесия воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через поверхность соосного с заряженным небольшого цилиндра (радиус основания r, высота $2x$ ($x \ll r \ll R,H$) равен нулю. Для начала найдем $E_x(x)$. Это поле однородно заряженного кольца высотой $2x$, лежащего на дальнем от текущей точки крае цилиндра. Заряд кольца $2xQ/H$. Расстояние до точки наблюдения $L \approx \sqrt{R^2 + H^2/4}$. Тогда поле кольца на оси:

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{H} 2x \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{H}{2L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x.$$

Вычислим величины потоков: $\Phi_{\text{осн}}$ через основание и $\Phi_{\text{бок}}$ через боковую поверхность гауссова цилиндра:

$$\Phi_{\text{осн}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2, \qquad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r).$$

По теореме Гаусса $2\Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0$, значит

$$2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r) = -2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2.$$

Отсюда получаем, что в плоскости кольца при смещении r из центра величина вектора напряженности пропорциональна смещению

$$E_r(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Уравнение движения бусинки:

$$m\ddot{r} = qE_r(r) = -q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{m} \frac{Q}{2L^3}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma Q}{2L}},$$

Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi L \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{\gamma Q}}.$$

Критерии оценивания Т-11-3

Метод «Гаусс»

1. Использование закона Гаусса для малого цилиндра вокруг центра .... 3 балла
2. Определение аксиальной напряженности (идея+расчет) .... 1+2 балла
3. Определение радиальной напряженности .... 1 балл
4. Уравнение колебаний (при правильном 3 пункте) .... 1 балл
5. Ответ .... 2 балла

Метод «Интегрировай давай»

1. Определение поля отрезка (при наличии идеи, что с ним делать дальше .. 1 балл
2. Разложение линеаризованного поля (работа с малыми) .... 3 балла
3. Определение радиальной напряженности .... 3 балла
4. Уравнение колебаний (при правильном 3 пункте) .... 1 балл
5. Ответ .... 2 балла

Метод «Подковы»

1. Идея+рисунок рисунок «взаимновычитающихся» частей цилиндра....... 3 балла
2. Идея об интегрировании по полуокружности с перем. плотностью заряда . 1 балл
3. Определение радиальной напряженности .... 3 балла
4. Уравнение колебаний (при правильном 3 пункте) .... 1 балл
5. Ответ.. 2 балла

Возможное решение Т-11-4

Возможное решение 1. Энергетический метод. Перейдем в систему отсчета, в которой катер покоится. В этой системе отсчета скорость движения воды, которая находится далеко от катера равна u, а скорость вытекающей из двигателя воды v. Запишем закон сохранения энергии для воды, которая прошла через канал:

$$\frac{\rho_{\text{в}}u^2}{2} + jBl = \frac{\rho_{\text{в}}v^2}{2}, \tag{11.1}$$

где $j = I/(hl)$ - плотность тока, текущего поперек канала.

В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника, поэтому полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathscr{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathscr{E} - vBa) \tag{11.2}$$

Подставляя (2) в (1) получим:

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{2Bl}{\rho\rho_{\text{в}}a}(\mathscr{E} - vBa)} = 8 \text{ м/с}.$$

Сила тяги двигателя равна изменению имульса воды, прошедшей через канал:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v - u) = \rho_{\text{в}}ahv(v - u) = 2 \text{ кН}.$$

Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = Tu = 16 \text{ кВт}.$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathscr{E}I} = \frac{\rho Tua}{lh\mathscr{E}(\mathscr{E} - vBa)} \approx 9\%.$$

Возможное решение 2. Динамический метод. В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника. Полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathscr{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathscr{E} - vBa)$$

Сила тяги равна действующей на этот ток силе Ампера:

$$T = F_A = IBa = \frac{lhB}{\rho}(\mathscr{E} - vBa) = 1.8 \text{ кН}. \tag{11.3}$$

С другой стороны, сила тяги двигателя равна изменению имульса воды, прошедшей через канал за единицу времени:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v-u) = \rho_{\text{в}} ahv(v-u). \qquad (11.4)$$

Приравнивая (1) и (2) получим:

$$u = v - \frac{T}{\rho_{\text{в}} ahv} = \frac{lB}{\rho\rho_{\text{в}} av}(\mathscr{E} - vBa) = 8{,}2 \text{ м/с}.$$

Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = Tu = 14{,}76 \text{ кВт}.$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathscr{E} I} = \frac{\rho Tua}{lh\mathscr{E}(\mathscr{E} - vBa)} \approx 8{,}2\%.$$

Примечание к динамическому методу. Использованное в этом решении положение $T = F_A$ в действительности равносильно не вполне корректному использованию закона сохранения импульса. В самом деле, если поток воды через канал с расходом $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho ahv$ на большом расстоянии от катера (в СО, связанной с катером) имеет эффективную площадь сечения S такую, что $u \cdot S = vah$, т.е. $S = ah\frac{v}{u}$. Тогда импульс, проходящий за время Δt через S $(\rho uS\Delta t) \cdot u$, увеличивается за счет импульса силы Ампера $IBa\Delta t$, и конечный импульс $\rho ahv\Delta tv = (\rho u\frac{v}{u}ah\Delta t)u + IBa\Delta t$, и $v^2 = vu + \frac{IB}{\rho h} \Rightarrow u = v - \frac{IB}{\rho hv}$, – ровно то же значение, что получено при $T = F_A$. Но в таком рассуждении не учитывается изменение импульса тех масс воды, которые не проходят через канал, а в них из-за увеличения площади сечения скорость становится меньше u, т.е. часть импульса «теряется» (ясно, что есть градиент давления в потоке и система, к которой мы в альтернативном решении применяем закон сохранения импульса, незамкнута).

Критерии оценивания Т-11-4

Энергетический метод (10 баллов)

1. Закон сохранения энергии для воды .... 2 балла
2. Выражение для силы тока с учетом ЭДС индукции .... 2 балла
3. Уравнение для скорости катера .... 1,5 балла
4. Формула для скорости катера .... 0,5 балла
5. Численное значение скорости катера .... 0,5 балла
6. Формула для силы тяги катера .... 1,5 балла
7. Численное значение силы тяги катера .... 0,5 балла
8. Найдена полезная мощность .... 0,5 балла
9. Найден КПД .... 1 балл

Динамический метод (8 баллов)

1. Использовано утверждение $T = F_A$ или ЗСИ для потока через канал ..... 1 балл
2. Выражение для силы тока с учетом ЭДС индукции .... 2 балла
3. Уравнение для силы тяги катера через разность скоростей или уравнение для скорости катера из ЗСИ .... 2 балла
4. Формула для скорости катера .... 0,5 балла
5. Численное значение скорости катера .... 0,5 балла
6. Численное значение силы тяги катера .... 0,5 балла
7. Найдена полезная мощность .... 0,5 балла
8. Найден КПД .... 1 балл

Возможное решение Т-11-5

1. В отсутствие рефракции лучи сходятся под тем же углом, под которым Солнце видно с Земли, то есть 2δ , поэтому $L_1 = R/\delta \approx 1{,}4 \cdot 10^6$ км. Из второго закона Ньютона для движения Луны по орбите радиуса R_0 с угловой скоростью ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM_З}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}}, \qquad \text{откуда} \qquad R_0 = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}} \approx 384 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр Луны $D = 2\delta R_0 \approx 3{,}45 \cdot 10^3$ км, а также диаметр темного пятна на уровне Луны (Рис. 2):

$$D_1 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) \approx 9{,}3 \cdot 10^3 \ .$$

Тогда продолжительность полного лунного затмения:

$$T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = T_0 \frac{D_1 - D_2}{2\pi R_0} \approx 1{,}6 \text{ ч}$$

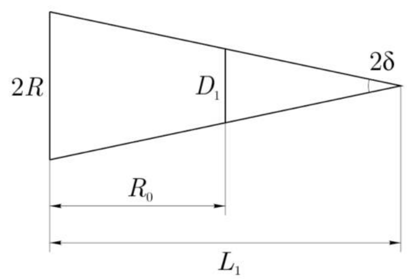


Рис. 11.5

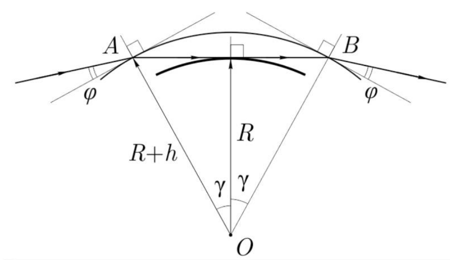


Рис. 11.6

2. Запишем закон Снелла при преломлении луча на границе с атмосферой:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Учитывая, что $n = 1 + \Delta n$, где $\Delta n = 2{,}8 \cdot 10^{-4} \ll 1$, а также используя приближение малых углов, перепишем формулу в виде

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} = (1 + \Delta n)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right).$$

Раскроем скобки, пренебрегая слагаемым третьего порядка малости: $(\gamma^2 - \varphi^2)/2 = \Delta n$, что можно приближённо записать как $\gamma(\gamma - \varphi) = \Delta n$, откуда находим угол отклонения луча:

$$\Delta\varphi = \gamma - \varphi = \frac{\Delta n}{\gamma}.$$

Как видно из рис. 11.6, $\cos\gamma = R/(R+h)$, откуда:

$$\gamma \approx \sin\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2} \approx \frac{\sqrt{2Rh}}{R+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Луч претерпевает два одинаковых отклонения: при входе в атмосферу и при выходе из неё, поэтому результирующий угол будет равен $2\Delta\varphi$. Таким образом, в условиях рефракции угол ψ, под которым сходятся солнечные лучи, оказывается равным $\psi = 2\delta + 4\varphi$.

Окончательно получим:

$$L_2 = \frac{2R}{2\delta + 4\Delta\varphi} = \frac{R}{\delta + \Delta n\sqrt{2R/h}} \approx 408 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр тёмного пятна на луне

$$D_2 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_2}\right) \approx 753 \text{ км}$$

и искомое отношение площадей $\varepsilon = (D_2/D)^2 \approx 4{,}8\,\%$.

Критерии оценивания Т-11-5

1. Найдено расстояние $L_1 = \frac{R}{\delta} = 1{,}4 \cdot 10^6$ км .... 1 балл
2. Получена верная формула для расстояния до Луны .... 0,5 балла
3. Решена геометрическая задача: $D_2 = 2\delta R_0$ или D_1/R_0
   $D_1 = 2\delta(L_1 - R_0) = 2R(1 - R_0/L_1)$ .... 1,5 балла
4. Найдено время затмения $T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = 1{,}6$ ч .... 1 балл
5. Правильно построена геометрия хода лучей, найден $\cos\gamma = \frac{R}{R+h}$ .... 1 балл
6. Записан закон Снелла при условии пункта 5 .... 1 балл
7. Идея того, что $\theta = 2\delta\beta$ .... 1 балл
8. Найдено $L_2 = \frac{R}{\delta + 2\beta\delta} = 389 \cdot 10^3$ км .... 1 балл
9. Получен размер тени $D_2 = 2R(1 - R_0/L_2)$ .... 1 балл
10. Найдено отношение площадей $\varepsilon = (D_2/D)^2 = 0{,}0024$ .... 1 балл