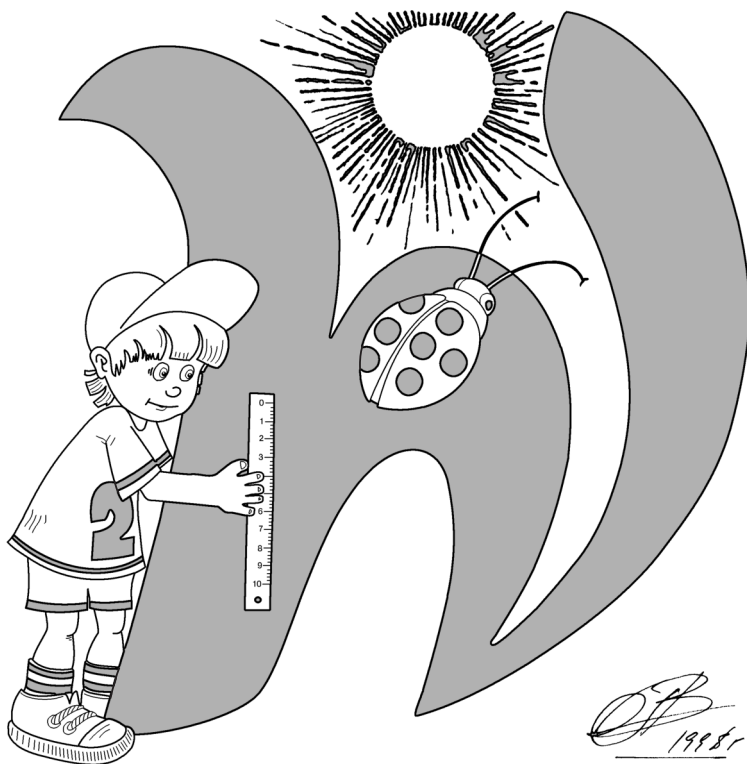


Министерство просвещения Российской Федерации  
Центральная предметно-методическая комиссия  
Всероссийской олимпиады школьников по физике

# LVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

## Заключительный этап

### Теоретический тур



Санкт-Петербург, 2023 г.

Комплект задач подготовлен  
центральной предметно-методической комиссией  
Всероссийской олимпиады школьников по физике  
E-mail: [physolymp@gmail.com](mailto:physolymp@gmail.com)

## Авторы задач

### 9 класс

- **9-Т1.** Иван Юдин
- **9-Т2.** Александр Евсеев
- **9-Т3.** Денис Рубцов
- **9-Т4.** Антон Вергунов
- **9-Т5.** Антон Вергунов, Андрей Уймин

### 10 класс

- **10-Т1.** Александр Аполонский
- **10-Т2.** Вадим Ерин
- **10-Т3.** Александр Аполонский
- **10-Т4.** Андрей Уймин
- **10-Т5.** Андрей Уймин

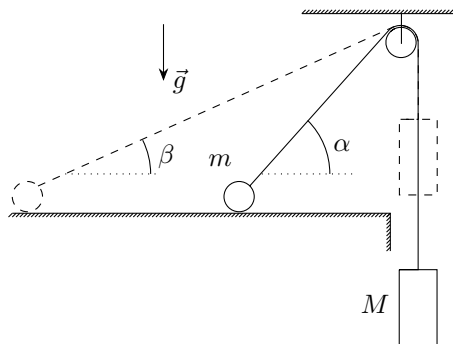
### 11 класс

- **11-Т1.** Александр Аполонский
- **11-Т2.** Григорий Расторгуев
- **11-Т3.** Андрей Уймин
- **11-Т4.** Андрей Уймин
- **11-Т5.** Андрей Уймин

## 9 класс

### Задача №1. Отрыв

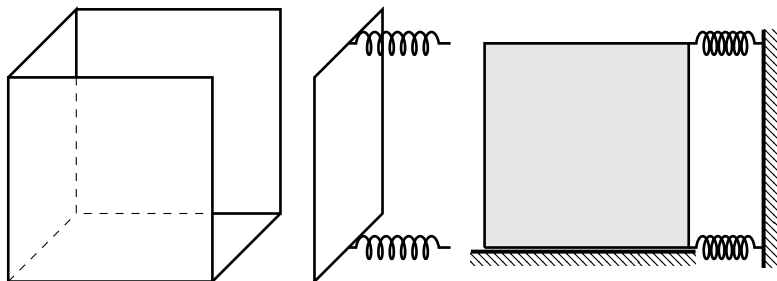
На гладкую горизонтальную поверхность положили маленький шарик массой  $m$ . К нему прикрепили легкую нерастяжимую нить, переброшенную через легкий блок пренебрежимо малого радиуса, на другом конце которой подвесили груз массой  $M$  (см. рис.). Систему отпустили из состояния покоя (изображенного на рисунке пунктирной линией). В некоторый момент времени, когда нить наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ , шарик отрывается от поверхности, а ускорение груза в этот момент времени равно нулю. Трение в оси блока отсутствует.



1. Найдите отношение  $m/M$ .
2. Найдите  $\sin \beta$  угла нити к горизонту в начальный момент времени.

### Задача №2. Аквариум на пружинах

У кубического тонкостенного аквариума ( $a \times a \times a$ ) разбилась боковая стенка. Новую стенку ( $a \times a$ ) решили прижать пружинными фиксаторами. Первую пружину жесткостью  $2k$  закрепили у середины верхнего ребра новой стенки, а вторую пружину жесткостью  $k$  – у середины нижнего ребра. После этого аквариум придвинули к вертикальной стене (см. рис.).



Все поверхности в местах контакта новой стенки с аквариумом плоские и гладкие. Новая стенка жесткая, полностью перекрывает прилегающие боковые стенки и дно, и параллельна плоскости стены. Сила трения в месте контакта

стенки со столом пренебрежимо мала. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы.

1. Каким должно быть минимальное сжатие пружин, чтобы аквариум можно было наполнить водой плотностью  $\rho$  до краёв?

Во время заполнения аквариум считать неподвижным, а вода не просачивается в местах контакта стенки с аквариумом.

2. Каким станет минимальное сжатие пружин, если их поменять местами?

Ускорение свободного падения  $g$  считать известным.

### Задача №3. Холодильник

В тонкостенном цилиндрическом сосуде внутреннего радиуса  $R$  под поршнем находится столб воды высотой  $h_1$  при температуре  $t_0 = 0$  °С. Поршень и дно цилиндра теплоизолированы. Мощность тепловых потерь через боковые стенки пропорциональна площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды  $N = \alpha \cdot S \Delta t$ , где  $\alpha$  известная константа. Цилиндр вертикально ставят в холодильник, начальная температура в котором равна  $t_1 < 0$  °С. Далее температуру в холодильнике изменяют так, что поршень цилиндра перемещается с постоянной скоростью. Лёд, образующийся в цилиндре, не мешает свободному движению поршня. Более того, лёд не всплывает над поверхностью воды, а упирается в поршень, будучи полностью погружённым в воду, время от времени отрываясь от стенок сосуда. Удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , плотности воды  $\rho_{\text{в}}$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}}$ .

1. Определите в какую сторону и с какой скоростью  $v$  перемещается поршень.

2. Найдите в течение какого промежутка времени  $\tau_{\text{max}}$  продолжается такое движение.

3. Установите зависимость температуры  $t$  в холодильнике от времени  $\tau$  в промежутке времени  $[0, \tau_{\text{max}}]$ . Выразите её через  $h_1, t_0, t_1, v, \tau$ .

4. Найдите температуру в момент времени  $\tau_{\text{max}}$ . Выразите через  $t_0, t_1, \rho_{\text{в}}, \rho_{\text{л}}$ .

### Задача №4. Постоянный ток

В упрощённой модели источник постоянного тока состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения  $U_0$  и резистора с сопротивлением  $r$  (см. рис. 1). При подключении источника постоянного тока в цепь, содержащую резисторы с сопротивлением  $R \ll r$ , можно считать, что сила тока  $I_0 \approx U_0/r$ .

Электрическая цепь представляет собой проволочную сетку, которая состоит из звеньев одинакового сопротивления  $R$ . Три звена заменены на одинаковые источники постоянного тока  $I_0$  (см. рис. 2).

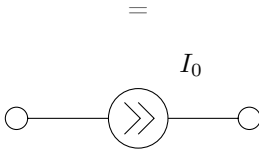
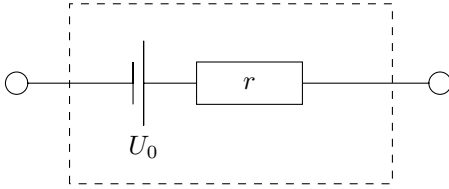


Рис. 1

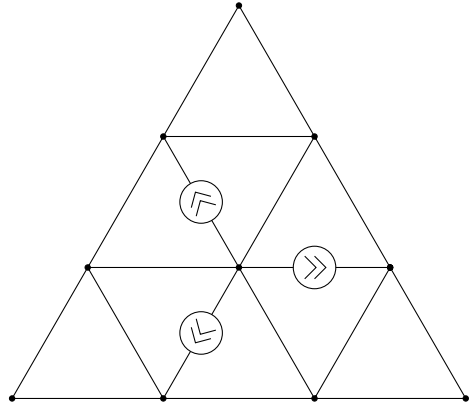
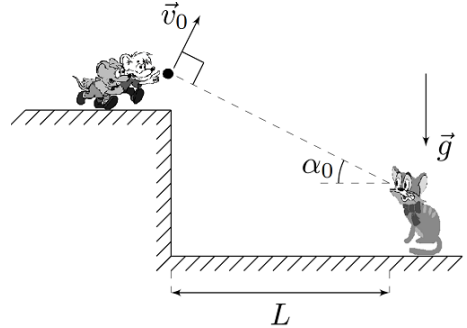


Рис. 2

Найдите, через какие звенья цепи течёт минимальный ток, и чему равна его сила  $I_{\min}$ . Ответ выразите только через  $I_0$ .

### Задача №5. Угловая высота камня

Кот Леопольд стоит на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии  $L$  от вертикального обрыва скалы. С края обрыва мыши бросают камень таким образом, что вектор начальной скорости камня  $\vec{v}_0$ , модуль которой равен  $v_0 = 10$  м/с, направлен перпендикулярно лучу зрения Леопольда.



Угол между горизонтом и лучом зрения Леопольда, направленным на камень, в момент броска был равен  $\alpha_0 = 25^\circ$ , а через некоторое время  $t_1$  после броска камня достиг максимального значения, равного  $\alpha_1 = 38^\circ$ .

Леопольд и траектория броска находятся в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Леопольд и траектория броска находятся в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

1. Чему равно время  $t_1$ ?
2. На каком расстоянии  $L$  от скалы находился Леопольд?

## 10 класс

### Задача №1. Кинематика поршня

Герметично закрытый с обоих концов теплоизолированный цилиндр расположен горизонтально. Внутри цилиндра находится непроводящий тепло легкий вертикальный поршень площадью  $S$ , делящий цилиндр на два отсека. Поршень может перемещаться внутри цилиндра без трения. Отсеки заполнены идеальным одноатомным газом при давлении  $p_0$ . В первый отсек помещён нагреватель, по которому может поступать тепло, во втором отсеке размещён теплообменник, с помощью которого тепло отводится из отсека. Модули мощностей подвода и отвода тепла равны  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Нагреватель и теплообменник приводят в действие одновременно.

В пунктах 1 и 2 считайте, что первоначальные объёмы отсеков равны.

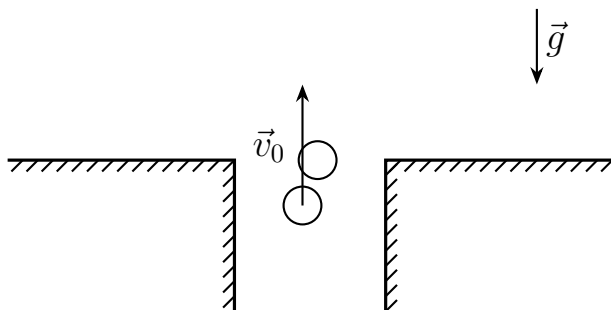
1. Определите скорость перемещения поршня в начальный момент времени, сразу после включения нагревателя и теплообменника.

2. Определите скорость перемещения поршня в момент времени, когда поршень делит объём цилиндра в отношении 2 : 1, если модули мощностей  $q_1$  и  $q_2$  одинаковы и равны  $q$ .

3. Пусть в начальный момент времени поршень делит объём цилиндра в отношении 3 : 1, а во втором (меньшем) отсеке вместо теплообменника установлен нагреватель мощности  $q_2$ . Определите отношение  $q_2/q_1$ , при котором поршень останется неподвижным.

Все процессы считать равновесными.

### Задача №2. Из лунки в поле



В поле находится лунка, из которой вылетает маленький шарик. Непосредственно перед вылетом скорость шарика равна  $\vec{v}_0$  и направлена вертикально вверх. В момент вылета шарик абсолютно упруго сталкивается со вторым таким же шариком, который перед ударом покоился на уровне поверхности поля.

После удара шарики движутся под действием только силы тяжести и падают где-то в поле. Удар шариков о поле абсолютно неупругий.

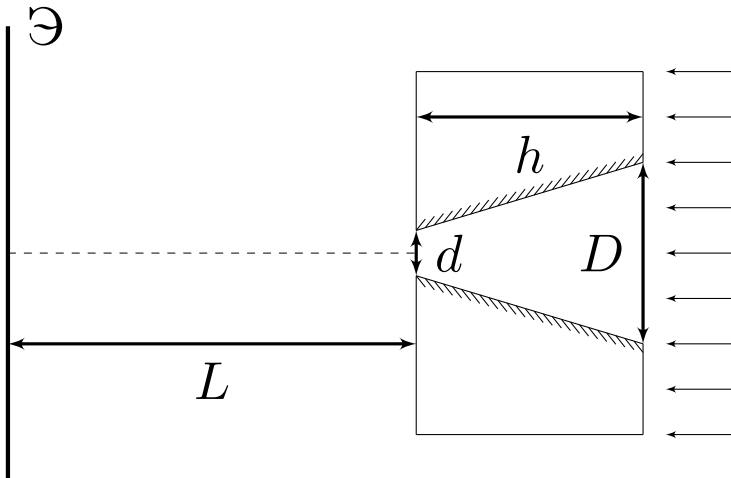
1. Найдите максимально возможное расстояние  $l_{\max}$  между точками падения шариков.

2. Найдите максимально возможное расстояние  $S_{\max}$  от лунки до места падения одного из шариков.

Поверхность поля считайте горизонтальной. Размеры лунки и шариков малы по сравнению с  $l_{\max}$  и  $S_{\max}$ .

### Задача №3. Посеребренный конус

В большой непрозрачной пластине толщиной  $h$  просверлено отверстие. Форма его боковой поверхности представляет собой усечённый конус с диаметрами оснований  $d$  и  $D = 4d$ . Ось конического отверстия перпендикулярна пластине, а боковая поверхность посеребрена и идеально отражает падающий на неё свет. Плоский экран расположен параллельно пластине на расстоянии  $L$  от нее (см. рис.).



Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса.

Геометрические параметры  $h$ ,  $D$  и  $L$  связаны соотношением:  $D \ll h \ll L$ .

1. Изобразите картину, наблюдаемую на экране. Укажите на рисунке все характерные геометрические размеры.

Считайте, что свет попадает на экран только через отверстие в пластине.

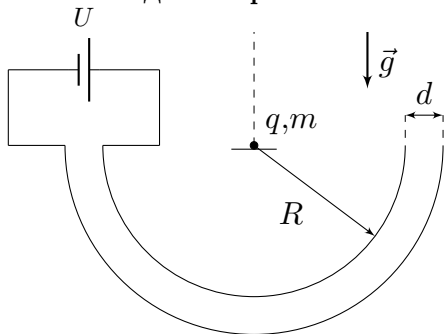
2. Между пластиной и экраном поместили идеальную собирающую линзу. Фокусное расстояние линзы  $F = L/2$ . Главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса. Экран расположен в фокальной плоскости линзы. Считайте, что все лучи, вышедшие из отверстия в пластине, попадают на линзу.

Изобразите картину, наблюдаемую на экране в этом случае. Укажите на рисунке все характерные геометрические размеры.

*Примечание:* Не забудьте привести построения и расчеты, необходимые для определения характерных геометрических размеров, а также обоснование вида картинки, наблюдаемой на экране.

#### Задача №4. Полусферический конденсатор

Две металлические полусферы радиусами  $R$  и  $R + d$  ( $d \ll R$ ), плоскости оснований которых горизонтальны, а центры совпадают, подключены к источнику, напряжение  $U$  которого может изменяться. Суммарный заряд полусфер равен нулю. В центр полусфер на маленькую диэлектрическую подставку помещают точечный заряд  $q > 0$  массой  $m$ , который может перемещаться по вертикальной спице без трения по направлению «вверх». Изначально напряжение на источнике равняется нулю, и его начинают медленно увеличивать. Можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что заряды полусфер равномерно распределены по их поверхностям. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



1. Рассмотрим вспомогательную задачу. Полусфера радиусом  $r$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . В центре полусферы расположен точечный заряд  $q$ . Найдите силу взаимодействия заряда и полусферы.

Вернёмся к полусферическому конденсатору.

2. Найдите заряд  $Q$  меньшей из полусфер при напряжении на источнике равном  $U$ . Считайте, что точечный заряд  $q$  при этом остается в центре полусфер.

3. Напряжение источника медленно увеличивают. Найдите при каком заряде меньшей полусферы  $Q_{\max}$  заряд  $q$  начнет перемещаться. Чему при этом будет равно напряжение источника  $U_{\max}$ ?

4. Найдите изменение электростатической энергии системы  $\Delta W_{\text{эл}}$  в процессе медленного увеличения напряжения источника от  $U_0 = 0$  В до  $U_{\max}$ .

*Примечание:* Используйте приближение

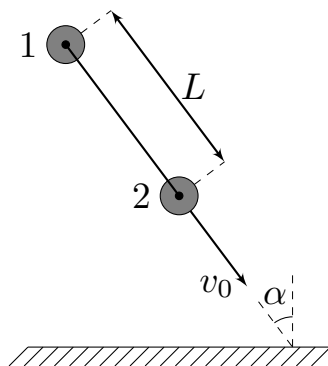
$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad \text{при} \quad nx \ll 1.$$



### Задача №5. Об стенку

На гладкой горизонтальной поверхности недалеко от вертикальной стенки расположена конструкция, состоящая из двух шайб и стержня. Шайбы лежат на плоскости «плашмя». На рисунке представлен вид сверху.

С центром шайбы 2 стержень соединен жестко и не может относительно нее вращаться. С шайбой 1 стержень соединён с помощью плотной посадки на гладкий шарнир, радиус оси которого много меньше радиуса стержня, поэтому шайба 1 может свободно вращаться относительно стержня.



Стержень образует угол  $\alpha = 30^\circ$  с нормалью к стенке. Стержень жесткий и невесомый. Длина стержня  $L = 0,8$  м. Радиусы шайб много меньше длины стержня. Радиус стержня много меньше радиусов шайб. Шайбы одинаковые и однородные.

Конструкции сообщают скорость  $v_0 = 2,5$  м/с, направленную вдоль стержня в сторону стенки и через некоторое время происходит соударение шайбы 2 со стенкой.

1. Покажите, что в процессе удара силы, действующие со стороны стержня на шайбы, можно считать направленными вдоль стержня.

Используйте данный факт при ответе на последующие вопросы, даже если Вы не смогли его обосновать.

2. Определите угловую скорость вращения стержня сразу после абсолютно упругого соударения шайбы 2 со стенкой (стенка гладкая).

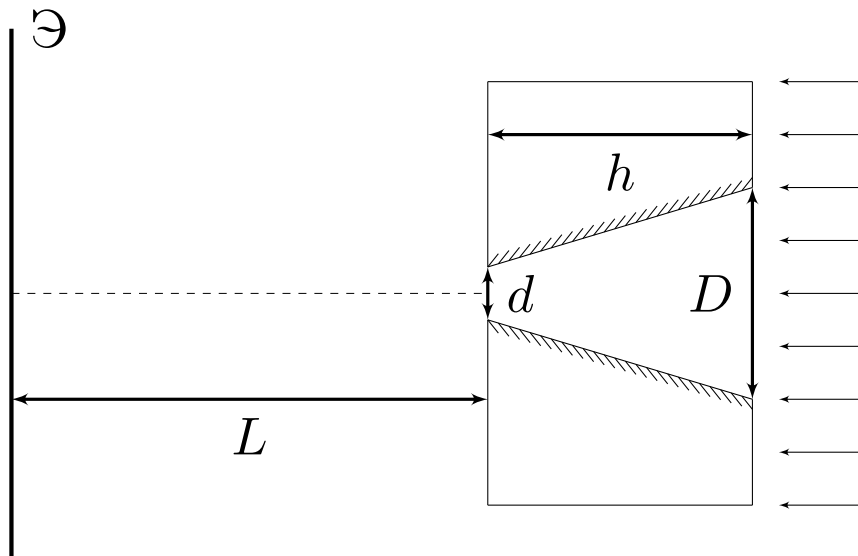
3. Определите угловую скорость вращения стержня сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой. Коэффициент трения между шайбой и стенкой  $\mu$ . Рассмотрите два значения коэффициента трения:  $\mu_1 = 0,2$  и  $\mu_2 = 0,6$ .

*Примечание:* При абсолютно неупругом соударении составляющая скорости шайбы 2, перпендикулярная стенке, обращается в ноль.

## 11 класс

### Задача №1. Щель Кассини

В непрозрачном плоском слое толщиной  $h$  просверлено отверстие, форма боковой поверхности которого представляет собой усечённый конус с диаметрами оснований  $d$  и  $D$ , ось которого перпендикулярна плоским поверхностям слоя. Боковая поверхность конуса посеребрена и идеально отражает падающий на неё свет. За слоем на расстоянии  $L$  от ближайшей к нему плоской поверхности слоя находится плоский экран.



Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса.

Геометрические параметры  $h$ ,  $d$ ,  $D$  и  $L$  связаны соотношениями:  $D \ll h \ll L$ ,  $D = 4d$ .

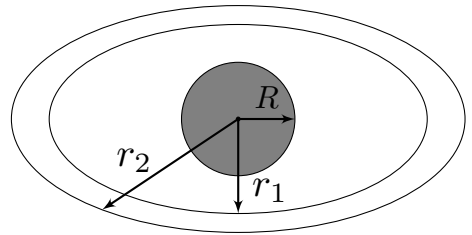
1. Изобразите картину, наблюдаемую на экране. На рисунке укажите все характерные геометрические размеры.

2. Как изменится картина из пункта 1, если между слоем и экраном поместить тонкую собирающую линзу? Фокусное расстояние линзы  $F = L/2$ , главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса, экран расположен в фокальной плоскости линзы.

*Примечание:* все характерные геометрические размеры должны быть выражены через  $d$ ,  $h$  и  $L$ .

### Задача №2. Похоже на Сатурн

По поверхности тонкого плоского непроводящего кольца с внутренним и внешним радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно распределён положительный заряд с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Центр непроводящего шара радиусом  $R \ll r_1, r_2$  совпадает с центром кольца. Шар равномерно заряжен по объёму положительным зарядом  $Q$ .



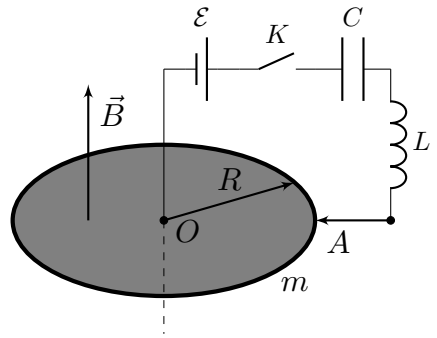
*Примечание:* Ответы на каждый из вопросов задачи должны быть упрощены с учётом приближения  $R \ll r_1, r_2$ .

1. В каких пределах изменяется модуль электрического поля на поверхности шара?

2. При каких значениях  $\sigma$  вектор напряжённости результирующего поля в точках на поверхности шара, удалённых от плоскости кольца на расстояние большее, чем  $0,1 R$ , можно считать направленным вдоль оси вращения системы? Заряд  $Q$  считайте известным.

### Задача №3. Кружатся диски

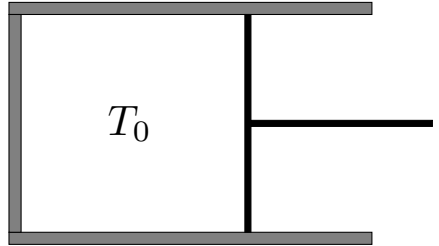
На рисунке показана схема электрической цепи, состоящей из источника с электродвижущей силой  $\mathcal{E}$ , конденсатора ёмкостью  $C$ , катушки индуктивностью  $L$ , ключа  $K$  и металлического диска радиусом  $R$ . Диск может вращаться вокруг своей оси без трения. Диск расположен в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленном вдоль его оси так, как показано на рисунке. Практически вся масса  $m$  диска сосредоточена в его тонком ободе. Источник соединён с диском в его центре  $O$ , а катушка индуктивности соединена с диском с помощью неподвижного скользящего контакта  $A$ . Омическим сопротивлением контура, по которому течёт ток, и наличием у него индуктивности (дополнительно к  $L$ ) можно пренебречь. Изначально ключ  $K$  разомкнут, диск неподвижен, ток в катушке отсутствует, а конденсатор не заряжен. Ключ  $K$  замыкают.



Определите максимальную угловую скорость диска  $\omega_{\max}$  после замыкания ключа, а также время  $\tau$  после замыкания ключа, через которое угловая скорость диска впервые достигает значения  $\omega_{\max}$ .

### Задача №4. Адиабатическая анизотропия

В горизонтальный цилиндрический сосуд герметично вставлен поршень, перемещающийся с помощью прикреплённой к нему рукоятки. В сосуде находится насыщенный пар воды при температуре  $T_0 = 333$  К. Жидкой фазы воды в сосуде нет.



Водяной пар можно считать идеальным многоатомным газом. Удельная теплота парообразования воды при температуре  $T_0$  равна  $L = 2,36$  МДж/кг и в рамках задачи может считаться не зависящей от температуры. Универсальная газовая постоянная равна  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Молярная масса воды равна  $\mu = 18,0$  г/моль.

Считайте известным, что малые относительные изменения давления насыщенного пара и его абсолютной температуры вблизи значений  $p_0(T_0)$  и  $T_0$  соответственно связаны соотношением  $\varepsilon_p = \Delta p/p_0 = \alpha \varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T/T_0$ , где  $\alpha = 15,3$ .

1. Температуру в сосуде начинают медленно изменять. Объём сосуда изменяется таким образом, что всё вещество в сосуде всё время остаётся в газообразном состоянии, при этом водяной пар всё время является насыщенным.

Чему равна молярная теплоёмкость водяного пара в данном процессе?

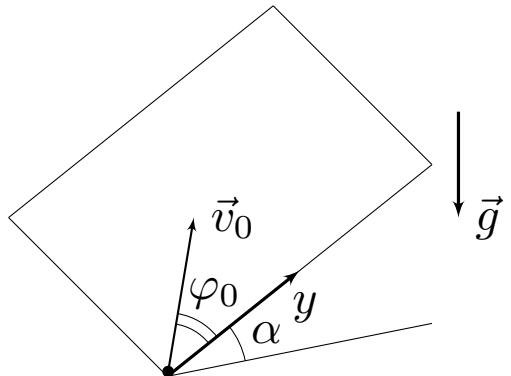
Рассмотрим адиабатически изолированный сосуд.

2. Найдите изменение температуры  $\Delta T_1$  в сосуде при медленном относительном уменьшении его объёма на величину  $\beta = 5\%$ .

3. Найдите изменение температуры  $\Delta T_2$  в сосуде при медленном относительном увеличении его объёма на величину  $\beta = 5\%$ .

### Задача №5. Туда-сюда

На плоской доске, образующей с горизонтом угол  $\alpha = 30,0^\circ$ , находится маленькая шайба. Коэффициент трения между шайбой и доской равен  $\mu = \text{tg } \alpha$ . Вблизи основания доски шайбе сообщают скорость  $v_0 = 8,00$  м/с, и она движется по доске, пока снова не достигнет основания. Основание доски горизонтально. Известно, что в моменты старта и повторного достижения основания доски вектор скорости шайбы образовывал углы  $\varphi_0 = 60,0^\circ$  и



$\varphi_1 = 159,3^\circ$  соответственно с положительным направлением оси  $y$ , направленной вверх по доске (см. рис). Ускорение свободного падения  $g = 9,80 \text{ м/с}^2$ . Шайба не вращается.

*Примечание:* Ответ на каждый из вопросов задачи должен быть как рассчитан, так и выражен аналитически через заданные в условии величины!

1. Определите ускорения шайбы  $a_0$  и  $a_1$  в момент старта и прямо перед повторным достижением основания доски соответственно.
2. Определите скорости шайбы  $u$  и  $v_1$  в верхней точке траектории и прямо перед повторным достижением основания доски соответственно.
3. Определите время  $t$ , через которое шайба повторно достигает основания доски.

## Возможные решения

### Задача №9-Г1. Отрыв

1. Введём систему координат  $xy$  так, как показано на рисунке. Пусть  $\vec{a}$  – ускорение шарика в момент его отрыва от поверхности. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось  $y$ , принимая во внимание, что в момент отрыва  $N = 0$

$$ma_y = mg - T \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для груза  $M$  в проекции на ось  $y$ , принимая во внимание, что груз не ускоряется:

$$Ma_M = Mg - T = 0. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) силу натяжения  $T$ , находим отношение масс:

$$\frac{m}{M} = \sin \alpha.$$

2. Пусть  $v$  и  $u$  – скорости шарика и груза соответственно в рассматриваемый момент, а  $h$  – высота блока над поверхностью.

Поскольку нить нерастяжима, проекция скорости шарика  $v$  на ось  $z$  равна  $u$ :

$$v = \frac{u}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

Поскольку трения в системе нет, выполняется закон сохранения механической энергии:

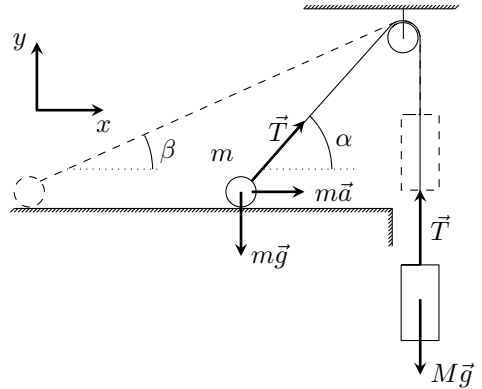
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = -Mg\Delta l, \quad (4)$$

где  $\Delta l = h(1/\sin \alpha - 1/\sin \beta)$  – изменение длины наклонного участка нити. Подставляя отношение  $m/M$  и соотношение (3) в уравнение (4), получим:

$$\frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{mgh}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{\sin \beta} - \frac{1}{\sin \alpha} \right),$$

откуда:

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{v^2(\sin \alpha + \cos^2 \alpha)}{2gh}. \quad (5)$$



Таким образом, задача сводится к определению безразмерного параметра  $gh/v^2$ , для нахождения которого проанализируем динамику шарика.

Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на горизонтальную ось  $x$ :

$$ma_x = ma = T \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{T \cos \alpha}{m} = \frac{g \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (6)$$

Введём ось  $z$ , направленную вдоль наклонного участка нити от шарика к блоку (т.е. образующую угол  $\alpha$  с горизонтом). Проекция ускорения шарика на ось равняется

$$a_z = a \cos \alpha = \frac{g \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}. \quad (7)$$

Перейдём в систему отсчёта точки  $A$  наклонного участка нити, в которой он касается блока. Ускорение шарика  $\vec{a}_{\text{отн}}$  в данной системе отсчёта равняется:

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a} - \vec{a}_A.$$

Поскольку ускорение груза равняется нулю – тангенциальное ускорение точки  $A$  также равняется нулю, откуда следует, что полное ускорение точки  $A$  направлено перпендикулярно наклонному участку нити. Тогда в рассматриваемой системе отсчёта:

$$a_{\text{отн}z} = a_z.$$

В системе отсчёта точки  $A$  шарик движется по окружности радиусом  $l = h/\sin \alpha$ , равным длине наклонного участка нити, со скоростью  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ , равной проекции скорости шарика на ось, перпендикулярную оси  $z$ . Поэтому из выражения для центростремительного ускорения получим:

$$a_{\text{отн}z} = \frac{v_{\perp}^2}{l} = \frac{v^2 \sin^3 \alpha}{h}. \quad (8)$$

Приравнявая (7) и (8), находим:

$$\frac{gh}{v^2} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5), получим:

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha (\sin \alpha + \cos^2 \alpha)}{2 \sin^4 \alpha}, \quad (10)$$

откуда находим угол  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{2 \sin^4 \alpha}{\sin \alpha + \sin^3 \alpha + \cos^4 \alpha}.$$

### Задача №9-Т2. Аквариум на пружинах

#### 1. Метод 1:

Воспользуемся методом виртуальных перемещений для определения сил.

Для этого определим изменение потенциальной энергии равно работе силы тяжести. Представим, что жидкость переходит из верхнего слоя в образовавшееся пространство, тогда  $A_g = -\Delta\Pi \leq -A_F$ . Масса перешедшей жидкости  $m = \rho a^2 \delta x$ .

Для равновесия сил давления получаем:

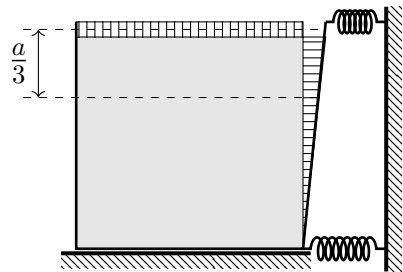
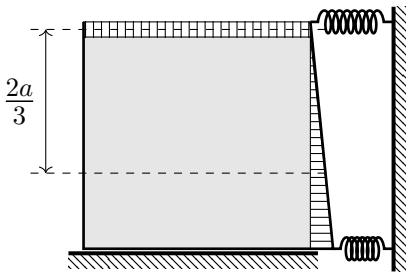
$$(2k\Delta x + k\Delta x)\delta x \geq (\rho a^2 \delta x)g \frac{a}{2} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{6}.$$

Для моментов сил давления относительно верхнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на  $\frac{2a}{3}$ :

$$k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{2a}{3} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}.$$

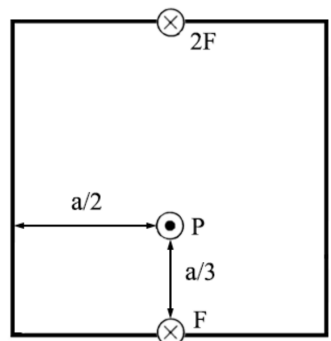
Для моментов сил давления относительно нижнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на  $\frac{a}{3}$ :

$$2k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{a}{3} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{12}.$$



#### Метод 2:

В заполненном аквариуме на боковую стенку действует сила давления воды  $F_P = \frac{1}{2} \rho g a^3$ . Для решения необходимо определить точку приложения этой силы. Поскольку по горизонтали давление воды на одном и том же уровне одинаково, очевидно, что эта точка будет находиться на срединной вертикали.





По вертикали давление распределяется линейно от нуля наверху до  $\rho ga$  внизу.

Известно, что центр тяжести треугольника расположен в точке пересечения его медиан.

Используя аналогию распределения давления по вертикали в нашем случае с распределением по высоте массы полосок одинаковой ширины, на которые параллельно основанию мысленно разрезан равнобедренный треугольник, можно утверждать, что точка приложения силы находится на расстоянии  $a/3$  от дна сосуда.

### **Метод 3:**

Строгий математический расчёт силы и моментов сил можно опроверсти с помощью интегрирования.

Определим давление как функцию  $y$  - глубины от поверхности жидкости:  $p(y) = \rho gy$ .

Суммарная сила давления воды:

$$F_P = \int_0^a p(y)ady = \frac{\rho ga^3}{2}.$$

Момент силы относительно верхней кромки:

$$M_B = \int_0^a yp(y)ady = \frac{\rho ga^4}{3}.$$

Момент силы относительно нижней кромки:

$$M_H = \int_0^a (a - y)p(y)ady = \frac{\rho ga^4}{6}.$$

Условия для отсутствия протечек можно записать в виде неравенств:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho ga^3}{2} \quad (\text{условие на направление результирующей силы})$$

$$k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho ga^4}{3} \quad (\text{отсутствие поворота вокруг верхнего ребра})$$

$$2k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho ga^4}{6} \quad (\text{отсутствие поворота вокруг нижнего ребра})$$

Очевидно, неравенство  $k\Delta x \geq \frac{\rho ga^3}{3}$  наиболее жесткое.

$$\text{Откуда } \Delta x_{\min} = \frac{\rho ga^3}{3k}$$

2. Отметим, что, поскольку пружины сжимаются одинаково, суммарная сила, с которой они будут давить на стенку аквариума будет в 2 раза больше силы давления воды.

Если пружины в условии поменять местами, последние 2 условия примут вид:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2} \quad (\text{условие на направление результирующей силы})$$

$$2k\Delta x \cdot a \geq \frac{1}{3}\rho g a^3 \quad (\text{отсутствие поворота вокруг верхнего ребра})$$

$$k\Delta x \cdot a \geq \frac{1}{6}\rho g a^3 \quad (\text{отсутствие поворота вокруг нижнего ребра})$$

Откуда  $\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{6k}$ . При этом суммарная сила, с которой пружины будут давить на стенку аквариума в точности совпадет с силой давления.

### Задача №9-Т3. Холодильник

1. Пусть  $N$  – мощность тепловых потерь. Благодаря ему за малое время  $\Delta\tau$  кристаллизуется  $\Delta m$  льда:

$$N\Delta\tau = \Delta m\lambda.$$

В жидком состоянии эта масса занимала объём  $\Delta V_{\text{в}}$ , а в твёрдом  $\Delta V_{\text{л}}$ :

$$\Delta m = \rho_{\text{в}}\Delta V_{\text{в}} = \rho_{\text{л}}\Delta V_{\text{л}}.$$

Следовательно, изменение объёма содержимого благодаря кристаллизации  $\Delta m$  льда  $\Delta V = \Delta V_{\text{л}} - \Delta V_{\text{в}} = \frac{\Delta m}{\rho_{\text{л}}} - \frac{\Delta m}{\rho_{\text{в}}} = \Delta m \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} > 0$ . То есть поршень поднялся вверх. Мощность тепловых потерь через боковую поверхность цилиндра пропорциональна площади этой поверхности и разности температур воды и окружающей среды:

$$N = \alpha \cdot h \cdot 2\pi R(t_0 - t).$$

Скорость подъёма поршня

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta\tau} = \frac{\Delta V}{\pi R^2 \Delta\tau} = \frac{\Delta m(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\Delta\tau \rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}\pi R^2} = \frac{N(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}\pi R^2} = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}R} \cdot h(t_0 - t).$$

Так как скорость постоянна, используем выражение для неё в начальный момент времени  $v = C \cdot h(t_0 - t) = C \cdot h_1(t_0 - t_1)$ . Следовательно:

$$v = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}R} \cdot h_1(t_0 - t_1).$$

2. Равномерное движение поршня может продолжаться вплоть до кристаллизации всей воды. Максимальное изменение объёма системы

$$\Delta V_0 = \Delta m_0 \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} = \pi R^2 h_1 \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}}.$$

Искомая продолжительность процесса

$$\tau_{\max} = \frac{\Delta V_0}{\pi R^2 v} = \frac{\lambda \rho_{\text{в}} R}{2\alpha(t_0 - t_1)}.$$

3. Из условий  $h(t_0 - t) = h_1(t_0 - t_1)$  и  $h(\tau) = h_1 + v\tau$  можно получить искомую зависимость

$$t = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{h_1}{h_1 + v\tau}.$$

4. Подставим выражение для  $\tau_{\max}$  в закон изменения температуры и найдём её значение в конечный момент времени:

$$t_{\text{к}} = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

### Задача №9-Т4. Постоянный ток

#### Первое решение:

Заметим, что схема переходит сама в себя при повороте на  $120^\circ$  вокруг центрального узла. У всех источников постоянного тока один узел общий, а вторые узлы подключены к эквипотенциальным точкам. Значит через источники протекают одинаковые токи, при этом равные  $I_0$ , поскольку  $R \ll r$ .

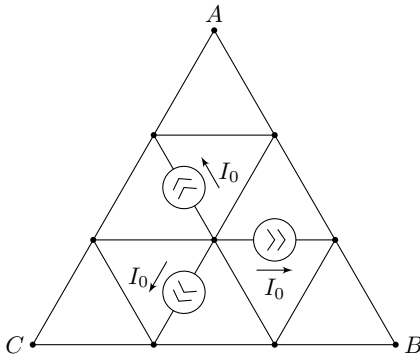


Рисунок 1

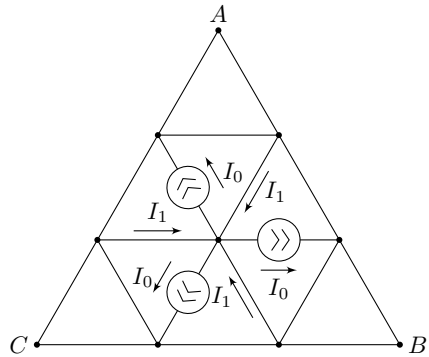


Рисунок 2

Также из симметрии следует, что должны быть равны и токи  $I_1$ , втекающие в центральный узел.

Алгебраическая сумма токов для центрального узла равна 0, значит  $I_1 = I_0$ .

Расставим токи, текущие через элементы цепи, находящиеся в вершине  $A$ , в силу симметрии такие же токи протекают через элементы, находящиеся в вершинах  $B$  и  $C$ .

Пусть через каждый из оставшихся элементов цепи протекает некоторый ток  $I_2$ . Так как схема симметрична, потенциалы узлов  $A$  и  $C$  равны, тогда разность потенциалов  $\varphi_C - \varphi_A = 0$ . Или

$$IR - I_2R + IR = 0 \Rightarrow I_2 = 2I.$$

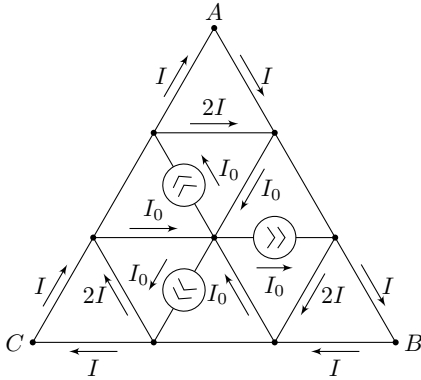


Рисунок 3

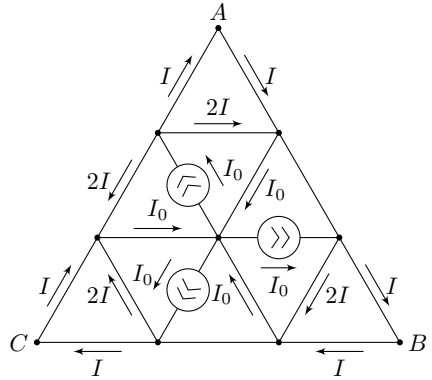


Рисунок 4

Тогда

$$I_0 = I + 2I + 2I = 5I \Rightarrow I_{\min} = I = \frac{I_0}{5}.$$

**Второе решение:**

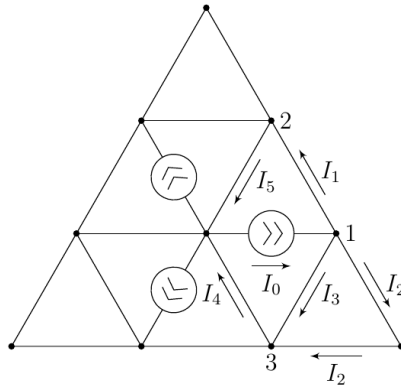


Рисунок 5

Расставим токи по переключкам цепи  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ . Потенциал в центральной точке цепи примем равным нулю. Запишем разность потенциалов между узлами 3 и 1:

$$\Delta\varphi_{13} = RI_3 = RI_2 + RI_2 = 2RI_2 \Rightarrow I_3 = 2I_2.$$

В силу симметрии цепи  $\varphi_2 = \varphi_3$  (при повороте на  $120^\circ$  цепь переходит сама в себя) поэтому

$$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{13} \Rightarrow RI_1 = RI_3 \Rightarrow I_1 = I_3.$$

Запишем закон сохранения заряда для узла 1:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = 2I_3 + I_2 = 5I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I_0}{5}.$$

**Задача №9-Т5. Угловая высота камня**

1. Поскольку вектор начальной скорости  $\vec{v}_0$  направлен перпендикулярно лучу зрения – он образует угол  $\alpha_0$  с вертикалью.

Траектория камня представляет собой участок параболы ветвями вниз, поэтому максимальное значение  $\alpha_1 = 38^\circ$  реализуется, если Леопольд расположен вне искомой параболы, и в момент времени  $t_1$ , когда угол между лучом зрения и горизонтом достигает максимального значения, луч зрения направлен по касательной к траектории камня. Это означает, что в данный момент скорость камня  $\vec{v}_1$  направлена прямо на Леопольда и образует угол  $\alpha_1$  с горизонтом.

Для определения времени  $t_1$  построим векторный треугольник скоростей для данного момента времени. Из теоремы синусов находим:

$$\frac{gt_1}{\sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)} = \frac{v_0}{\sin(\pi/2 - \alpha_1)},$$

откуда:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)}{g \sin(\pi/2 - \alpha_1)} \approx 1,24 \text{ с.}$$

2. Введём систему координат  $xy$  с началом в месте расположения глаз Леопольда так, как показано на рисунке. Тогда зависимости координат  $x(t)$ ,  $y(t)$  следующие:

$$x(t) = L - v_0 \sin \alpha_0 t,$$

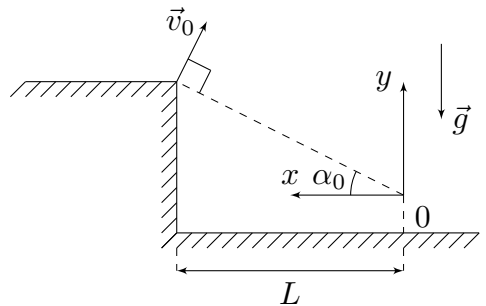
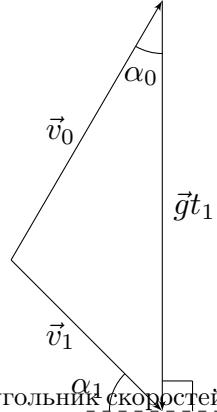
$$y(t) = L \operatorname{tg} \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда для тангенса угла  $\alpha_1$  в момент времени  $t_1$  получим:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{L \tan \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 t_1 - gt_1^2/2}{L - v_0 \sin \alpha_0 t_1},$$

откуда:

$$L = \frac{v_0 t_1 (\cos \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_0) - gt_1^2/2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_0} \approx 24,3 \text{ м.}$$



### Задача №10-Т1. Кинематика поршня

1. По условию поршень легкий и перемещается в сосуде без трения. Следовательно, в любой момент времени давление газа по обе стороны от поршня одинаково. Для объёмов отсеков  $V_1$  и  $V_2$  справедливо равенство  $V_1 + V_2 = 2V_0$ , где  $V_0$  – начальный объём отсека. Рассмотрим процесс, происходящий с газом за малый промежуток времени  $\Delta t$ , и запишем первое начало термодинамики для каждого отсека:

$$\begin{cases} q_1 \Delta t = \frac{3}{2} \nu_1 R \Delta T_1 + p \Delta V, \\ -q_2 \Delta t = \frac{3}{2} \nu_2 R \Delta T_2 - p \Delta V. \end{cases}$$

Запишем для каждого отсека уравнение Менделеева–Клапейрона и выразим изменение температуры:

$$\begin{cases} pV_1 = \nu_1 RT_1, \\ pV_2 = \nu_2 RT_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_1 R \Delta T_1 = p \Delta V + V_1 \Delta p, \\ \nu_2 R \Delta T_2 = -p \Delta V + V_2 \Delta p. \end{cases}$$

Отсюда получим, что

$$\begin{cases} q_1 \Delta t = \frac{3}{2} V_1 \Delta p + \frac{5}{2} p \Delta V, \\ -q_2 \Delta t = \frac{3}{2} V_2 \Delta p - \frac{5}{2} p \Delta V. \end{cases}$$

Сложим и вычтем друг из друга записанные выше уравнения:

$$\begin{cases} (q_1 - q_2) \Delta t = 3V_0 \Delta p, \\ (q_1 + q_2) \Delta t = \frac{3}{2} (V_1 - V_2) \Delta p + 5p \Delta V. \end{cases} \quad (*)$$

Тогда для начального момента ( $p = p_0$ ,  $V_1 = V_2 = V_0$ ) получим  $(q_1 + q_2) \Delta t = 5p_0 \Delta V$ . Отсюда, учитывая, что  $\Delta V = S v_0 \Delta t$ , найдём начальную скорость поршня  $v_0$ :

$$v_0 = \frac{q_1 + q_2}{5p_0 S}.$$

2. Если  $q_1 = q_2 = q$ , то задача упрощается, и из первого уравнения в (\*) находим, что  $p = p_0 = \text{const}$ . Из второго уравнения в (\*) получим  $2q \Delta t = 5p_0 \Delta V$ . Это означает, что скорость движения поршня постоянна и равна  $v = 2q / (5p_0 S)$ .

3. Если отношение объёмов  $V_1 : V_2 = 3 : 1$ , то  $V_1 = 3V_0/2$ ,  $V_2 = V_0/2$ . Поскольку поршень в этом пункте задачи неподвижен, объём обоих отсеков со временем не меняется. Перепишем уравнения (\*), изменив знак у  $q_2$  и учитывая, что в каждом отсеке происходит изохорный процесс ( $\Delta V = 0$ ):

$$\begin{cases} (q_1 + q_2) \Delta t = 3V_0 \Delta p, \\ (q_1 - q_2) \Delta t = \frac{3}{2} V_0 \Delta p. \end{cases}$$

Из полученных уравнений следует, что

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{3}.$$

**Задача №10-Т2. Из лунки в поле**

1. Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии при соударении:

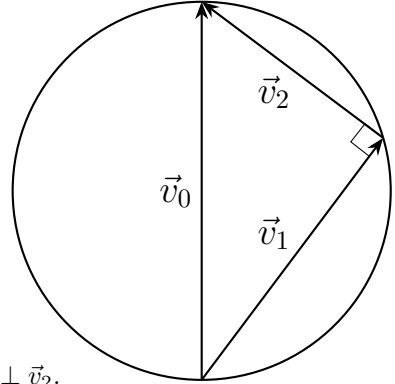
$$\begin{cases} m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 & \text{ЗСИ} \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} & \text{ЗСЭ} \end{cases}$$

Возведем ЗСИ в квадрат получим:

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2.$$

С учетом ЗСЭ получим

$$2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \implies \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2.$$



Поскольку  $v_1^2 + v_2^2 = v_0^2$  и  $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , то треугольник скоростей является прямоугольным и вписан окружность с диаметром  $v_0$ .

Введём в точке старта систему координат  $yOx$ , где ось  $y$  направлена вертикально вверх, а ось  $x$  направлена горизонтально. Далее под  $v_{x(i)}$  и  $v_{y(i)}$  подразумеваются соответственно модули горизонтальной и вертикальной составляющих компонент скоростей  $i$ -го шарика сразу после удара. Отметим, что  $v_{x(1)} = v_{x(2)} = v_x$ .

Найдём дальность полета  $i$ -го шарика:

$$t_i = \frac{2v_{y(i)}}{g}, \quad l_i = v_x t_i \implies l_i = \frac{2v_x v_{y(i)}}{g}.$$

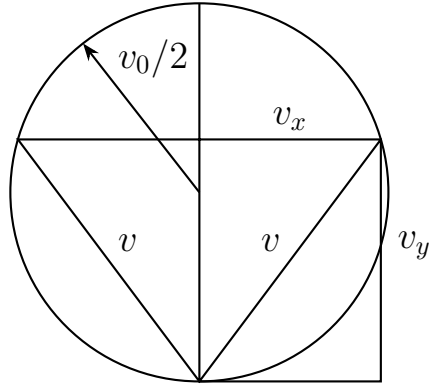
Для расстояния между точками падения шариков имеем:

$$l = l_1 + l_2 = \frac{2v_x (v_{y(1)} + v_{y(2)})}{g} = \frac{2v_0 v_x}{g}.$$

Таким образом, расстояние между точками падения максимально при максимальном значении  $v_x$ , равном радиусу окружности или  $v_0/2$ . Таким образом, ответ на первый вопрос:

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

2. Максимальная дальность полета одного из шариков соответствует максимальному значению произведения  $v_x v_{y(i)}$ , следовательно будет одинаковой для обоих шариков. Произведение  $v_x v_y$  геометрически представляет собой площадь прямоугольника со сторонами  $v_x$  и  $v_y$ . В свою очередь, данная площадь равна площади равнобедренного треугольника с равными сторонами  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  и основанием  $2v_x$ . Этот треугольник вписан в окружность радиусом  $v_0/2$ . Максимум площади треугольника, вписанного в окружность радиусом  $R$ , достигается в случае равностороннего треугольника и равен:



$$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \implies (v_x v_y)_{\max} = \frac{3\sqrt{3}v_0^2}{16},$$

откуда:

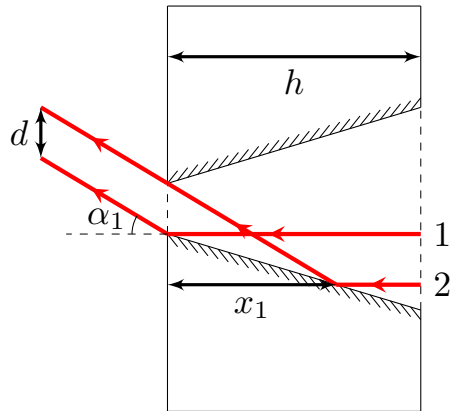
$$l_{i(\max)} = \frac{3\sqrt{3}v_0^2}{8g}.$$

### Задача №10-Т3. Посеребрённый конус

1. Рассмотрим пучок лучей, падающих на правое (по рисунку) основание конуса диаметром  $D$ . Часть лучей, идущих в пределах круга диаметром  $d$  с центром на оси конуса, проходит без препятствий и образует на экране круглое пятно того же диаметра  $d_0 = d$ .

Остальные лучи, прошедшие через входное сечение конуса, испытывают не менее одного отражения от боковой поверхности конуса. Поскольку оптическая схема имеет осевую симметрию, то эти лучи будут образовывать кольца, с центром в точке пересечения экрана осью конуса. Выясним количество и геометрию колец (радиусы и ширину колец, а также возможность их перекрытия друг с другом).

В дальнейшем будем рассматривать лучи, падающие на одну из образующих конической поверхности. Пусть  $\alpha_0$  – угол между направлением исходного пучка





света и конической поверхностью отверстия. Из геометрии  $\alpha_0 = (D - d)/2h = 3d/2h$ . Заметим, что из условия следует  $\alpha_0 \ll 1$ .

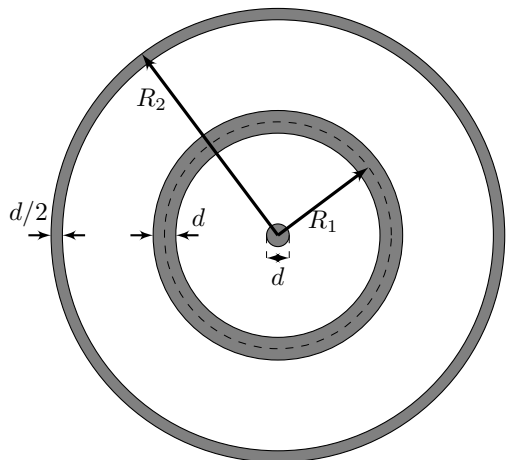
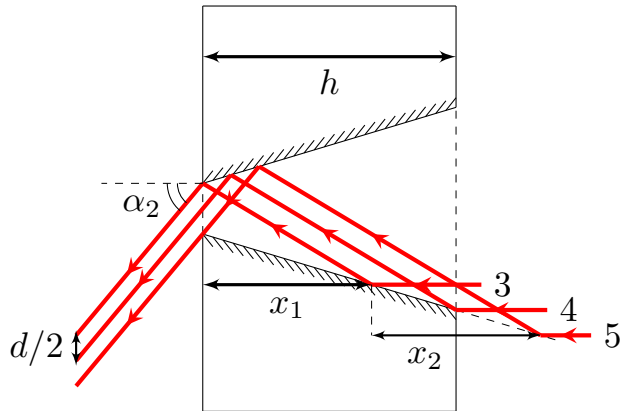
Рассмотрим луч 1 исходного пучка, падающий на самый край выходного сечения конуса и не отражавшийся до этого. После одного отражения он выйдет из отверстия под углом  $2\alpha_0$  к начальному направлению.

Теперь рассмотрим луч 2, падающий на коническую поверхность максимально далеко от выходного отверстия и испытывающий ровно одно отражение до выхода из пластины.

Найдем расстояние  $x_1$  от места падения луча до левой поверхности пластины. Так как  $\alpha_0 \ll 1$ , то с хорошей точностью можем считать равным  $\pi/2$  угол между конической поверхностью отверстия и поверхностью пластины. В таком случае  $x_1 \approx d/\text{tg } \alpha_0 = 2h/3$ .

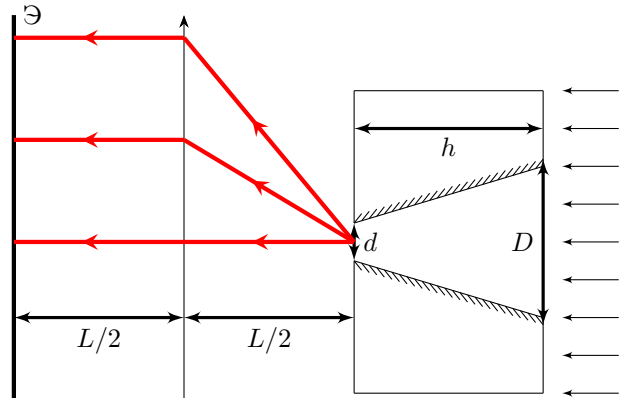
Эти лучи (с учетом симметрии) образуют на экране кольцо, толщина которого  $d_1 = d$ . Радиус средней линии кольца  $R_1$  найдем рассмотрев ход луча, испытавшего одно отражение и вышедшего из центра выходного отверстия. Так как луч выходит под углом  $\alpha_1 = 2\alpha_0$  к оси конуса, то  $R_1 = L \text{tg } \alpha_1 = 3dL/h$ . Заметим, что  $R_1 \gg d$  (толщины первого кольца и диаметра центрального пятна), что означает отсутствие пересечения первого кольца с центральным пятном.

Рассмотрим лучи, отразившиеся от конической поверхности отверстия дважды. Они выйдут из пластины под углом  $\alpha_2 = 4\alpha_0$  и образуют на экране еще одно кольцо. Найдем расстояние  $x_2$  между точками первого отражения предельных лучей из этой группы. Так как  $\alpha_0 \ll 1$ , то с хорошей точностью  $x_2 = x_1 = 2h/3$ . Как мы видим толщины пластины не достаточно для того, чтобы лучи, испытавшие два отражения, выходили в заданном направлении со всей площади выходного отверстия. Из хода пре-



дельных лучей 3 и 4 видно, что толщина второго кольца  $d_2 = d/2$ , а радиус внешней части второго кольца равен  $R_2 = L \operatorname{tg} \alpha_2 = 6dL/h$ .

2. Все вышедшие из отверстия пучки параллельных лучей соберутся в фокальной плоскости. Определить место их сбора можно следующим образом: так как  $h \ll L$  и  $d \ll h$ , то можно считать, что все лучи выходят практически из одной точки, совпадающей с фокусом линзы, значит после преломления они будут идти параллельно главной оптической оси. Из рисунка видно, что в таком случае радиусы колец уменьшатся в два раза.  $R'_1 = R_1/2 = 3dL/(2h)$ ,  $R'_2 = R_2/2 = 3dL/h$ .



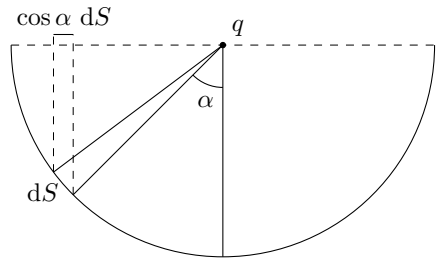
Определим как изменятся их толщины и диаметр центрального пятна.

Центральное пятно образуется параллельным пучком лучей, идущим вдоль главной оптической оси. Идеальная линза собирает такие лучи в точку, поэтому в приближении геометрической оптики размер центрального пятна будет много меньше  $d$ .

Кольца образуются также параллельными пучками лучей, которые идеальная линза собирает в фокальной плоскости, поэтому толщина колец тоже станет много меньше  $d$ .

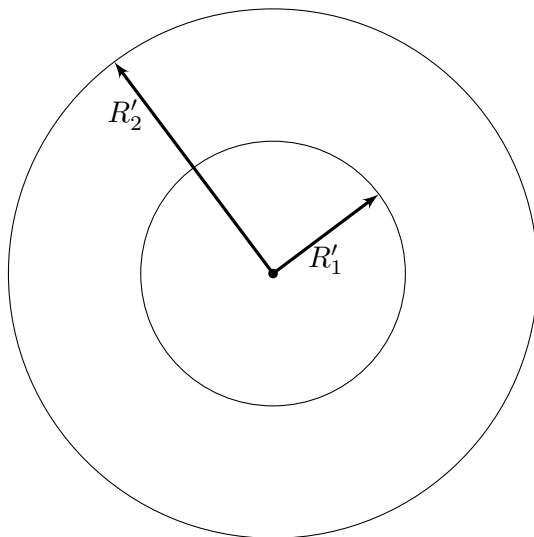
### Задача №10-Т4. Полусферический конденсатор

1. Сила взаимодействия заряда и полусферы направлена вдоль оси вращения. Пусть  $\alpha$  – угол между осью вращения и линией, проведённой из центра полусферы в её некоторую точку, а  $dS$  – малый элемент поверхности полусферы вблизи данной точки. Тогда получим:



$$dF_y = dF \cos \alpha = q \cdot \frac{\sigma dS}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \cos \alpha = \frac{q\sigma}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot dS \cos \alpha.$$

Далее возможны два варианта рассуждений.



**Первое решение:** Величина  $dS \cos \alpha$  представляет собой проекцию элемента площади  $dS$  на основание. Поскольку величина  $r$  постоянна, суммирование проводится следующим образом:

$$F = \frac{q\sigma \sum dS \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где  $\sum dS \cos \alpha = \pi r^2$  – площадь круга в основании полусферы.

Подставляя, находим:

$$F = \frac{q\sigma}{4\epsilon_0}.$$

**Второе решение:** Рассмотрим взаимодействие заряда с тонкой кольцевой полоской. Для её площади  $dS$  имеем:

$$dS = 2\pi R dl,$$

где  $R = r \sin \alpha$  – радиус полоски, а  $dl = r d\alpha$  – её ширина.

Отсюда:

$$dF_y = 2\pi R dl \cdot \frac{q\sigma \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q\sigma \sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{2\epsilon_0}.$$

Учитывая, что  $\cos \alpha \, d\alpha = d(\sin \alpha) = dt$ , получим:

$$F_y = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^1 t \, dt.$$

Интегрируя, находим:

$$F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

2. Определим заряд  $Q$  на полусферах при напряжении источника  $U$ . Поскольку  $d \ll R$  – электрическое поле заряда  $q$  в зазоре между полусферами можно считать постоянным по модулю и равным  $E_q = q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$ . Тогда напряжение, создаваемое зарядами полусфер, равно:

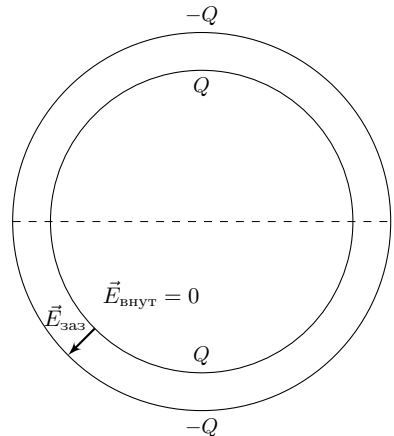
$$U_Q = U - U_q = U - \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Обратим внимание, что эта величина также постоянна. Опишем два способа определения электрического поля  $E_{\text{заз}}$  в зазоре:

**Первое решение:** Мысленно построим полусферы до сфер, равномерно заряженных по поверхности одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами  $\pm 2Q$ .

Тогда внутри сферы радиусом  $R$  электрическое поле равняется нулю во всех точках, а в зазоре между ними электрическое поле равняется:

$$E_{\text{заз}} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$



Поскольку  $d \ll R$  – создаваемое добавленными полусферами электрическое поле пренебрежимо мало по сравнению с полным электрическим полем  $E_{\text{заз}}$ , поскольку при достаточно больших расстояниях от краёв эти полусферы ведут себя как одна с нулевым суммарным зарядом.

**Второе решение:** Поскольку радиусы сфер велики по сравнению с толщиной в зазоре и поскольку суммарный заряд системы равен нулю – электрическое поле в зазоре между полусферами с хорошей точностью можно приблизить

электрическим полем внутри плоского конденсатора, поскольку поверхностные плотности заряда на полусферах по модулю практически совпадают. Отсюда:

$$E_{\text{зая}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

Воспользовавшись выражением для электрического поля в зазоре, получим:

$$U_Q = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = U - \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

откуда находим:

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 R^2 U}{d} - \frac{q}{2}.$$

3. Поскольку заряды полусфер равны  $\pm Q$ , а их площади равны соответственно  $2\pi R^2$  и  $2\pi(R+d)^2$ , для силы  $F$  электростатического взаимодействия заряда  $q$  с полусферами находим:

$$F = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2} \right) = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2} \left( 1 - \left( 1 + \frac{d}{R} \right)^{-2} \right) \approx \frac{qQd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

В момент начала движения  $F = mg$ , откуда находим заряд  $Q_{\text{max}}$ , при котором заряд  $q$  начинает движение:

$$Q_{\text{max}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{qd}.$$

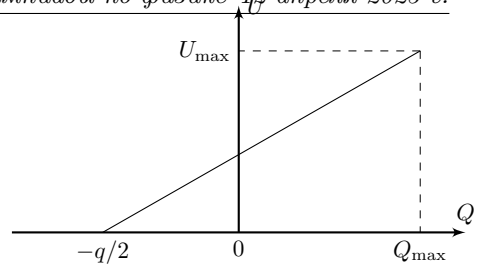
Подставляя связь  $Q$  и  $U$ , для напряжения  $U_{\text{max}}$  получим:

$$U_{\text{max}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left( 1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d} \right).$$

4. Для определения изменения электростатической энергии системы можно использовать два подхода – закон изменения энергии и вычисление её каждой компоненты.

**Первое решение:** Поскольку напряжение  $U$  между обкладками изменяется медленно, изменение электростатической энергии системы  $\Delta W$  равняется работе источника по перемещению зарядов между обкладками.

Для её определения построим график зависимости  $U(Q)$ . При нулевом напряжении на источнике заряды на полусферах равны  $\mp q/2$ . Работа источника равна площади под этим графиком при изменении заряда полусфер от величины  $-q/2$  до величины  $Q_{\max}$ . Эта площадь, в свою очередь, равна площади треугольника со сторонами  $U_{\max}$  и  $Q_{\max} + q/2$ . Таким образом:



$$A_{\text{ист}} = \frac{U_{\max}}{2} \left( Q_{\max} + \frac{q}{2} \right),$$

и окончательно:

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 + \frac{8\pi\epsilon_0 R^3 mg}{q^2 d} \right)^2.$$

**Второе решение:** Электростатическая энергия системы складывается из энергии взаимодействия  $W_C$  полусфер друг с другом и энергии взаимодействия  $W_q$  полусфер с зарядом  $q$ .

Выражение для энергии полусфер совпадает с выражением для энергии конденсатора:

$$W_C = \frac{Q^2}{2C} \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 R^2}{d}.$$

Энергия  $W_1$  взаимодействия одной полусферы с зарядом  $Q$  и радиусом  $r$  с точечным зарядом  $q$ , расположенным в её центре, равна:

$$W_1(r) = Q\varphi_q(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

откуда:

$$W_q = W_1(R) - W_1(R+d) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \approx \frac{Qqd}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Тогда выражение для электростатической энергии системы  $W$ :

$$W = W_C + W_q = \frac{Q^2 d}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{Qqd}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q(Q+q)d}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Подставляя связь  $U$  и  $Q$ , находим:

$$W = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \left( \left( \frac{2\pi\epsilon_0 R^2 U}{d} \right)^2 - \left( \frac{q}{2} \right)^2 \right).$$

Таким образом, выражение для изменения электростатической энергии системы следующее:

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 + \frac{8\pi\epsilon_0 R^3 m g}{q^2 d} \right)^2.$$

**Третье решение:** Рассмотрим произвольную систему точечных зарядов. Пусть  $q_i$  – точечный заряд с номером  $i$ , а  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый остальными зарядами в месте расположения заряда  $q_i$ . Тогда потенциальная энергия  $i$ -го заряда в поле остальных равняется:

$$W_i = q_i \varphi_i.$$

Если просуммировать величины  $W_i$ , то полученная сумма будет равна удвоенной электростатической энергии системы  $2W$ , поскольку в данной сумме каждое взаимодействие учитывается два раза. Таким образом:

$$W = \sum_i \frac{q_i \varphi_i}{2}.$$

Применяя последнее соотношение, получим:

$$W = \frac{\varphi_+ Q}{2} + \frac{\varphi_- (-Q)}{2} + \frac{\varphi_q q}{2},$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  – потенциалы на поверхностях полусфер с зарядами  $Q$  и  $-Q$  соответственно, а  $\varphi_q$  – потенциал поля полусфер в их центре.

Имеем:

$$W = \frac{UQ}{2} + \frac{q}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+d)} \right) \approx \frac{UQ}{2} + \frac{qQd}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Подставляя связь  $Q$  и  $U$ , находим:

$$W = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \left( \left( \frac{2\pi\epsilon_0 R^2 U}{d} \right)^2 - \left( \frac{q}{2} \right)^2 \right).$$

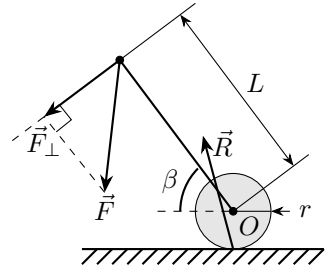
Тогда для изменение электростатической энергии имеем:

$$\Delta W = \frac{q^2 d}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 + \frac{8\pi\epsilon_0 R^3 mg}{q^2 d} \right)^2.$$

### Задача №10-Т5. Об стену

1. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс системы (центром шарика).

Рассмотрим силы, действующие на твердое тело «стержень + шайба 2». Со стороны стенки на шайбу действует сила  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ , приложенная к точке контакта со стеной. На свободный конец стержня действует сила  $\vec{F}$  со стороны шайбы 1. Также действует сила инерции, приложенная к центру масс тела (центру шайбы).



Запишем закон сохранения энергии. Кинетическая энергия тела в этой системе отсчета стремится к нулю, так как центр шайбы неподвижен, ее размер мал, а стержень невесомый. Тогда суммарная работа всех сил, а как следствие и суммарная мощность, равна нулю.

Сила инерции работу не совершает (центр масс не движется). Мощность силы  $\vec{F}$  равна  $P_F = F_{\perp} \cdot \omega L$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения стержня. Мощность силы  $\vec{R}$  равна  $P_R = -F_{\text{тр}} \cdot \omega r$ . Знаки написаны в предположении вращения стержня против часовой стрелки.

$$F_{\perp} \cdot \omega L - F_{\text{тр}} \cdot \omega r = 0 \Rightarrow \frac{F_{\perp}}{F_{\text{тр}}} = \frac{r}{L} \ll 1.$$

Следовательно, силу  $\vec{F}$  можно считать направленной вдоль стержня. Теперь рассмотрим только стержень. На него действует сила  $\vec{F}$  со стороны шайбы 1 и сила  $\vec{F}'$  со стороны шайбы 2. Так как стержень невесомый, то  $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$ , откуда  $\vec{F}' = -\vec{F}$ , следовательно направлена вдоль стержня.

### 2. Первое решение:

Поскольку силы, действующие со стороны стержня на шайбы, можно считать направленными вдоль стержня, то в процессе соударения скорость шайбы 1 всегда направлена вдоль стержня. Данное утверждение не зависит от вида взаимодействия шайбы 2 со стенкой и применимо всегда.

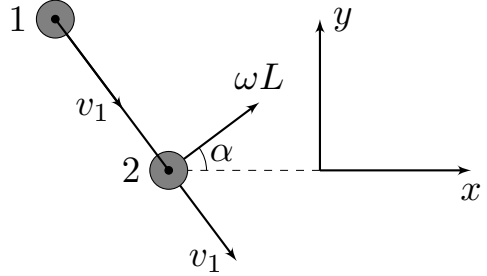
Также данное утверждение можно доказать, используя закон сохранения момента импульса относительно точки контакта шайбы 2 со стенкой. Момент импульса шайбы 2 относительно выбранной точки можно считать равным нулю, поскольку размеры шайб малы. Тогда, поскольку до соударения момент импульса



системы относительно выбранной точки равен нулю:

$$L_{\text{имп}} = 0 = mLv_{1\perp} \Rightarrow v_{1\perp} = 0.$$

Пусть  $v_1$  и  $\omega$  – скорость шайбы 1 и угловая скорость вращения стержня сразу после соударения соответственно. Поскольку стержень жёсткий – компонента скорости шайбы 2, направленная вдоль стержня, также равна  $v_1$ , а компонента скорости, перпендикулярная стержню, равна  $\omega L$ .



Пусть  $m$  – масса одной шайбы.

Поскольку трения между шайбой 2 и стенкой нет, то для системы выполняется закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось  $x$ , направленную вдоль стенки:

$$2mv_0 \sin \alpha = mv_1 \sin \alpha + m(v_1 \sin \alpha + \omega L \cos \alpha) \Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{\omega L}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Поскольку удар упругий – для системы выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{2mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m(v_1^2 + \omega^2 L^2)}{2} \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{2}.$$

Приравнявая выражения для  $v_1^2$ , получим:

$$v_1^2 = v_0^2 - \frac{v_0 \omega L}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\omega^2 L^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = v_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{2},$$

откуда:

$$\omega = \frac{4v_0 \operatorname{tg} \alpha}{L(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)} \approx 4,33 \text{ рад/с.}$$

**Второе решение:**

Поскольку размеры шайб малы, а стержень жёстко прикреплен к шайбе 2 – рассматриваемую систему можно считать твёрдым телом с материальными точками на концах стержня.

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно центра стержня (который также является центром масс рассматриваемой системы):

$$I\varepsilon = M \Rightarrow \frac{2mL^2\varepsilon}{4} = \frac{NL \sin \alpha}{2},$$

где  $N$  – сила нормальной реакции стенки.

Пусть  $\Delta p_y$  – импульс силы нормальной реакции стенки. Тогда имеем:

$$\omega = \frac{\Delta p_y \sin \alpha}{mL}.$$

Запишем теорему о движении центра масс системы:

$$2m\vec{a}_C = \vec{N}.$$

Отсюда видно, что проекция скорости центра масс на ось  $x$  при соударении остаётся постоянной и равной:

$$v_{Cx} = v_0 \sin \alpha.$$

Пусть  $v_{Cy}$  – скорость центра масс в проекции на ось  $y$  сразу после удара. Тогда из теоремы о движении центра масс получим:

$$2ma_{Cy} = N \Rightarrow \Delta p_y = 2m(v_{Cy} + v_0 \cos \alpha).$$

Поскольку соударение упругое – кинетическая энергия системы сохраняется. Воспользуемся теоремой Кёнига и получим выражение для кинетической энергии системы:

$$E_k = \frac{Mv_C^2}{2} + E_{k \text{ отн}} \Rightarrow E_k = mv_C^2 + \frac{mL^2\omega^2}{4},$$

откуда:

$$mv_0^2 = mv_{Cy}^2 + mv_{Cx}^2 + \frac{mL^2\omega^2}{4}.$$

Скомбинируем полученные уравнения:

$$mv_0^2 = m \left( \frac{\omega L}{2 \sin \alpha} - v_0 \cos \alpha \right)^2 + v_0^2 \sin^2 \alpha + \frac{m\omega^2 L^2}{4} \Rightarrow \frac{v_0 \omega L}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega^2 L^2}{4} (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha),$$

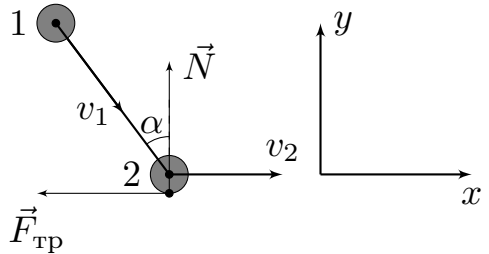
откуда:

$$\omega = \frac{4v_0 \operatorname{tg} \alpha}{L(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)} \approx 4,33 \text{ рад/с.}$$

### 3. Первое решение:

Сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой её скорость направлена вдоль стенки. Обозначим её за  $v_2$ . Приравнявая проекции скоростей шайб на ось, направленную вдоль стержня, получим:

$$v_2 \sin \alpha = v_1.$$



Компонента скорости шайбы 2, направленная перпендикулярно стержню, равна  $v_{\perp} = v_2 \cos \alpha$ , поэтому для угловой скорости вращения стержня имеем:

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{L} = \frac{v_2 \cos \alpha}{L}.$$

Изменения импульса системы в проекции на оси  $x$  и  $y$  составляют:

$$\Delta p_x = mv_2 + mv_1 \sin \alpha - 2mv_0 \sin \alpha \quad \Delta p_y = 2mv_0 \cos \alpha - mv_1 \cos \alpha.$$

Подставляя связь  $v_1$  и  $v_2$ , получим:

$$\Delta p_x = mv_2(1 + \sin^2 \alpha) - 2mv_0 \sin \alpha \quad \Delta p_y = 2mv_0 \cos \alpha - mv_2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Определим скорость  $v_2$ , считая, что шайба 2 всегда проскальзывает по стенке. Критерием правильности рассуждений является неотрицательное значение  $v_2$ .

На систему в плоскости рисунка действуют две внешние силы:  $N = F_y$  и  $F_{\text{тр}} = \mu N = -F_x$ . Поскольку силы связаны прямой пропорциональностью, имеем:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta p_y} = \frac{F_x}{F_y} = -\frac{F_{\text{тр}}}{N} = -\mu = \frac{v_2(1 + \sin^2 \alpha) - 2v_0 \sin \alpha}{2v_0 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha \cos \alpha},$$

откуда:

$$v_2 = \frac{2v_0(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{1 + \sin^2 \alpha - \mu \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2v_0(\text{tg } \alpha - \mu)}{\cos \alpha(1 + 2\text{tg}^2 \alpha - \mu \text{tg } \alpha)}.$$

Величина  $v_2$  является неотрицательной, если  $\mu \leq \text{tg } \alpha$  и  $\mu > 2\text{tg } \alpha + \text{ctg } \alpha$ . Невозможность постоянного проскальзывания при  $\mu > 2\text{tg } \alpha + \text{ctg } \alpha$  ясна и чисто из физических соображений, однако это можно показать и формально: При таких значениях  $\mu$  введённая ранее величина  $\Delta p_y$  оказывается отрицательной, что, разумеется, невозможно.

Таким образом, условие постоянного проскальзывания шайбы 2 следующее:

$$\mu \leq \text{tg } \alpha.$$

Обратим внимание, что  $\mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$ , а  $\mu_2 > \operatorname{tg} \alpha$ . Тогда при коэффициенте трения  $\mu_1 = 0,2$  для угловой скорости стержня сразу после удара получим:

$$\omega_1 = \frac{2v_0(\operatorname{tg} \alpha - \mu_1)}{L(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha)} \approx 1,52 \text{ рад/с.}$$

При  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$  шайбы 2 в некоторый момент соударения прекращает движение вдоль стенки и далее по ней не проскальзывает. Покажем это.

Пусть  $F$  – сила напряжения стержня. Запишем второй закон Ньютона для шайбы 2 в проекции на ось  $y$ :

$$ma_{2y} = N - F \cos \alpha \Rightarrow N = F \cos \alpha + ma_{2y} \geq F \cos \alpha.$$

Проскальзывание может возобновиться, если  $F \sin \alpha > \mu N$ . Но из полученного выражения для  $N$  следует:

$$\mu N = \mu(F \cos \alpha + ma_{2y}) \geq \tan \alpha(F \cos \alpha + ma_{2y}) \geq F \sin \alpha,$$

поэтому проскальзывание шайбы 2 не возобновится, и, следовательно, сразу после соударения её скорость равна нулю. Тогда при  $\mu_2 = 0,6$  в силу полученной связи  $\omega$  и  $v_2$  находим:

$$\omega_2 = 0 \text{ рад/с.}$$

### **Второе решение:**

Сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой её скорость направлена вдоль стенки. Обозначим её за  $v_2$ .

Запишем выражение для скорости  $v_2$  шайбы 2 и условие её движения без отрыва от стенки:

$$v_{2x} = v_2 = v_{Cx} + \frac{\omega L \cos \alpha}{2} \quad v_{2y} = 0 = v_{Cy} + \frac{\omega L \sin \alpha}{2}.$$

Изменения импульса системы в проекции на оси  $x$  и  $y$  составляют:

$$\Delta p_x = 2m(v_{Cx} - v_0 \sin \alpha) \quad \Delta p_y = 2m(v_{Cy} + v_0 \cos \alpha).$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс системы:

$$\frac{mL^2 \varepsilon}{2} = \frac{(N \sin \alpha + F_x \cos \alpha)L}{2},$$

где  $F_x = -F_{\text{тр}}$  – проекция на ось  $x$  силы трения, действующей на шарик 2. Отсюда:

$$\omega = \frac{\Delta p_x \cos \alpha + \Delta p_y \sin \alpha}{mL}.$$

Определим скорость  $v_2$ , считая, что шайбы 2 всегда проскальзывает по стенке. Критерием правильности рассуждений является неотрицательное значение  $v_2$ .

Из уравнения динамики вращательного движения и уравнений кинематической связи имеем:

$$\omega = \frac{2(v_2 - (\omega L \cos \alpha)/2 - v_0 \sin \alpha) \cos \alpha + 2(v_0 \cos \alpha - (\omega L \sin \alpha)/2) \sin \alpha}{L}.$$

После преобразований получим:

$$\omega = \frac{v_2 \cos \alpha}{L}.$$

Если проскальзывание не прекращается, то  $F_x = -F_{\text{ТР}} = -\mu N$ , откуда:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta p_y} = -\mu = \frac{v_{Cx} - v_0 \sin \alpha}{v_{Cy} + v_0 \cos \alpha}.$$

Из полученного соотношения и уравнений кинематической связи имеем:

$$v_0 \sin \alpha + \frac{\omega L \cos \alpha}{2} - v_2 = \mu \left( v_0 \cos \alpha - \frac{\omega L \sin \alpha}{2} \right).$$

Подставляя полученную ранее связь  $\omega$  и  $v_2$ , находим:

$$v_0 \sin \alpha + \frac{v_2 \cos^2 \alpha}{2} - v_2 = \mu v_0 \cos \alpha - \frac{\mu v_2 \sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

откуда:

$$v_2 = \frac{2v_0(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{2 - \cos^2 \alpha - \mu \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2v_0(\text{tg } \alpha - \mu)}{\cos \alpha(1 + 2 \text{tg}^2 \alpha - \mu \text{tg } \alpha)}.$$

Величина  $v_2$  является неотрицательной, если  $\mu \leq \text{tg } \alpha$  и  $\mu > 2 \text{tg } \alpha + \text{ctg } \alpha$ . Невозможность постоянного проскальзывания при  $\mu > 2 \text{tg } \alpha + \text{ctg } \alpha$  ясна и чисто из физических соображений, однако это можно показать и формально: При таких значениях  $\mu$  введённая ранее величина  $\Delta p_y$  оказывается отрицательной, что, разумеется, невозможно.

Таким образом, условие постоянного проскальзывания шайбы 2 следующее:

$$\mu \leq \text{tg } \alpha.$$

Тогда при  $\mu_1 = 0,2$  для угловой скорости стержня сразу после удара получим:

$$\omega_1 = \frac{2v_0(\text{tg } \alpha - \mu_1)}{L(1 + 2 \text{tg}^2 \alpha - \mu_1 \text{tg } \alpha)} \approx 1,52 \text{ рад/с.}$$

При  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$  шайбы 2 в некоторый момент соударения прекращает движение вдоль стенки и далее по ней не проскальзывает. Покажем это.

Если  $v_{2x} = 0$ , то с учетом пренебрежимо малого изменения координат (углов) за время удара, выполняется соотношение:

$$a_{C_x} + \frac{\varepsilon L \cos \alpha}{2} = 0.$$

Определим из этого условия силу трения  $F_x$ , действующую на шарик 2:

$$\frac{F_x}{2m} + \frac{(N \sin \alpha + F_x \cos \alpha) \cos \alpha}{2m} = 0 \Rightarrow |F_x| = \frac{N \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} < \frac{N \sin \alpha}{\cos \alpha} \leq \mu N.$$

Это доказывает, что предположение об отсутствии проскальзывания после обнуления проекции  $v_{2x}$  скорости шайбы 2 верно.

Тогда при  $\mu_2 = 0,6$  в силу полученной связи  $\omega$  и  $v_2$  находим:

$$\omega_2 = 0 \text{ рад/с.}$$

### **Задача №11-Т1. Щель Кассини**

1. Рассмотрим пучок лучей падающих на правое (по рисунку) основание конуса диаметром  $D$ . Часть лучей, идущих в пределах круга диаметром  $d$  с центром на оси конуса, проходит без препятствий и образует на экране круглое пятно того же диаметра.

Остальные лучи, прошедшие через входное сечение конуса, испытывают не менее одного отражения от боковой поверхности конуса. Поскольку оптическая схема имеет осевую симметрию, то эти, испытавшие отражения, лучи будут образовывать кольца, с центром в точке пересечения экрана осью конуса. Выясним количество и геометрию этих колец (радиусы и ширину колец, а также возможность их перекрытия друг с другом).

#### **Первое решение:**

Рассмотрим луч, падающий на самый край входного сечения конуса. До попадания на экран он испытает максимальное количество отражений от боковой поверхности конуса. После каждого отражения от зеркальной поверхности угол между лучом и осью конуса увеличивается на  $2\alpha$ , где  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{D-d}{2h} = \frac{3d}{2h}$ .

Применим для определения числа отражений известный в оптике метод, когда вместо отражения луча от поверхности и изменения его направления, рассматриваем прямую линию луча, отражая вместо него в границе раздела область пространства. При этом вместо ломаной и равнобокой трапеции, соответствующей осевому сечению конуса, получится луч и система трапеций (см. рис.).

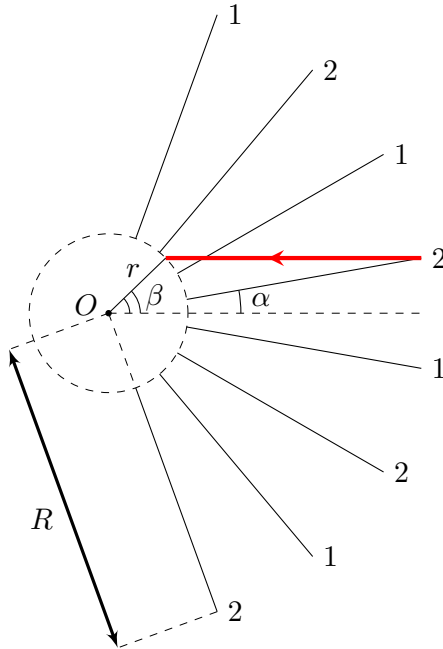
Малые и большие основания трапеций при этом почти соответствуют сторонам многоугольников, вписанных в две концентрические окружности.

Радиус внутренней ( $r$ ) и внешней ( $R$ ) окружностей определяются из соотношений:  $d = 2r \sin \alpha$  и  $D = 2R \sin \alpha$ . Тогда отношение радиусов окружностей равно отношению соответственных диаметров конуса:  $R = 4r$ . Также несложно получить соотношение:  $h = (R - r) \cos \alpha = 3r \cos \alpha$ .

Пусть угол, который образует выбранный луч с радиусом в точке пересечения внутренней окружности равен  $\beta$ , тогда  $\sin \beta = 4 \sin \alpha$ . Искомое число отражений луча равно целой части отношения:

$$x = \frac{\beta + \alpha}{2\alpha}.$$

Если применить условие  $D \ll h$ , получим, что  $\beta \ll 1$ , следовательно,  $\beta \approx 4\alpha$  и  $x \approx 2,5$ . Численное значение величины  $x$  можно использовать для нахождения числа колец и их ширин. Целая часть соответствует числу полных колец ширины  $d$  (вместе с центральным пятном диаметра  $d$ ). Дробная часть соответствует ширине (в единицах  $d$ ) последнего неполного наблюдаемого кольца наибольшего радиуса.



Таким образом, при  $x = 2,5$ , на экране помимо центрального пятна наблюдается еще два кольца. Первое кольцо имеет ширину  $d$  (полное) и радиус средней линии  $R_1 = 2\alpha L = \frac{3dL}{h}$  (см. рис.). Второе кольцо имеет ширину  $d/2$ , что соответствует в рамках приближения дробной части числа  $x$ , и радиус внешней границы  $R_2 = 4\alpha L = \frac{6dL}{h}$ .

**Второе решение:**

Рассмотрим влияние «конического зеркала» на параллельный его оси пучок световых лучей. Учитывая очевидную симметрию картины относительно вращений вокруг оси конуса, рассмотрим одно его осевое сечение и лучи, падающие только на одну из боковых сторон получившейся в сечении трапеции.

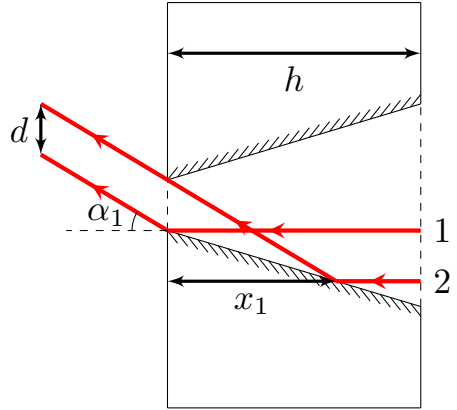
Обозначим угол полураствора конуса  $\alpha$ . Из геометрии находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D - d}{2h} = \frac{3d}{2h}$ . Так как  $D \ll h$ , то  $\alpha$  и все углы того же порядка можно считать малыми. Тогда  $\alpha = \frac{3d}{2h}$ .



Ясно, что лучи, не испытавшие отражения от поверхности конуса, продолжат идти параллельно его оси и образуют на экране круглое пятно диаметром  $d$ .

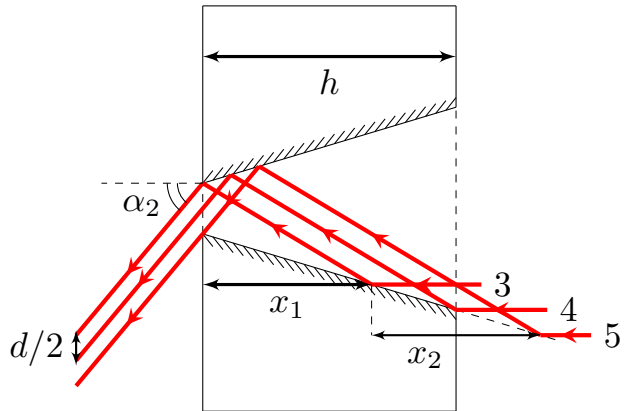
Лучи, испытавшие одно отражение и попавшие после этого в выходное отверстие, будут идти под углом  $\alpha_1 = 2\alpha$  к оси. Зона отражения этих лучей ( $x_1$ ) определяется по точке отражения «крайнего» луча 2 (см. рис.). С учетом малости углов легко найти ширину этой зоны:

$$x_1 \cdot (\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha) = d \Rightarrow x_1 \approx \frac{d}{\alpha} \approx \frac{2h}{3}.$$



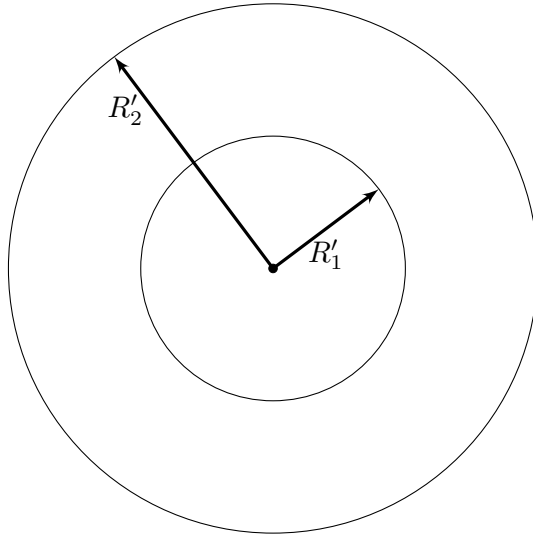
Данная группа лучей образует на экране кольцо ширины  $d$  с центром на оси и радиусом средней линии  $R_1 = \alpha_1 L = \frac{3dL}{h}$ .

Далее, рассуждая аналогично, мы понимаем, что каждое дополнительное отражение увеличивает угол наклона луча к оси еще на  $2\alpha$ . Рассмотрим лучи, отразившиеся от конической поверхности отверстия дважды. Они выйдут из пластины под углом  $\alpha_2 = 4\alpha$  и образуют на экране следующее кольцо. Найдем расстояние  $x_2$  между точками первого отражения пограничных лучей из этой группы.



Так как  $\alpha \ll 1$ , то с хорошей точностью  $x_2 = x_1 = 2h/3$ . Заметим, что  $x_1 + x_2 = 4h/3 > h$ . Это означает, что лучи, испытавшие два отражения, при пересечении не всю площадь выходного отверстия. По крайним лучам этой группы (3 и 4) можно определить толщину второго кольца:  $d_2 = d/2$  и радиус его внешней границы  $R_2 = \alpha_2 = \frac{6dL}{h}$ .





### Задача №11-Г2. Похоже на Сатурн

1. Пусть  $\vec{R}$  – радиус-вектор, проведённый из центра шара в точку на его поверхности. Тогда для электрического поля на поверхности шара получим:

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Далее воспользуемся цилиндрическими координатами  $r, z$ . Начало координат совпадает с центрами кольца и шара, ось  $z$  направлена вдоль оси вращения системы, а  $r$  обозначает расстояние от рассматриваемой точки до оси  $z$ .

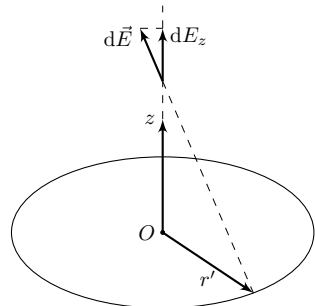
Определим электрическое поле кольца на его оси вращения.

#### Первый способ:

Рассмотрим окружность радиусом  $r'$  с зарядом  $dq$ , распределённым равномерно по её периметру. Тогда на оси вращения окружности в точке с координатой  $z$  электрическое поле равняется:

$$dE_z = \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0(r'^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Поскольку  $z < R \ll r_1, r_2$  – при любых значениях  $z$  справедливо приближе-



ние:

$$dE_z \approx \frac{z \, dq}{4\pi\epsilon_0 r'^3}.$$

Учитывая, что для кольца  $dq = 2\pi r' \, dr' \, \sigma$  – его электрическое поле на оси  $z$  равняется:

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' \, dr'}{r'^3} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

### **Второй способ:**

Электрическое поле кольца на его оси может быть найдено с помощью теоремы о телесном угле. Покажем, что если по плоскому слою равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то в точке  $A$  компонента электрического поля, перпендикулярная слою, равна:

$$E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi\epsilon_0},$$

где  $\Omega_A$  – телесный угол, под которым виден плоский слой из точки  $A$ .

*Доказательство:* рассмотрим элемент плоского слоя с площадью  $dS$ . Пусть  $\vec{e}_n$  – единичный вектор нормали к поверхности слоя, направленный к точке  $A$ , а  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведённый от элемента слоя к точке  $A$ . Тогда для нормальной компоненты электрического поля элемента слоя получим:

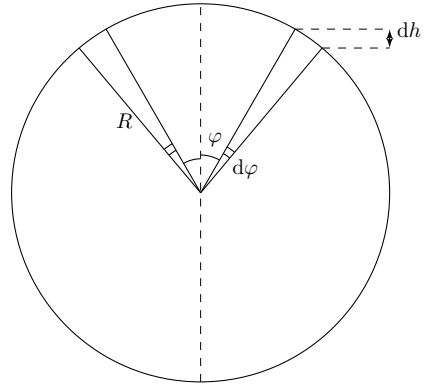
$$d\vec{E}_n = \vec{e}_n \cdot \frac{\sigma \vec{r} \, dS}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}.$$

Если направления векторов  $\vec{r}$  и  $d\vec{S}$  изменить на противоположные, величина  $(\vec{r} \cdot d\vec{S})/r^3$  по определению будет представлять собой элемент телесного угла  $d\Omega_A$ , под которым элемент плоского слоя виден из точки  $A$ . Таким образом:

$$dE_n = \frac{\sigma \, d\Omega_A}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi\epsilon_0},$$

что и требовалось доказать.

Определим телесный угол, код которым виден диск из точки, расположенной на его оси. Он равен телесному углу, под которым виден из центра сферы её сегмент, ограниченный конусом с углом раствора  $2\alpha$ , вершина которого совпадает с центром сферы:



$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{dS}{R^2} = \frac{2\pi R \sin \varphi \cdot R d\varphi}{R^2} = \\ &= \frac{2\pi R \cdot R \sin \varphi d\varphi}{R^2} = \frac{2\pi R dh}{R^2} \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi h}{R}, \end{aligned}$$

где  $h = R(1 - \cos \alpha)$ .

Отсюда:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha).$$

Тогда для телесного угла, под которым виден диск радиусом  $r$  из точки, находящейся на его оси вращения на расстоянии  $z$  от центра, получим:

$$\Omega_{\text{д}} = 2\pi \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right).$$

Телесный угол, под которым видно кольцо на его оси вращения в точке с координатой  $z$ , может быть получен как разность телесных углов дисков радиусами  $r_2$  и  $r_1$ :

$$\Omega_{\text{к}} = 2\pi \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_2^2}} \right) \approx 2\pi z \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Наконец, обратим внимание, что компонента электрического поля кольца, перпендикулярная его плоскости, вблизи оси вращения кольца является практически постоянной. Это связано с тем, что складываемые компоненты электрического поля имеют одинаковое направление, а расстояние до каждого заряженного элемента кольца при малых отклонениях от его оси вращения так же изменяется на малую величину.

Таким образом:

$$E_z(r, z) \approx E_z(0, z) \approx \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Далее определим компоненту электрического поля  $E_r$  кольца, перпендикулярную его оси вращения. Вблизи плоскости кольца величина данной компоненты электрического поля является практически постоянной, поскольку, как и в случае с компонентой  $E_z$ , при малых отклонениях от плоскости кольца направления складываемых компонент векторов не изменяются, а расстояния так же изменяются на малую величину.

Таким образом:

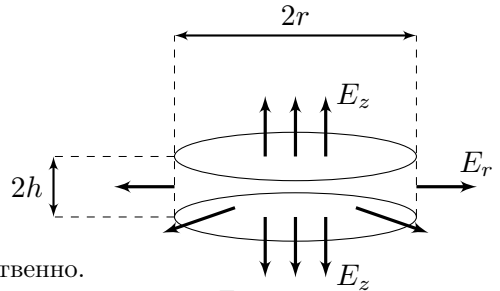
$$E_r(r, z) \approx E_r(r, 0).$$

### Первый способ:

Воспользуемся теоремой Гаусса для цилиндра радиусом  $r$  и высотой  $2h$ , соосного с кольцом:

$$\Phi = \Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0,$$

где  $\Phi_{\text{осн}}$  и  $\Phi_{\text{бок}}$  – потоки электрического поля кольца через основания цилиндра и боковую поверхность соответственно.



Поскольку компонента электрического поля кольца  $E_z$  практически не зависит от  $r$ , а компонента электрического поля кольца  $E_r$  практически не зависит от  $z$ :

$$\Phi_{\text{осн}} = 2 \cdot \pi r^2 E_z \quad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot 2h \cdot E_r \Rightarrow E_r = -\frac{E_z r}{2z}.$$

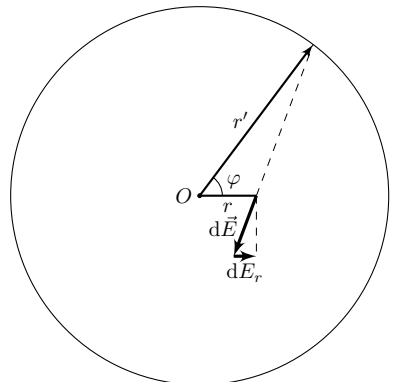
Подставляя полученное ранее выражение для  $E_z$ :

$$E_r = -\frac{\sigma r}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

### Второй способ:

Рассмотрим окружность радиусом  $r'$ , по периметру которой равномерно распределён заряд  $q$ . В точке окружности, расположенной на расстоянии  $r \ll r'$  от его центра, электрическое поле направлено вдоль линии, соединяющей центр кольца с рассматриваемой точкой.

Пусть  $\varphi$  – угол, отсчитываемый между линиями «точка–центр окружности» и



«элемент заряда–центр окружности». Тогда для элементарной компоненты электрического поля  $dE_r$  получим:

$$dE_r = -\frac{dq(r' \cos \varphi - r)}{4\pi\epsilon_0(r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Учтём, что  $dq = q \cdot d\varphi/(2\pi)$  и введём параметр  $a = r/r'$ :

$$dE_r = -\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 r'^2} \frac{(\cos \varphi - a) d\varphi}{(1 + a^2 - 2a \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Упростим полученное выражение с учётом  $a \ll 1$ :

$$\frac{\cos \varphi - a}{(1 + a^2 - 2a \cos \varphi)^{3/2}} \approx (\cos \varphi - a)(1 + 3a \cos \varphi) \approx \cos \varphi - a + 3a \cos^2 \varphi.$$

Здесь мы пренебрегали всеми порядками малости, выше первого.

Получим:

$$E_r = -\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 r'^2} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - a + 3a \cos^2 \varphi) d\varphi = -\frac{qa}{8\pi^2\epsilon_0 r'^2} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi.$$

Здесь мы учли, что интеграл от тригонометрической функции за период равен нулю.

Продолжая интегрирование:

$$\int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{3 \cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = \pi.$$

Тогда для  $E_r$  имеем:

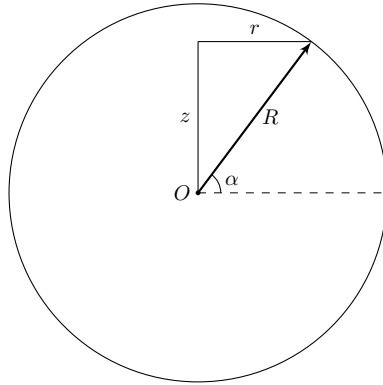
$$E_r = -\frac{qr}{8\pi\epsilon_0 r'^3}.$$

При переходе к исходному кольцу  $E_r \rightarrow dE_r$ , а  $q \rightarrow dq = 2\pi r' dr' \sigma$ . Тогда для компоненты электрического поля кольца  $E_r$  получим:

$$E_r = -\frac{\sigma r}{4\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' dr'}{r'^3} = -\frac{\sigma r}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Введём угол  $\alpha$  между плоскостью кольца и радиус–вектором  $\vec{R}$ . Тогда для  $r$  и  $z$  получим:

$$r = R \cos \alpha \quad z = R \sin \alpha.$$



Для компонент электрического поля на поверхности шара получим:

$$E_z = \frac{R \sin \alpha}{\varepsilon_0} \left( \frac{Q}{4\pi R^3} + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right) \quad E_r = \frac{R \cos \alpha}{\varepsilon_0} \left( \frac{Q}{4\pi R^3} - \frac{\sigma}{4} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right).$$

Величина электрического поля определяется выражением  $E = \sqrt{E_z^2 + E_r^2}$  и достигает экстремальных значений при  $\alpha = 0, \pi/2$ . Поскольку заряды кольца и шара положительные, для них имеем:

$$E_1 = E(0) = \left| \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right| \quad E_2 = E(\pi/2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Поскольку  $E_1 < E_2$ , окончательно находим:

$$\left| \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right| \leq E \leq \frac{Q}{4\pi R^2} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

2. Для того, чтобы электрическое поле можно было считать направленным вдоль оси  $z$  вращения системы, компонента  $E_r$  электрического поля должна обращаться в ноль, чему соответствует единственное значение  $\sigma$ , равное:

$$\sigma = \frac{Q r_1 r_2}{R^3 (r_2 - r_1)}.$$

Отметим, что при данном значении  $\sigma$  компонента  $E_z$  не обращается в ноль в точках, удалённых от плоскости кольца на значительное расстояние. Вблизи плоскости кольца компонента электрического поля  $E_z$  в точности стремится к нулю, а полученное нами приближение для компоненты  $E_r$  электрического поля



становится неприменимым (для полученной  $\sigma$ ), поскольку не учитывает более высоких членов разложения, и, соответственно, в точках, находящихся вблизи плоскости кольца, электрическое поле на довольно коротком участке становится направленным вдоль плоскости кольца.

$$\sigma = \frac{Qr_1r_2}{R^3(r_2 - r_1)}.$$

### **Задача №11-Т3. Кружатся диски**

Пусть диск вращается с угловой скоростью  $\omega$  в направлении против часовой стрелки. У носителей зарядов, находящихся на расстоянии  $r$  от оси диска, появляется коллективная скорость  $\omega r$ , перпендикулярная оси диска, и, соответственно, появляется одинаковая (не зануляющаяся при суммировании по всем носителям) составляющая сила Лоренца, которая вызовет перераспределение носителей по радиусу до стационарного состояния, в котором разность потенциалов в точках, находящихся на расстояниях  $r$  и  $r + dr$  от оси диска равна  $d\varphi = \omega B r dr$ .

Таким образом, присутствие магнитного поля вызовет появление во вращающемся диске ЭДС индукции, равной:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \omega B \int_0^R r dr = \frac{\omega B R^2}{2}, \quad (1)$$

по знаку противоположной ЭДС источника.

Запишем второй закон Кирхгофа для контура электрической цепи:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = \mathcal{E} - \frac{\omega B R^2}{2} = L\dot{q} + \frac{q}{C}, \quad (2)$$

где  $q$  – заряд конденсатора.

Далее запишем закон изменения энергии в электрической цепи, учитывая, что магнитное поле не совершает работы:

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E} \cdot \Delta q = \Delta W_C + \Delta W_L + \Delta E_k,$$

где  $W_C$  и  $W_L$  – энергия конденсатора и катушки индуктивности соответственно, а  $E_k$  – кинетическая энергия вращения обода. Приведём выражения для них:

$$W_C = \frac{q^2}{2C} \quad W_L = \frac{L\dot{q}^2}{2} \quad E_k = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Дифференцируя по времени закон сохранения энергии, получим:

$$\mathcal{E}\dot{q} = \frac{q\dot{q}}{C} + L\dot{q}\ddot{q} + mR^2\omega\dot{\omega}. \quad (3)$$

Умножая уравнение (2) на  $\dot{q}$  и вычитая из него уравнение (3), получим следующее соотношение между  $\dot{\omega}$  и  $\dot{q}$ :

$$\frac{BR^2\dot{q}}{2} = mR^2\dot{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{2m}. \quad (4)$$

В последнем переходе мы воспользовались начальными условиями:

$$\omega(0) = 0 \quad q(0) = 0.$$

*Примечание:* Связь  $\omega$  и  $q$  может быть получена из уравнения динамики вращательного движения диска относительно точки  $O$ . Действительно:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = mR^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_O$$

Определим момент силы Ампера, действующей на возникающий в диске электрический ток:

$$d\vec{M}_O = dI [\vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}]] = -dI \cdot r dr \vec{B}$$

где  $r$  – расстояние до точки  $O$ .

Поскольку через круг любого радиуса с центром в точке  $O$  протекает ток силой  $I$  – для момента  $\vec{M}_O$  получим:

$$\vec{M}_O = I\vec{B} \int_R^0 r dr = \frac{IR^2\vec{B}}{2} = \frac{R^2\vec{B}}{2} \cdot \frac{dq}{dt}$$

Таким образом:

$$mR^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{R^2\vec{B}}{2} \cdot \frac{dq}{dt} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{q\vec{B}}{2m}$$

Таким образом, возможны три комбинации двух физических законов, приводящие к решению задачи:

1. Закон электромагнитной индукции и закон сохранения энергии;
2. Уравнение динамики вращательного движения и закон электромагнитной индукции;
3. Уравнение динамики вращательного движения и закон сохранения энергии.

Для определения максимальной угловой скорости заметим, что она достигается в момент, когда сила тока в цепи оказывается равной нулю. Тогда из закона изменения энергии имеем:

$$\mathcal{E}q = \frac{q^2}{2C} + \frac{mR^2\omega_{\max}^2}{2} \Rightarrow \frac{2m\omega_{\max}\mathcal{E}}{B} = \frac{\omega_{\max}^2}{2} \left( \frac{4m^2}{B^2C} + mR^2 \right),$$

откуда:

$$\omega_{\max} = \frac{4BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C}.$$

Комбинируя уравнения (2) и (4), получим:

$$\varepsilon = \ddot{\omega} \cdot \frac{2mL}{B} + \omega \cdot \left( \frac{BR^2}{2} + \frac{2m}{BC} \right). \quad (5)$$

Вводя переменную  $\omega' = \omega - 2BC\varepsilon/(4m + B^2R^2C)$ , получим уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\omega}' = -\omega' \left( \frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL} \right) = -\Omega_0^2 \omega' \quad \left[ \Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}} \right] \Rightarrow \omega'(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi_0).$$

Определим  $A$  и  $\varphi_0$  из начальных условий:

$$\begin{cases} \omega(0) = \frac{2BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C} + A \cos \varphi_0 = 0 \\ \dot{\omega}(0) = -\Omega_0 A \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_0 = \pi; A = \frac{2BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C}.$$

Окончательно для  $\omega(t)$  имеем:

$$\omega(t) = \frac{2BC\varepsilon}{4m + B^2R^2C} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}} t \right) \right). \quad (6)$$

Угловая скорость впервые достигается значения  $\omega_{\max}$ , когда  $\cos \Omega_0 \tau = -1$ , т.е. при  $\omega_0 \tau = \pi$ . Тогда для  $\tau$  находим:

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}}.$$

#### **Задача №11-Т4. Адиабатическая анизотропия**

1. Запишем первое начало термодинамики для вещества под поршнем:

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + p dV = dU + d(pV) - V dp.$$

Далее используем выражение для внутренней энергии идеального газа и уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$U = \nu C_V T \quad pV = \nu RT.$$

Поскольку вещество в сосуде целиком остаётся в газообразной фазе:

$$d(pV) = \nu R dT.$$

Тогда получим:

$$\delta Q = \nu C_V dT + \nu R dT - V dp = \nu C_p dT - V dp,$$

где  $C_p = C_V + R = 4R$  – молярная теплоёмкость идеального многоатомного газа при постоянном давлении.

Для теплоёмкости идеального газа, выраженной через параметры  $(p, T)$ , имеем:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \nu C_p - V \cdot \frac{dp}{dT} = \nu C_p - \frac{\nu RT}{p} \cdot \frac{dp}{dT} = \nu \left( C_p - R \cdot \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_T} \right).$$

Тогда молярная теплоёмкость насыщенного пара равна:

$$C_{\text{нас}} = C_p - \alpha R = R(4 - \alpha) = -93,9 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

2. При изменении объёма сосуда возможны два принципиально различных физических процесса:

1. Если относительное изменение давления водяного пара под поршнем меньше относительного изменения насыщенного пара при том же относительном изменении температуры, т.е. если  $\varepsilon_p < \varepsilon_{p(\text{н.п})} = \alpha \varepsilon_T$  – вещество в сосуде целиком остаётся в газообразном состоянии, а пар перестаёт быть насыщенным.
2. Если описанное условие соотношения относительных изменений давлений при одинаковом относительном изменении температуры не выполняется – пар в сосуде будет оставаться насыщенным и при этом частично конденсироваться.

Получим относительное изменение давления пара под поршнем, считая, что он целиком остаётся в газообразном состоянии.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона получим:

$$pV = \nu RT \Rightarrow p dV + V dp = \nu R dT = \frac{pV dT}{T} \Rightarrow \varepsilon_p + \varepsilon_V = \varepsilon_T.$$

Запишем первое начало термодинамики:

$$dU = -\delta A \Rightarrow \nu C_V dT = -p dV = -\frac{\nu RT dV}{V} \Rightarrow \varepsilon_T = -\frac{R\varepsilon_V}{C_V}.$$

Обратим внимание, что  $\varepsilon_T > 0$ , поскольку  $\varepsilon_V < 0$ .

Далее находим:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_T - \varepsilon_V = \varepsilon_T \left( 1 + \frac{C_V}{R} \right) = \frac{C_p \varepsilon_T}{R} = 4\varepsilon_T < \alpha\varepsilon_T.$$

Таким образом, всё вещество под поршнем остаётся газообразным.

Тогда полученное нами выражение для  $\varepsilon_T$  является применимым и температура увеличивается на величину, равную:

$$\Delta T = T_0 \cdot \frac{\beta}{C_V/R} = \frac{\beta T_0}{3} \approx 5,6 \text{ К.}$$

3. Из решения второго пункта следует, что при увеличении объёма без конденсации температура в сосуде должна уменьшиться. Тогда пар в сосуде будет оставаться насыщенным и при этом частично конденсироваться, поскольку иначе давление пара в сосуде станет выше давления насыщенного пара при той же температуре, что невозможно.

Продифференцируем уравнение Менделеева–Клапейрона с учётом изменения газообразного количества вещества в сосуде:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \varepsilon_p + \varepsilon_V = \varepsilon_\nu + \varepsilon_T \Rightarrow \varepsilon_T(\alpha - 1) + \varepsilon_V = \varepsilon_\nu,$$

поскольку в рассматриваемом процессе  $\varepsilon_p = \alpha\varepsilon_T$ .

Из первого начала термодинамики:

$$\delta Q_{\text{нас}} + L \, dm = 0,$$

где  $Q_{\text{нас}}$  – количество теплоты, полученное неконденсирующимся насыщенным паром, а  $dm = \mu \, d\nu$  – изменение массы водяного пара.

Поскольку состояние не конденсирующегося водяного пара в координатах  $(p, T)$  описывается кривой фазового равновесия – его теплоёмкость равна теплоёмкости  $C_{\text{нас}}$ , полученной при решении первого пункта, поэтому для количества теплоты  $\delta Q_{\text{нас}}$  имеем:

$$\delta Q_{\text{нас}} = C_{\text{нас}} \, dT.$$

*Примечание:* Отметим, что формула

$$\delta Q_{\text{нас}} = C_V \, dT + p \, dV,$$

где  $dV$  – изменение объёма сосуда, не является правильной, поскольку вследствие фазового перехода величина  $dV$  не равна изменению объёма, занимаемого не конденсирующимся водяным паром.

Возвращаясь к первому началу термодинамики для системы, получим:

$$\nu C_{\text{нас}} dT + \lambda \mu d\nu = 0 \Rightarrow \varepsilon_\nu = -\frac{C_{\text{нас}} T \varepsilon_T}{\mu \lambda}.$$

Отсюда:

$$\varepsilon_T(\alpha - 1) + \varepsilon_\nu = -\frac{C_{\text{нас}} T \varepsilon_T}{\mu \lambda}.$$

Окончательно находим:

$$\Delta T = -T_0 \cdot \frac{\beta}{\alpha - 1 + \frac{(C_p - \alpha R)T_0}{\mu \lambda}} = -T_0 \cdot \frac{\beta}{\alpha - 1 + \frac{(4 - \alpha)R}{\mu \lambda}} \approx -1,2 \text{ К}.$$

### Задача №11-Г5. Туда-сюда

1. Пусть  $m$  – масса шайбы. В плоскости доски на шайбу действуют компонента силы тяжести  $mg \sin \alpha$ , а также сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ , причём поскольку  $\mu = \tan \alpha$ :

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha.$$

Изобразим на рисунке компоненты силы тяжести и силу трения, соответствующие углу  $\varphi$  между направлением скорости шайбы и осью  $y$ . Из него следует, что равнодействующая  $R$  компоненты силы тяжести и силы трения равна:

$$R = 2mg \sin \alpha \cos(\varphi/2).$$

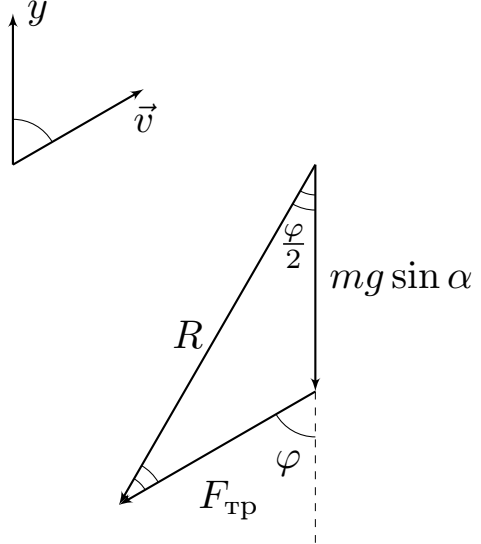
Тогда для ускорений  $a_0$  и  $a_1$  имеем:

$$a_0 = 2g \sin \alpha \cos(\varphi_0/2) \approx 8.49 \text{ м/с}^2, \quad a_1 = 2g \sin \alpha \cos(\varphi_1/2) \approx 1.76 \text{ м/с}^2.$$

### 2. Первое решение:

Равнодействующая компоненты силы тяжести и силы трения направлена вдоль биссектрисы угла  $\varphi$  между направлением скорости и осью  $y$  – тангенциальное ускорение шайбы и проекция её ускорения на ось  $y$  равны друг другу,  $a_\tau = a_y$ , поэтому:

$$v - v_y = v(1 - \cos \varphi) = \text{const} = v_0(1 - \cos \varphi_0).$$



**Второе решение:**

Запишем выражение для тангенциальной и нормальной компонент ускорения:

$$a_\tau = \dot{v} = -g \sin \alpha (1 + \cos \varphi), \quad a_n = v\dot{\varphi} = g \sin \alpha \sin \varphi.$$

Отсюда:

$$\frac{\dot{v}}{v\dot{\varphi}} = -\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{1}{\tan(\varphi/2)}.$$

Разделим переменные и получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\varphi}{\tan(\varphi/2)}.$$

Проинтегрируем полученное выражение ( $\theta = \varphi/2$ ):

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\tan(\varphi/2)} = -2 \int_{\varphi_0/2}^{\varphi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = -2 \ln \left( \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} \right).$$

Избавляясь от логарифма, получим:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\sin^2(\varphi_0/2)}{\sin^2(\varphi/2)}, \quad v(\varphi) = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{1 - \cos \varphi}.$$

Поскольку в верхней точке траектории  $\varphi = 90^\circ$ , для скоростей  $u$  и  $v_1$  имеем:

$$u = v_0(1 - \cos \varphi_0) \approx 4,00 \text{ м/с}, \quad v_1 = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{1 - \cos \varphi_1} \approx 2,07 \text{ м/с}.$$

**3. Первое решение:**

Обратим внимание, что из найденного во втором пункте инварианта следует:

$$v - v_y = v_0(1 - \cos \varphi_0).$$

Интегрируя по времени, получим

$$S - \Delta y = v_0(1 - \cos \varphi_0)t,$$

где  $\Delta y$  и  $S$  – изменение координаты  $y$  мела и пройденный им путь соответственно. К моменту достижения шайбой основания доски  $\Delta y = 0$ , поэтому:

$$S = v_0(1 - \cos \varphi_0)t.$$

Для определения пути  $S$  воспользуемся законом изменения кинетической энергии:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}} = -mg \sin \alpha \Delta y - mg \sin \alpha S.$$

Поскольку при достижении основания доски  $\Delta y = 0$ :

$$v_0^2 - v_1^2 = 2g \sin \alpha S = 2g \sin \alpha v_0(1 - \cos \varphi_0)t,$$

откуда:

$$t = \frac{v_0}{2g \sin \alpha(1 - \cos \varphi_0)} \left( 1 - \left( \frac{1 - \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_1} \right)^2 \right) \approx 1,52 \text{ с}$$

### **Второе решение:**

С учётом полученной зависимости  $v(\varphi)$ , время  $t$  можно определить, например, из уравнения для нормальной компоненты ускорения шайбы:

$$v\dot{\varphi} = g \sin \alpha \sin \varphi \Rightarrow dt = \frac{v d\varphi}{g \sin \alpha \sin \varphi} = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi) \sin \varphi}.$$

Перейдём к переменной половинного угла:

$$dt = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{d\varphi}{4 \sin^3(\varphi/2) \cos(\varphi/2)}.$$

Воспользуемся стандартной тригонометрической подстановкой  $z = \tan(\varphi/2)$ . Тогда получим:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos(\varphi/2) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Свяжем  $d\varphi$  и  $dz$ :

$$dz = d \tan(\varphi/2) = \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)} \cdot \frac{d\varphi}{2} = (1 + \tan^2(\varphi/2)) \cdot \frac{d\varphi}{2}, \quad d\varphi = \frac{2 dz}{1 + z^2}.$$

Отсюда имеем:

$$dt = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{(1 + z^2)^2}{4z^3} \cdot \frac{2 dz}{1 + z^2}.$$



Вводя переменные  $z_0 = \tan(\varphi_0/2)$  и  $z_1 = \tan(\varphi_1/2)$ , для времени  $t$  получим:

$$t = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{2g \sin \alpha} \int_{z_0}^{z_1} \frac{1 + z^2}{z^3} dz = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{2g \sin \alpha} \left( \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z^3} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z} \right).$$

Интегрируя, находим:

$$t = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{2g \sin \alpha} \left( \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2z_1^2} + \ln \left( \frac{z_1}{z_0} \right) \right).$$

Возвращаясь к исходным переменным, для времени  $t$  находим:

$$t = \frac{v_0(1 - \cos \varphi_0)}{2g \sin \alpha} \left( \frac{1}{1 - \cos \varphi_0} - \frac{1}{1 - \cos \varphi_1} + \ln \left( \frac{\tan(\varphi_1/2)}{\tan(\varphi_0/2)} \right) \right) \approx 1,52 \text{ с.}$$

*Примечание 1:* Вообще говоря, задача является переопределённой, поскольку значение  $\varphi_1$  однозначно определяется значением  $\varphi_0$ , однако в такой формулировке задача становится слишком сложной. Участникам олимпиады было достаточно получить лишь одно уравнение, связывающее  $\varphi_1$  и  $t$ . Без заданного значения  $\varphi_1$  решение третьего пункта задачи требует комбинации первого и второго изложенных решений. Численное значение  $\varphi_1 = 159.3^\circ$  можно найти, приравняв два выражения для  $t$  и численно решив полученное уравнение:

$$\frac{1}{(1 - \cos \varphi_0)^2} - \frac{1}{(1 - \cos \varphi_1)^2} = \frac{1}{1 - \cos \varphi_0} - \frac{1}{1 - \cos \varphi_1} + \ln \left( \frac{\tan(\varphi_1/2)}{\tan(\varphi_0/2)} \right).$$

*Примечание 2:* Из комбинации двух решений также получаются явные зависимости перемещения  $\Delta y$  и пути  $S$  от угла  $\varphi$ :

$$\Delta y(\varphi) = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{4g \sin^2 \alpha} \left( \frac{\cos \varphi_0}{(1 - \cos \varphi_0)^2} - \frac{\cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} - \ln \left( \frac{\tan(\varphi/2)}{\tan(\varphi_0/2)} \right) \right),$$

$$S(\varphi) = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{4g \sin^2 \alpha} \left( \frac{2 - \cos \varphi_0}{(1 - \cos \varphi_0)^2} - \frac{2 - \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} + \ln \left( \frac{\tan(\varphi/2)}{\tan(\varphi_0/2)} \right) \right).$$

Помимо этого, мы можем определить зависимость перемещения вдоль оси  $x$ , направленной вдоль основания наклонной плоскости, от угла  $\varphi$ :

$$dx = v \sin \varphi dt = v \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{v^2 d\varphi}{g \sin \alpha} = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{g \sin \alpha} \cdot \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi)^2}.$$

Вновь переходя к переменной  $z = \tan(\varphi/2)$ , получим:

$$\Delta x(z) = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{2g \sin \alpha} \int_{z_0}^z \frac{(1 + z^2)^2}{z^4} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{2g \sin \alpha} \left( \int_{z_0}^z \frac{dz}{z^4} + \int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2} \right).$$

Интегрируя, находим:

$$\Delta x(z) = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{2g \sin \alpha} \left( \frac{1}{3z_0^3} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z} \right).$$

Возвращаясь к переменной  $\varphi$ :

$$\Delta x(\varphi) = \frac{v_0^2(1 - \cos \varphi_0)^2}{2g \sin \alpha} \left( \frac{1}{3 \tan^3(\varphi_0/2)} - \frac{1}{3 \tan^3(\varphi/2)} + \frac{1}{\tan(\varphi_0/2)} - \frac{1}{\tan(\varphi/2)} \right).$$

Таким образом, траектория шайбы может быть получена аналитически в параметрической форме, поскольку  $\Delta y(\varphi)$  и  $\Delta x(\varphi)$  является известными аналитическими функциями.

Траектория для заданных значений  $v_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\alpha$  и  $g$  представлена на рисунке ниже.

