Теоретический тур, 9 класс

1. Маленький плот

От прямого берега реки оттолкнули небольшой круглый плот, сообщив ему в направлении, перпендикулярном берегу, скорость v, равную по модулю скорости течения реки. Через время $t = 10$ с плот удалился от точки старта на расстояние $l = 23$ м, а от берега – на $d = 20$ м. Определите скорость течения реки.

2. WOT

Небольшой игрушечный танк поместили на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (рис. 1). За какое минимальное время τ танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиуса R? Чему будет равен максимальный угол γ между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения? Коэффициент трения между гусеницами и плоскостью равен μ. Ускорение свободного падения g.

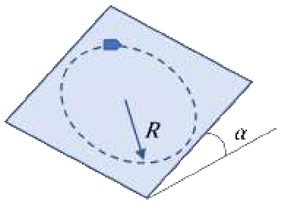


Рис. 1

3. С отливом

В пустой стакан с отводной трубкой и вертикальными стенками начали наливать с небольшим массовым расходом горячую воду при температуре $t_1 = 90\ ^\circ\mathrm{C}$. За время τ уровень воды в стакане поднялся на высоту h (рис. 2). Через время 3τ после начала заполнения стакана в бак, расположенный под отводной трубкой, из другого крана стала поступать с массовым расходом 2μ холодная вода при температуре $t_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$.

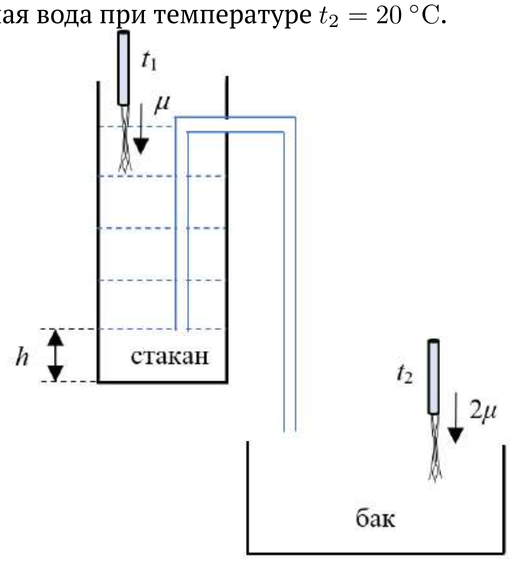


Рис. 2

$\boxed{1}$ Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от 3τ до 10τ от начала заполнения стакана.

$\boxed{2}$ Найдите какая температура установится в баке через большое время?

$\boxed{3}$ Какого максимального значения достигала температура в баке?

Перетекание по отводной трубке и теплообмен в системе происходят очень быстро. Тепловыми потерями и теплоемкостями сосудов и трубки можно пренебречь. Объем отводной трубки мал. Вода из бака не выливается.

4. Ареометры

В лаборатории экспериментатора Глюка было два одинаковых ареометра. Когда один из них Глюк погрузил в сосуд с исследуемой жидкостью, прибор сначала показал значение $1.027\ \mathrm{г/см^3}$. Затем его показания стали изменяться, но через продолжительное время он вновь стал показывать $1.027\ \mathrm{г/см^3}$. Убедившись, что изменений показаний больше нет, Глюк погрузил в сосуд второй прибор (не вынимая первого) и снова стал ждать. Теперь показания приборов установились на значении $1.022\ \mathrm{г/см^3}$. Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка? Зависимость плотности жидкости от её температуры изображена на рисунке 3. Теплоёмкости жидкости и приборов можно считать постоянными. Теплообмена с внешней средой нет.

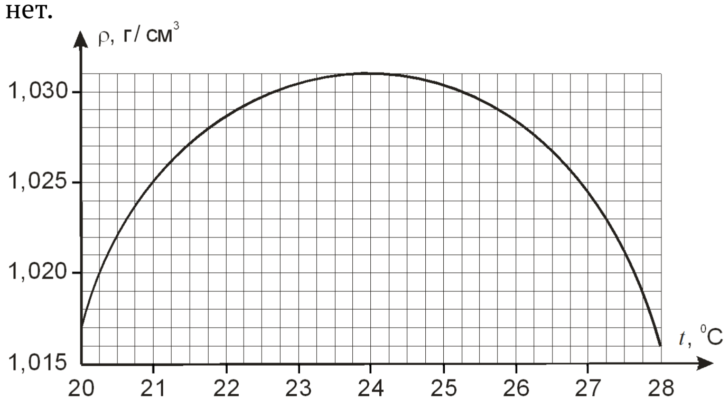


Рис. 3

5. Авометрия

По известным показаниям вольтметра V_1 и амперметра A_1 ($U_1 = 1$ В, $I_1 = 6$ мкА) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 4. Все вольтметры одинаковые и их сопротивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

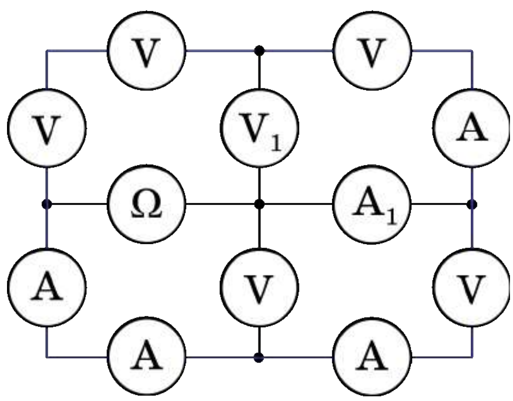


Рис. 4

Решение

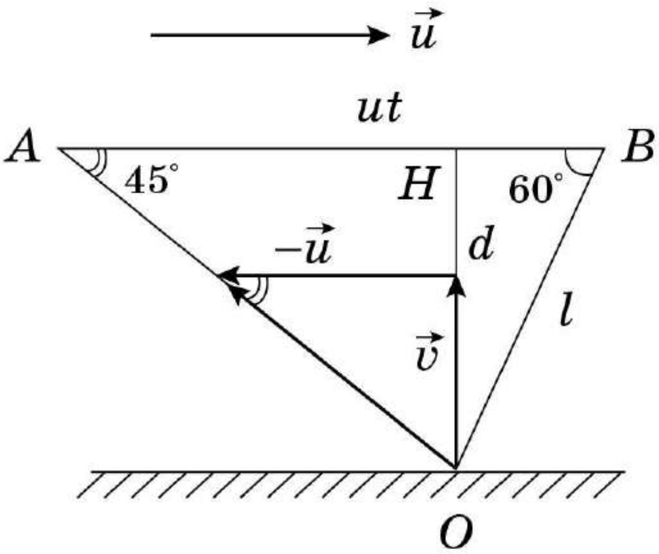
T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 [12.00] Определите скорость течения реки.

В системе отсчета, связанной с водой, плот движется под углом 45° к берегу (что следует из закона сложения скоростей) и за время t перемещается на расстояние OA. За это же время река сносит его на расстояние $AB = ut$. Заметим, что расстояние $AH = OH = d$.



С учетом теоремы Пифагора $(HB)^2 = l^2 – d^2$ и соотношения $ut = AH + HB$, получим:

$$u = \frac{\sqrt{l^2 - d^2} + d}{t}$$

Ответ: $u \approx 3,14$м/с.

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 [12.00] Определите скорость течения реки.

Идея перехода в систему отсчета (СО) реки, если это привело к логически верным преобразованиям, направленным на решение задачи. т.е. баллы ставятся, если далее получены баллы за пункты 1.2 или 1.3	2.00
Найдено направление начальной скорости плота в СО реки	1.00
Учтено, что направление скорости плота в СО реки не изменяется	1.00
M1 Решение в частном случае Например: сила трения постоянна, $F = kv, F = kv^2 \dots$ (если выполнен этот пункт, то баллы за пункты 1.6, 1.7, 1.8 не ставятся)	0.00
M2 Связь перемещений плота в СО берега и в СО реки	3.00
M2 Теорема Пифагора или тригонометрическое соотношение, устанавливающие связь между сторонами и высотой треугольника OAB	2.00
M2 Получено выражение для скорости течения	2.00
Найдено численное значение скорости и указаны единицы измерений	1.00

Решение

T Условие

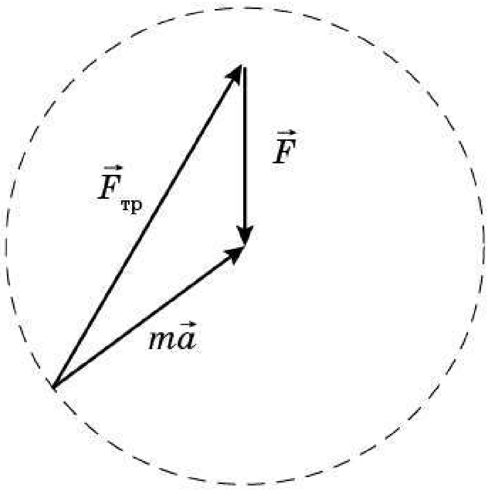
S Решение

M Разбалловка

1 [7.00] За какое минимальное время τ танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиуса R?

Ускорение танка, движущегося с постоянной скоростью v, равно $a = \dfrac{v^2}{R}$ и в любой точке траектории направлено вдоль наклонной плоскости к центру окружности.

В плоскости, в которой происходит движение, лежат: вектор силы трения покоя (гусеницы не проскальзывают) $F_{\text{тр}}$, вектор ma и $F = mg\sin\alpha$ – составляющая вектора силы тяжести вдоль плоскости. В перпендикулярном к плоскости направлении на танк действует сила нормальной реакции $N = mg\cos\alpha$.



Сила трения покоя может принимать любое значение из интервала

$$0 < F_{\text{тр}} < \mu mg\cos\alpha.$$

Чтобы время движения танка было минимальным, он должен двигаться с максимально возможной скоростью. Но при больших скоростях силы трения может не хватать для движения с нужным ускорением.

Выразим силу трения из второго закона Ньютона:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} - \vec{F}.$$

Из полученной формулы следует, что модуль разности векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ максимален, когда эти векторы направлены противоположно, т.е. в нижней точке траектории. Следовательно, танк сможет пройти всю траекторию с постоянной скоростью v, если выполнится условие:

$$m\frac{v^2}{R} \leqslant \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha,$$

которое и определяет максимальную скорость:

$$v_{max} = \sqrt{gR(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)},$$

и минимальное время движения танка по окружности:

Ответ:

$$t_{min} = \frac{2\pi R}{v_{max}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

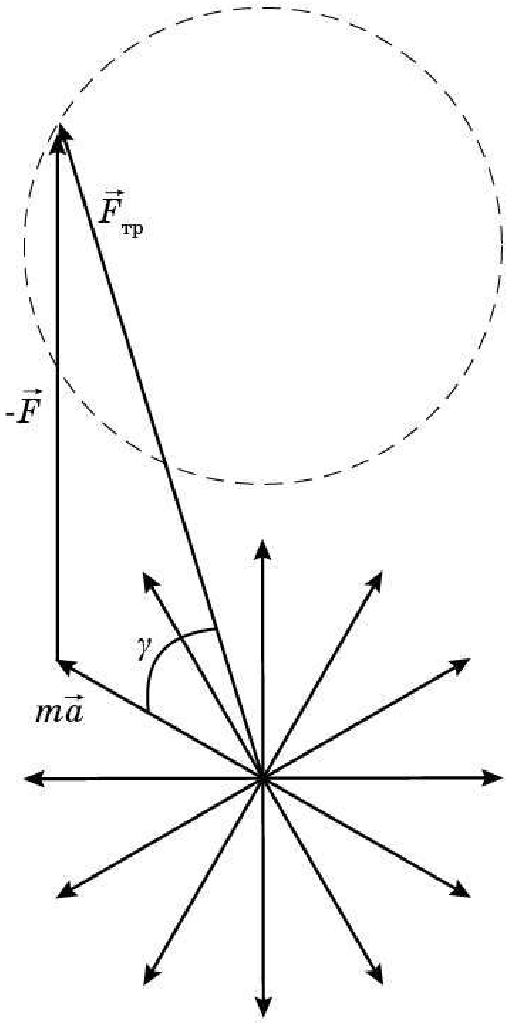
Разумеется, все это справедливо при $\mu > tg\alpha$, в противном случае без проскальзывания танк не смог бы даже стоять на месте.

2 [5.00] Чему будет равен максимальный угол γ между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения?

Найдем максимальный угол между вектором силы трения и ускорения танка. Поскольку вектор $m\vec{a}$ имеет фиксированную величину, но разное направление в разных точках траектории, а вектор $\vec{F}$ – фиксированную величину и направление, то геометрически формула

$$\vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} - \vec{F}$$

означает, что концы векторов сил трения лежат на окружности с радиусом, равным модулю вектора $m\vec{a}$, а их начала находятся в точке, которая сдвинута на величину $\vec{F}$ по отношению к центру этой окружности (см. рисунок; показано вычитание только одной пары векторов).



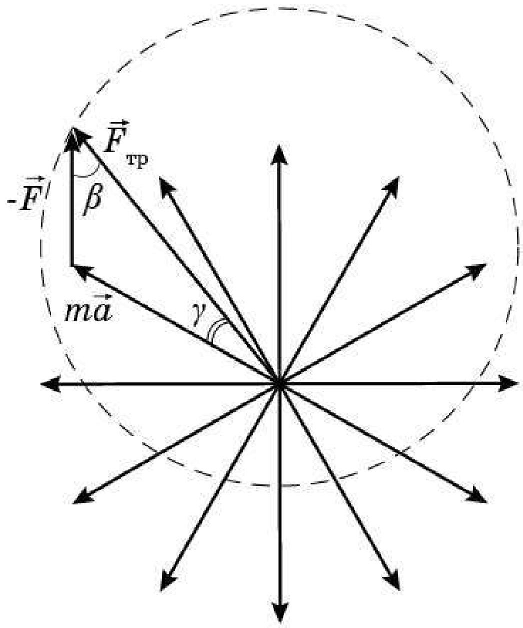
Как следует из рисунка, может реализовываться два варианта.
1) Если модуль силы $\vec{F}$ больше модуля вектора $m\vec{a}$ или

$$mg\sin\alpha > mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Rightarrow \mu < 2tg\alpha(\text{малое трение}),$$

сдвиг окружности, на которой лежат концы вектора силы трения, больше ее радиуса (именно этот случай показан на рисунке), и угол γ между вектором силы трения и вектором $m\vec{a}$ (отмечен дугой на рисунке) изменяется от $\gamma = 0^\circ$ (векторы $m\vec{a}$ и силы $\vec{F}$ сонаправлены) до $\gamma = 180^\circ$ (векторы $m\vec{a}$ и силы $\vec{F}$ направлены противоположно).
Если же модуль силы $\vec{F}$ меньше модуля вектора $m\vec{a}$, или

$$mg\sin\alpha < mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Rightarrow \mu > 2tg\alpha(\text{большое трение}),$$

то и в случае сонаправленных векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$, и в случае противоположно направленных, угол между векторами $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ равен нулю, и, следовательно, существует максимальный угол между этими векторами (вычитание векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ выполнено на рисунке).



Для нахождения этого угла можно применить теорему синусов к треугольнику сил:

$$\frac{F}{\sin\gamma} = \frac{ma}{\sin\beta},$$

где β – угол между вектором силы трения и вектором $-\vec{F}$ (см. рисунок). Поскольку модули векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$ неизменны во всех точках траектории, то угол γ максимален, когда максимален синус угла β, т.е. $\beta = 90^\circ$. В этом случае синус максимального угла между векторами силы трения и ускорения равен:

Ответ:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{tg\alpha}{\mu - tg\alpha}$$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 [7.00] За какое минимальное время τ танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиуса R?

Найдена (или используется) величина силы нормальной реакции	0.50
Найдена составляющая силы тяжести вдоль плоскости	0.50
Записано уравнение (или дана геометрическая интерпретация) второго закона Ньютона	1.00
Записано уравнение для центростремительного ускорения	0.50
Записано неравенство $F_{\text{тр}} \leqslant \mu N$	0.50
Обосновано максимальное значение силы трения покоя при движении с постоянной скоростью v. $(F_{\text{тр}max} = \frac{mv^2}{R} + mg\sin\alpha)$	1.00
Получено выражение для максимальной скорости	1.00
Найдено минимальное время τ	1.00
Учтено ОДЗ для времени	1.00

2 [5.00] Чему будет равен максимальный угол γ между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения?

1 случай	
Найдено значение угла 180°	1.00
Указано при каких μ реализуется данный случай	0.50
2 случай	
Найден угол γ	3 × 1.00
Указано при каких μ реализуется данный случай	0.50

Решение

1 7.50 Найдите какая температура установится в баке через большое время?

1. Стакан с отводной трубкой работает по принципу сифона. Первый раз уровень воды в нем повышается в течение времени 5τ. После заполнения горизонтальной части трубки вода быстро отводится из стакана и ее уровень опускается на $4h$. Далее процесс повторяется с периодичностью 4τ.
Таким образом, за первые 5τ в бак поступает только холодная вода и в первом теплообмене принимает участие $4\tau\mu$ горячей воды и $2\tau 2\mu$ холодной. Из уравнения теплового баланса:

$$4\tau\mu c(t_{x1} - t_1) + 4\tau\mu c(t_{x1} - t_2) = 0,$$

находим температуру в баке после первого теплообмена%

$$t_{x1} = \frac{t_1 + t_2}{2} = 55^{\circ}\mathrm{C}$$

2. В течении следующего интервала времени 4τ в бак поступает только холодная вода и температура содержимого бака понижается до t_{x2}. Из уравнения теплового баланса:

$$4\tau\mu c(t_{x2} - t_1) + 12\tau\mu c(t_{x2} - t_2) = 0,$$

$$t_{x2} = \frac{t_1 + 3t_2}{4} = 37,5^{\circ}\mathrm{C}$$

3. Очередная порция горячей воды массой $4\tau\mu$ повысит температуру бака до t_{x3}:

$$8\tau\mu c(t_{x3} - t_1) + 12\tau\mu c(t_{x3} - t_2) = 0,$$

$$t_{x3} = \frac{2t_1 + 3t_2}{5} = 48^{\circ}\mathrm{C}$$

4. К моменту времени 10τ в бак добавится еще $2\tau\mu$ холодной воды, и к этому моменту температура в баке станет t_{x4}.

$$8\tau\mu c(t_{x4} - t_1) + 14\tau\mu c(t_{x4} - t_2) = 0,$$

$$t_{x4} = \frac{4t_1 + 7t_2}{11} = 45,5^{\circ}\mathrm{C}$$

5. За цикл 4τ в бак добавляется $4\tau\mu$ горячей и $8\tau\mu$ холодной воды. Эта смесь имеет среднюю температуру t_x:

$$4\tau\mu c(t_x - t_1) + 8\tau\mu c(t_x - t_2) = 0,$$

$$t_{x4} = \frac{1t_1 + 72t_2}{3} = 43,3^{\circ}\mathrm{C}$$

Поэтому температура в баке больше чем до $t_{x1} = 55^{\circ}\mathrm{C}$ подниматься уже не будет.

Ответ:

$$t_{x1} = 55^{\circ}\mathrm{C}$$

2 2.00 Какого максимального значения достигала температура в баке?

Через большое количество циклов температура установится равной t_x.

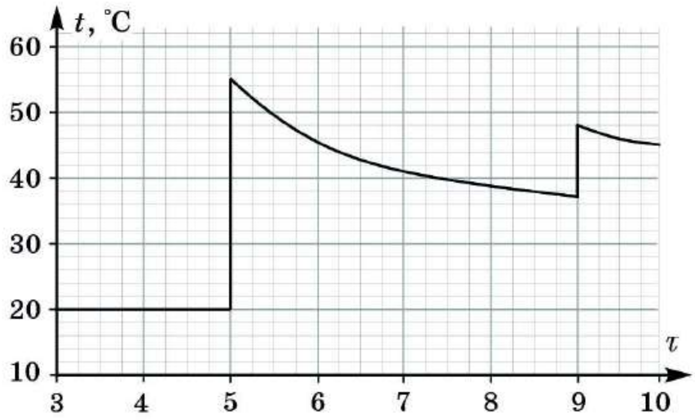
Ответ:

$$t_x = 43,3^{\circ}\mathrm{C}$$

3 2.50 Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от 3τ до 10τ от начала заполнения стакана.

Заметим, что участки графика, соответствующие уменьшению температуры воды внутри периодов 4τ, не линейные, а являются участками гипербол. Искомый график имеет вид:

Ответ:



Разбалловка

Т Условие

S Решение

M Разбалловка

1 [7.50] Найдите какая температура установится в баке через большое время?

Определение характерных времён	
Замечен периодический характер работы сифона	0.50
Найден период работы сифона (4τ)	1.00
Определение характерных температур. **Примечание: при отсутствии уравнений теплового баланса баллы в этом разделе не ставятся**	
Найдена температура в баке сразу после первого срабатывания сифона ($55^\circ\mathrm{C}$)	1.00
Найдена температура воды в баке непосредственно перед вторым переливанием воды через сифон ($37{,}5^\circ\mathrm{C}$)	1.00
Найдена температура воды в баке непосредственно после второго переливания воды через сифон ($48^\circ\mathrm{C}$)	1.00
Найдена температура воды в баке спустя время 10τ $(45{,}5^\circ\mathrm{C})$	1.00
Найдена температура, которая установится в баке через большое время ($43{,}3^\circ\mathrm{C}$)	2.00

2 [2.00] Какого максимального значения достигала температура в баке?

Обосновано, что температура воды в баке не превысит $55^\circ\mathrm{C}$	2.00

3 [2.50] Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от 3τ до 10τ от начала заполнения стакана.

График зависимости температуры от времени	
Выбран разумный масштаб, оси подписаны и оцифрованы	0.50
Горизонтальная прямая от 3τ до 5τ при $t = 20^\circ\mathrm{C}$	0.50
Вогнутая гипербола от $(5\tau; 55^\circ\mathrm{C})$ до $(9\tau; 37{,}5^\circ\mathrm{C})$	1.00
Вогнутая гипербола от $(9\tau; 48^\circ\mathrm{C})$	0.50

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 [12.00] Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка?

А) Рассмотрим первый случай, когда температура ареометров t_0 выше, чем начальная температура жидкости. Тогда начальная температура жидкости (по графику) равна $21,5^{\circ}\mathrm{C}$, а установившаяся в результате теплообмена с ареометром – $26,5^{\circ}\mathrm{C}$. Пусть $C_{ж}$ – теплоёмкость жидкости, $C_{а}$ – теплоёмкость ареометра. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C_{ж}\cdot 5^{\circ}\mathrm{C} = C_a(t_0 - 26,5^{\circ}\mathrm{C}).$$

После опускания второго ареометра температура жидкости увеличивается и становится равной $27,4^{\circ}\mathrm{C}$. Запишем уравнение теплового баланса для двух ареометров:

$$C_{ж}(27,4^{\circ}\mathrm{C} - 21,5^{\circ}\mathrm{C}) = 2C_a(t_0 - 27,4^{\circ}\mathrm{C}).$$

Отсюда:

$$\frac{5,9^{\circ}\mathrm{C}}{5^{\circ}\mathrm{C}} = \frac{2(t_0 - 27,4^{\circ}\mathrm{C})}{(t_0 - 26,5^{\circ}\mathrm{C})} \Rightarrow t_0 = \frac{10\cdot 27,4^{\circ}\mathrm{C} - 5,9\cdot 26,5^{\circ}\mathrm{C}}{10-5,9} = 28,7^{\circ}\mathrm{C}.$$

Б) Рассмотрим второй случай, когда температура ареометров t_0 ниже, чем начальная температура жидкости. Тогда начальная температура жидкости равна $26,5^{\circ}\mathrm{C}$, а установившаяся в результате теплообмена с первым ареометром $21,5^{\circ}\mathrm{C}$. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C_{ж}\cdot 5^{\circ}\mathrm{C} = C_a(21,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0).$$

После опускания второго ареометра температура жидкости уменьшается и становится равной $20,5^{\circ}\mathrm{C}$. Запишем уравнение для двух ареометров:

$$C_{ж}(26,5^{\circ}\mathrm{C} - 20,5^{\circ}\mathrm{C}) = 2C_a(20,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0).$$

Отсюда:

$$\frac{6^{\circ}\mathrm{C}}{5^{\circ}\mathrm{C}} = \frac{2(20,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0)}{(21,5^{\circ}\mathrm{C} - t_0)} \Rightarrow t_0 = \frac{10\cdot 20,5^{\circ}\mathrm{C} - 6\cdot 21,5^{\circ}\mathrm{C}}{10-6} = 19^{\circ}\mathrm{C}.$$

Ответ: $19^{\circ}\mathrm{C}$ или $28,7^{\circ}\mathrm{C}$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 12.00 Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка?

Указано, что первое значение плотности соответствует начальной температуре воды, а второе – установившейся температуре	1.00
Указано, что существуют два случая: 1) температура ареометра меньше начальной температуры воды; 2) температура ареометра больше начальной температуры воды	1.00
M1 Нет явного указания, что существуют два случая	0.00
Определение по графику возможных начальных и конечных температур:	
Найдены температуры, соответствующие плотности $1,027 \text{кг}/\text{м}^3$($t_1 = 21{,}5^\circ\text{C}$ и $t_2 = 26{,}3^\circ\text{C} - 26{,}5^\circ\text{C}$)	1.00
Найдена установившаяся температура в первом случае ($t_{\text{y}1} = 20,5^\circ\text{C}$)	0.50
Найдена установившаяся температура во втором случае ($t_{\text{y}2} = 27,3^\circ\text{C} - 27,5^\circ\text{C}$)	0.50
Уравнения теплового баланса. **Если приведены уравнения теплового баланса в общем виде и не выполнен п1.2, баллы ставятся только за один случай**	
Первый случай:	
Первый теплообмен	1.00
Второй теплообмен	2.00
Второй случай	
M2 Первый теплообмен	1.00
M2 Второй теплообмен	2.00
Числовые ответы:	
Первый случай $t_{01} = 18{,}7^\circ\text{C} - 19{,}3^\circ\text{C}$	1.00
Второй случай $t_{02} = 28{,}5^\circ\text{C} - 29{,}0^\circ\text{C}$	1.00

Решение

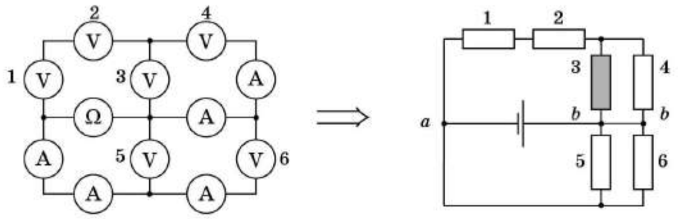
Т Условие

S Решение

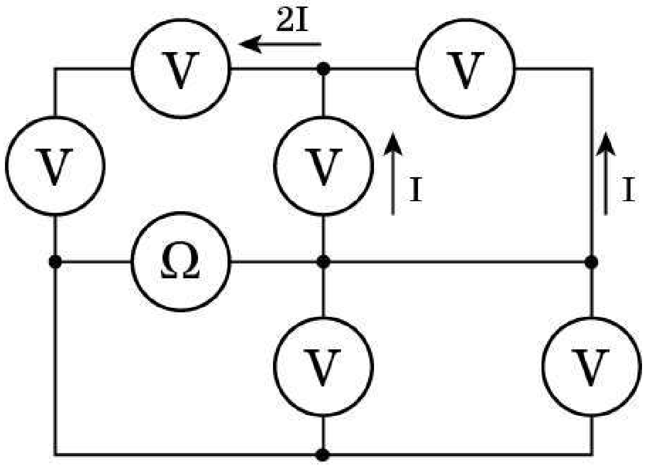
M Разбалловка

1 [12.00] По известным показаниям вольтметра V_1 и амперметра A_1 ($U_1 = 1\text{В}$, $I_1 = 6\text{мкА}$) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке. Все вольтметры одинаковые и их сопротивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

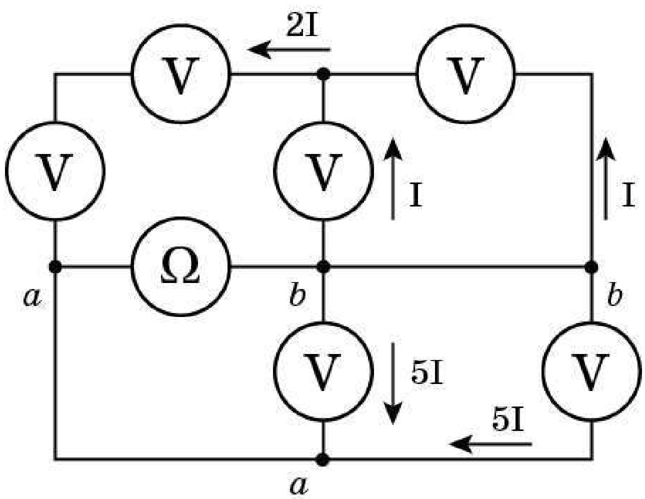
Роль источника тока в цепи выполняет омметр. Так как сопротивления амперметров малы и цепь не содержит контуров без вольтметров, величины токов во всех ветвях определяются сопротивлениями вольтметров, которые можно рассматривать как резисторы с сопротивлениями R_V.
Эквивалентная схема цепи может быть представлена так:



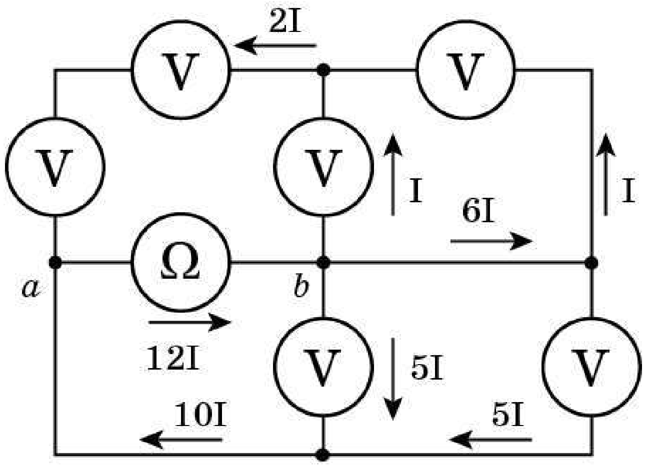
Здесь вольтметры обозначены как резисторы (цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 показано соответствие вольтметров резисторам), амперметры заменены идеальными проводниками, омметр обозначен как источник тока, выделены проводник, через который задан ток (bb), и вольтметр, на котором задано напряжение (№ 3).
Соотношения между силами тока в ветвях упрощенной схемы можно найти с помощью закона Ома и с учетом первого правила Кирхгофа.
Обозначим ток, текущий через вольтметр № 3, за I, тогда такой же ток будет течь и через вольтметр № 4, а через вольтметры № 1 и № 2, пойдет ток $2I$.



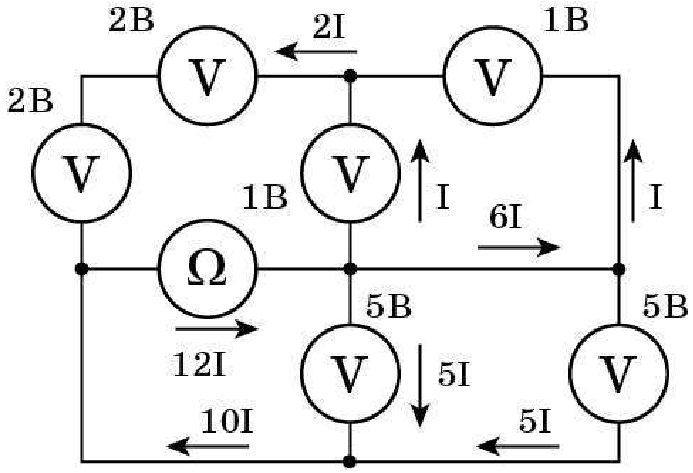
Так как напряжение между узлами b и а равно $5IR_V$, то через вольтметры № 5 и №6 пойдут токи по $5I$.



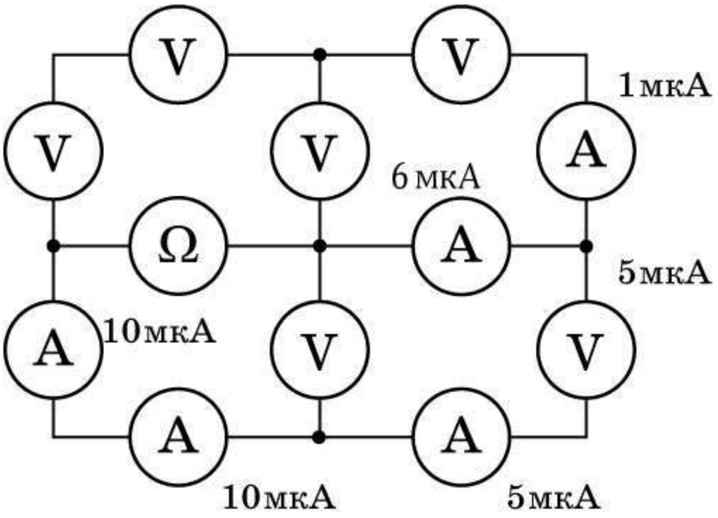
Применяя первое правило Кирхгофа, найдем оставшиеся токи через перемычки и омметр:



Из-за равенства сопротивлений показания вольтметров пропорциональны величинам сил токов, протекающих через них.



Аналогично, пропорциональны токам и показания амперметров.



Показания омметра можно найти, разделив напряжение на внешней цепи между узлами a и b, на силу тока, протекающего через омметр:

Ответ: $R_\Omega = 5В/12мкА = 417кОм$.

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 12.00 По известным показаниям вольтметра V_1 и амперметра A_1 ($U_1 = 1\text{В}$, $I_1 = 6\text{мкА}$) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке. Все вольтметры одинаковые и их сопротивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

Идея пренебречь сопротивлениями амперметров и определить токи, текущие через вольтметры	1.00
Эквивалентная схема	1.00
Исходные уравнения, обосновывающие соотношение токов в цепи	2.00
Найдены токи через вольтметры и их показания	2.00
Найдены показания амперметров	2.00
Найдены показания омметра	4.00

Теоретический тур, 10 класс

1. Ползущая полоска

При использовании специальной технологии обработки полимерных материалов можно добиться анизотропии свойств их поверхности. Например, движение полоски из полиэтилена по горизонтальной поверхности стола в направлении AB (на рис. 1 вправо), характеризуется коэффициентом трения μ_1, а движение в направлении BA – коэффициентом трения $\mu_2 < \mu_1$. Если подвергнуть лежащую на столе полоску длины l циклическому нагреванию-охлаждению, то можно заметить, что полоска перемещается по поверхности стола.

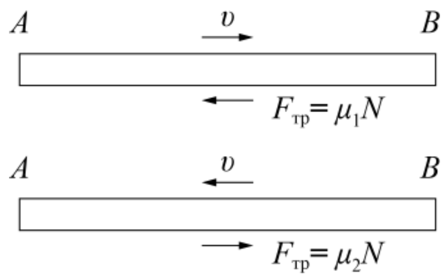


Рис. 1

$\boxed{1}$ В каком направлении (AB или BA) сместится полоска при большом количестве циклов?

$\boxed{2}$ На какое расстояние переместится полоска за N циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT? Ответ запишите в виде формулы.

$\boxed{3}$ Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длины $l = 20$ см за $N = 100$ циклов нагрева-охлаждения при изменении ее температуры на $\Delta T = 80\,^\circ$C. Значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.05$.

Считайте, что при изменении температуры полиэтилена на ΔT, его длина изменяется на величину $\Delta l = \alpha l \Delta T$, где l – длина полоски при комнатной температуре, $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}\,^\circ\mathrm{C}^{-1}$- коэффициент температурного расширения полиэтилена. Полоска имеет постоянную толщину, не изгибается и прижимается к столу равномерно всей поверхностью. Нагревание и охлаждение происходят медленно.

2. Газовая батарея

На вход гладкой прямолинейной трубы постоянного сечения S, ось которой горизонтальна, поступает идеальный многоатомный газ, движущийся со скоростью v_1. Давление газа на входе в трубу равно P_1, плотность – ρ_1. Давление газа на выходе из трубы равно $P_2 = P_1 + \Delta P$. Определите:

$\boxed{1}$ плотность ρ_2 и скорость v_2 газа на выходе из трубы;

$\boxed{2}$ отношение температур газа T_2/T_1 на выходе и на входе в трубу соответственно;

$\boxed{3}$ тепловую мощность N, выделяемую трубой в окружающую среду.

Считайте, что в любом сечении трубы плотность и давление газа постоянны и не зависят от времени. Вязким трением можно пренебречь.

3. Что измеряют омметром?

В соответствии с одной из моделей омметра он состоит из идеального источника постоянного напряжения $\mathcal{E}$ (с нулевым внутренним сопротивлением) и соединенных с ним последовательно резистора сопротивлением r и идеального амперметра (рис. 2). При подключении исследуемого резистора к клеммам A и B встроенный амперметр показывает силу тока, которая затем пересчитывается в величину измеряемого сопротивления и отображается на индикаторе омметра. Если подключить к выводам такого омметра диод, вольтамперная характеристика которого приведена на рис. 3, то он покажет сопротивление $R_D = 6$ кОм.

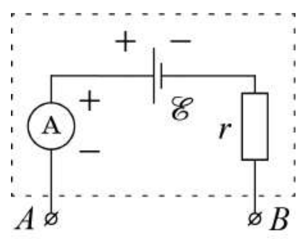


Рис. 2

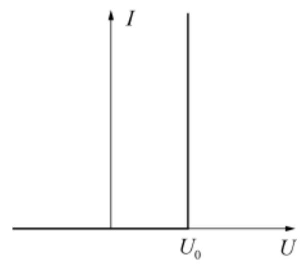


Рис. 3

Если к этому диоду добавить последовательно резистор сопротивлением $R = 20$ кОм и измерить сопротивление получившейся пары омметром, то он покажет $R_1 = 30$ кОм. Если вместо резистора и диода подключить к омметру идеальную батарейку с напряжением $U_Б = 3$ В (полярность подключения неизвестна!), то он покажет отрицательное сопротивление $R_Б = -7,5$ кОм ($R_Б < 0$). По этим данным определите:

$\boxed{1}$ величину напряжения $\mathcal{E}$ внутреннего источника омметра;

$\boxed{2}$ величину внутреннего сопротивления r омметра;

$\boxed{3}$ напряжение U_0, при котором открывается диод;

$\boxed{4}$ показания $R_{Б1}$ омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

Примечание: амперметр, встроенный в омметр, измеряет силу тока с учетом его направления. Если ток течет через амперметр в обратном направлении, то его величина определяется как отрицательная. Омметр выполняет все вычисления с учетом знаков.

4. Частично заряженный цилиндр

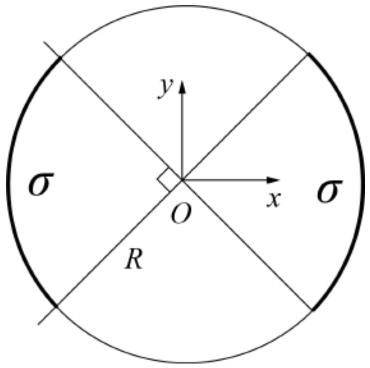


Рис. 4

Бесконечный тонкостенный диэлектрический цилиндр радиуса R разбили вдоль оси вращения на равные «четвертинки». Две противолежащие четвертинки зарядили равномерно с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$, а другие две оставили незаряженными.

$\boxed{1}$ Найдите векторы напряженности электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты $(x;\ 0)$ и $(0;\ y)$. Считайте $x, y \ll R$.

Координатные оси OX и OY направлены вдоль биссектрис прямых углов (рис. 4).

5. Разлетающиеся зонды

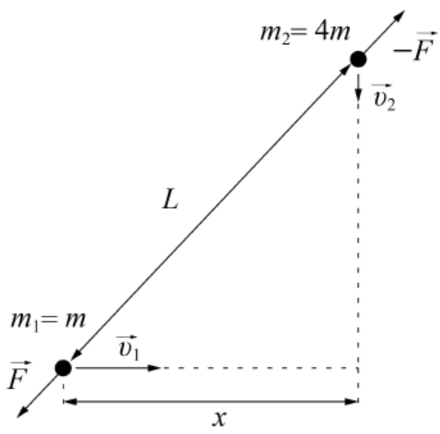


Рис. 5

Два автономных исследовательских зонда движутся навстречу друг другу с выключенными двигателями в глубоком космосе вдали от других тел курсами, пересекающимися под прямым углом. Масса первого зонда равна $m_1 = m$, а его скорость $v_1 = v$. Масса второго зонда $m_2 = 4m$, а скорость $v_2 = v/3$. В момент времени, когда расстояние между зондами становится равным L, а расстояние от первого зонда до точки пересечения траекторий – x, на обоих зондах включаются двигатели с постоянной по модулю силой тяги F, при этом вектор силы тяги в любой момент времени направлен противоположно направлению на другой зонд. Рисунок приведён для момента включения двигателей. Двигатели выключаются, когда расстояние между зондами становится равным $2L$. Размеры зондов малы по сравнению с L, а их гравитационным взаимодействием можно пренебречь.

$\boxed{1}$ При каком значении $x = x_{кр}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

$\boxed{2}$ Найдите минимальное значение силы тяги $F_{мин}$ при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{кр}$.

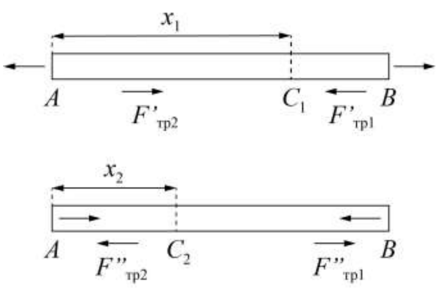
$\boxed{3}$ Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{мин} + dF$ ($dF \ll F_{мин}$), а $x = x_{кр}$. Найдите **вектор** конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}$.

$\boxed{4}$ Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{кр}$). Найдите **модуль** конечной скорости первого зонда относительно второго.

Решение

- I [Условие]
- S [Решение]
- M [Разбалловка]

1 ?? В каком направлении (AB или BA) сместится полоска при большом количестве циклов?



при изменении длины полоски в результате нагрева или охлаждения различные участки полоски движутся относительно стола в противоположных направлениях. При этом существует точка, неподвижная относительно стола. Положение такой точки определяется из условия равенства действующей на полоску результирующей силы трения. Пусть расстояние этой точки от левого конца полоски при нагреве (т. C_1) равно x_1, при охлаждении (т. C_2) - x_2 (рис.2)

При нагреве

$$F_{тр1}{}' = F_{тр2}{}'$$

$$\mu_1 m \frac{l - x_1}{l} g = \mu_2 m \frac{x_1}{l} g$$

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} l$$

Левый край полоски (т.A) сместится в результате нагрева на ΔT влево на расстояние

$$x' = x_1 \alpha \Delta T.$$

При охлаждении аналогично

$$F_{тр1}{}'' = F_{тр2}{}''$$

$$\mu_1 m \frac{x_2}{l} g = \mu_2 m \frac{l - x_2}{l} g$$

$$x_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l$$

А левый край полоски смещается вправо на

$$x'' = x_2 \alpha \Delta T$$

За один цикл нагрев-охлаждение левый край и вся полоска сместятся влево на расстояние

$$\Delta x = x' - x'' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l \alpha \Delta T$$

Учитывая, что $\mu_2 < \mu_1$ получаем, что $\Delta x > 0$, значит полоска смещается влево.

Ответ: Влево

2 ?? На какое расстояние переместится полоска за N циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT? Ответ запишите в виде формулы.

Ответ: За N циклов смещение полоски составит

$$\Delta X = N \Delta x = N \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l \alpha \Delta T$$

3 ?? Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длины $l = 20\text{см}$ за $N = 100$ циклов нагрева-охлаждения при изменении ее температуры на $\Delta T = 80^{\circ}\text{C}$. Значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.05$.

Ответ: $\Delta X = 16\text{см}$

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 ?? В каком направлении (AB или BA) сместится полоска при большом количестве циклов?

Указано или используется, что при нагреве и охлаждении существует неподвижная в ЛСО точка	0.50
Указано или используется, что неподвижная точка - не середина полоски и не ее конец. Комментарий: если одновременно несколько точек неподвижны, то 0 б. за этот пункт. Комментарий: последующие критерии не засчитываются при 0 б. за этот пункт	0.50
Равенство сил трения (хотя бы в одном из процессов), например: $F'_{\text{тр}1} = F'_{\text{тр}2}$. Комментарий: засчитывается автоматом, если записано сразу $\mu_1 m \frac{l-x_1}{l} g = \mu_2 m \frac{x_1}{l} g$	2.00
Силы трения выражены через длины: $$F'_{\text{тр}1} = \mu_1 m \frac{l-x_1}{l} g,$$ $$F'_{\text{тр}2} = \mu_2 m \frac{x_1}{l} g$$. Комментарий: засчитывается автоматом, если записано сразу $\mu_1 m \frac{l-x_1}{l} g = \mu_2 m \frac{x_1}{l} g$. Комментарий: при перепутанных коэффициентах трения не засчитывается этот пункт и ответ про направление, а остальные пункты оцениваются. Комментарий: если рассуждение основано на равенстве работ, то этот пункт может быть оценен, а все последующие - 0 б.	2 × 0.50
Нагрев: неподвижная точка на $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} l$ от левого края, $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} l$ от правого края	1.00
Нагрев: смещение левого края на $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} l\alpha\Delta T$, либо правого края на $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} l\alpha\Delta T$, либо центра	0.50
Охлаждение: неподвижная точка на $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} l$ от левого края, $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} l$ от правого края	1.00
Охлаждение: смещение левого края на $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} l\alpha\Delta T$, либо правого края на $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} l\alpha\Delta T$, либо центра. Комментарий: допускаются ошибки в $(1 \pm \alpha\Delta T)$ раз - из-за неточного использования α, определенного в условии.	0.50
Верный ответ: смещается влево. Комментарий: необходимо качественное или количественное обоснование	2.00
Верный ответ: смещение полоски на $\Delta X = N \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} l\alpha\Delta T$. Комментарий: допускается только ошибка в знаке направления, при других ошибках в окончательной формуле она не засчитывается	2.00
Получена верная формула $\Delta x = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} l\alpha\Delta T$, но в ответ не включен множитель N	-0.50
Верный численный ответ: $\Delta X = 16$см. Комментарий: засчитывается только при засчитанном буквенном ответе	1.00

2 ?? На какое расстояние переместится полоска за N циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT? Ответ запишите в виде формулы.

3 ?? Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длины $l = 20$см за $N = 100$ циклов нагрева-охлаждения при изменении ее температуры на $\Delta T = 80^\circ\text{C}$. Значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.05$.

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? плотность ρ_2 и скорость v_2 газа на выходе из трубы;

Поскольку система находится в стационарном состоянии, то масса газа в трубе в любой момент постоянна. Значит масса газа втекающего в трубу за малое время dt должна равняться массе вытекающего газа

$$\rho_1 S v_1 dt = \rho_2 S v_2 dt = \mu dt,$$

где μ - массовый расход газа.
\newline
Так как сечение трубы постоянное и вязкое трение мало, то импульс газа, находящегося в трубе, изменяется за счет сил давления окружающего газа на торцы трубы. Запишем изменение импульса газа, находящегося в трубе, в проекции на ось x, направленную по движению газа:

$$dp_x = (P_1 S - P_2 S)\, dt.$$

С другой стороны, так как скорость газа в любом сечении остается постоянной, то изменение импульса газа, находящегося в трубе, можно рассчитать как разность импульсов порции газа, вышедшей из трубы за малое время dt и импульса порции газа, вошедшей в трубу за это время

$$dp_x = \mu\,(v_2 - v_1)\, dt$$

Приравнивая выражения для dp_x и используя выражение для μ, получим:

$$\rho_2 = \frac{{\rho_1}^2{v_1}^2}{\rho_1{v_1}^2 - \Delta P};\left(\rho_2 = \frac{{\rho_1}^2{v_1}^2}{\rho_1{v_1}^2 + P_1 - P_2}\right)$$

$$v_2 = v_1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1};\left(v_2 = v_1 - \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 v_1}\right)$$

2 ?? отношение температур газа T_2/T_1 на выходе и на входе в трубу соответственно;

Из уравнение состояния идеального газа, записанного для порций газа на входе в трубу и на выходе из нее имеем:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2\rho_1}{P_1\rho_2} = \frac{P_2 v_2}{P_1 v_1},$$

откуда

Ответ:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_1}\right)\left(1 - \frac{\Delta P}{\rho_1{v_1}^2}\right);\left(\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}\left(1 - \frac{P_2 - P_1}{\rho_1{v_1}^2}\right)\right)$$

3 ?? тепловую мощность N, выделяемую трубой в окружающую среду.

Запишем закон сохранения энергии для газа находящегося в трубе, рассмотрев малый промежуток времени dt. За это время над газом совершают работу внешние силы давления, изменяются его кинетическая и внутренняя энергии и часть энергии выделяется в окружающую среду

$$P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = \mu dt\left(\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2} + \frac{C_V}{M}(T_2 - T_1)\right) + N dt,$$

где M - молярная масса газа.

Таким образом

$$N = \rho_1 S v_1\left(\frac{{v_1}^2 - {v_2}^2}{2} + \frac{C_P}{M}(T_1 - T_2)\right)$$

Подставив полученные ранее соотношения, окончательно получим

Ответ:

$$N=\rho_1 S v_1\left(\frac{{v_1}^2}{2}\left(1-\left(1-\frac{\Delta P}{\rho_1 {v_1}^2}\right)^2\right)+\frac{4P_1}{\rho_1}\left(1-\left(1+\frac{\Delta P}{P_1}\right)\left(1-\frac{\Delta P}{\rho_1 {v_1}^2}\right)\right)\right)$$

$$\left(N=\rho_1 S v_1\left(\frac{{v_1}^2}{2}\left(1-\left(1-\frac{P_2-P_1}{\rho_1 {v_1}^2}\right)^2\right)+\frac{4P_1}{\rho_1}\left(1-\frac{P_2}{P_1}\left(1-\frac{P_2-P_1}{\rho_1 {v_1}^2}\right)\right)\right)\right)$$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? плотность ρ_2 и скорость v_2 газа на выходе из трубы;

2 ?? отношение температур газа T_2/T_1 на выходе и на входе в трубу соответственно;

3 ?? тепловую мощность N, выделяемую трубой в окружающую среду.

Решение

1 ?? величину напряжения $\mathcal{E}$ внутреннего источника омметра;

При подключении к клеммам омметра резистора его сопротивление вычисляется омметром по величине протекающего тока по формуле

$$R_{\text{изм}} = \frac{\mathcal{E}}{I} - r.$$

При подключении к клеммам любых других электрических элементов вычисления производятся по этой же формуле (омметр не может определить что именно к нему подключено и предполагает, что подключен резистор).

При подключении диода в прямом направлении величина тока через него

$$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r}.$$

С другой стороны можем выразить этот же ток из показаний омметра

$$I_D = \frac{\mathcal{E}}{r + R_D},$$

откуда получим

$$\frac{\mathcal{E} - U_0}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_D}$$

Для диода, соединенного с резистором, получим аналогичное соотношение

$$\frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}.$$

Поделив два предыдущих соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{r}{r + R} = \frac{r + R_D}{r + R_1},$$

откуда

$$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R} = 30\text{кОм};$$

$$U_0 = \mathcal{E}\frac{R_D}{r + R_D} = \mathcal{E}\frac{R_1 - R_D - R}{R_1 - R_D} = \frac{\mathcal{E}}{6}$$

Рассмотрим подключение батарейки. Отрицательное значение сопротивления на экране омметра может получаться по двум причинам:

а) батарейка включена в том же направлении, что источник (минус батарейки подключен к плюсу источника), при этом ток в цепи превосходит ток короткого замыкания, и результат вычисления омметром по заложенной в него формуле становится отрицательным; \newline
б) батарейка включена навстречу внутреннему источнику омметра, при этом напряжение батарейки больше напряжения источника и ток течет в противоположном “правильному” направлению при измерении обычного сопротивления. Эти случаи придется рассматривать отдельно

Случай «а»:

$$I_{\text{Б}} = \frac{\mathcal{E} + U_{\text{Б}}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{Б}}},$$

откуда

$$\mathcal{E} = -U_{\text{Б}}\frac{r + R_{\text{Б}}}{R_{\text{Б}}} = 9\text{В},$$

тогда

$\mathcal{E}$

$$U_0 = \frac{\mathcal{E}}{6} = 1,5\text{В}$$

При подключении батарейки с изменением полярности

$$\frac{\mathcal{E} - U_Б}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{Б_1}},$$

откуда

$$R_{Б_1} = r\frac{U_Б}{\mathcal{E} - U_Б} = 15\text{кОм}$$

Случай «б»:

$$I_Б = \frac{\mathcal{E} - U_Б}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_Б},$$

откуда

$$\mathcal{E} = U_Б\frac{r + R_Б}{R_Б} = -9\text{В}.$$

Следовательно, случай «б» не реализуется и остается единственный вариант подключения, рассмотренный в случае «а».

Ответ:

$$\mathcal{E} = -U_Б\frac{r + R_Б}{R_Б} = 9\text{В},$$

2 ?? величину внутреннего сопротивления r омметра;

Ответ:

$$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R} = 30\text{кОм};$$

3 ?? напряжение U_0, при котором открывается диод;

Ответ:

$$U_0 = \frac{\mathcal{E}}{6} = 1,5\text{В}$$

4 ?? показания $R_{Б1}$ омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

Ответ:

$$R_{Б_1} = r\frac{U_Б}{\mathcal{E} - U_Б} = 15\text{кОм}$$

Разбалловка

1 ?? величину напряжения $\mathcal{E}$ внутреннего источника омметра;

Записана связь между показаниями омметра и текущим через него током $$R_{\text{изм}} = \frac{\mathcal{E}}{I} - r$$ или $$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{изм}}}$$ или эквивалент	1.00
Выражение для силы тока через диод $$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r}$$ или эквивалент	1.00
Выражение для силы тока через диод, с подключенным резистором $$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R}$$ или эквивалент	1.00
Найдено r (формула) $$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R}$$	0.50
Найдено численное значение $r = 30\text{кОм}$ Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения r	-0.20
Существование случая «а» $(I > I_{\text{кз}})$	0.50
Выражение для силы тока через батарейку в случае «а» $$I_{\text{Б}} = \frac{\mathcal{E} + U_{\text{Б}}}{r}$$	1.00
Найдено $\mathcal{E}$ в случае «а» (формула) $$\mathcal{E} = -U_{\text{Б}} \frac{r + R_{\text{Б}}}{R_{\text{Б}}}$$	0.50
Найдено численное значение $\mathcal{E} = 9\text{В}$ в случае «а» Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения $\mathcal{E}$ в случае «а»	-0.20
Найдено $R_{\text{Б}_1}$ (формула) $$U_{\text{Б}}$$	0.50

$$R_{Б_1} = r\frac{U_Б}{\mathcal{E} - U_Б}$$	
Найдено численное значение $R_{Б_1} = 15 кОм$ Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения $R_{Б_1}$	-0.20
Указано существование случая «б»	0.50
Выражение для силы тока через батарейку в случае «б» $$I_Б = \frac{\mathcal{E} - U_Б}{r}$$	1.00
Найдено $\mathcal{E}$ в случае «б» (формула) $$\mathcal{E} = U_Б\frac{r + R_Б}{R_Б}$$	0.50
Найдено численное значение $\mathcal{E} = -9В$ в случае «б» Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся Комментарий: эквивалентным утверждением является противоречие неравенства $\lvert R_{Б_1}\rvert > r$ и условий задачи.	0.50
Отсутствие единиц измерения $\mathcal{E}$ в случае «б»	-0.20
Сделан вывод о том, что случай "б" не реализуем	1.00
Найдено U_0 (формула) $$U_0 = \frac{\mathcal{E}}{6}$$	0.50
Найдено численное значение $U_0 = 1,5В$ Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения U_0	-0.20

2 ?? величину внутреннего сопротивления r омметра;

3 ?? напряжение U_0, при котором открывается диод;

4 ?? показания $R_{Б1}$ омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? Найдите векторы напряженности электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты $(x; 0)$ и $(0; y)$. Считайте $x, y \ll R$.

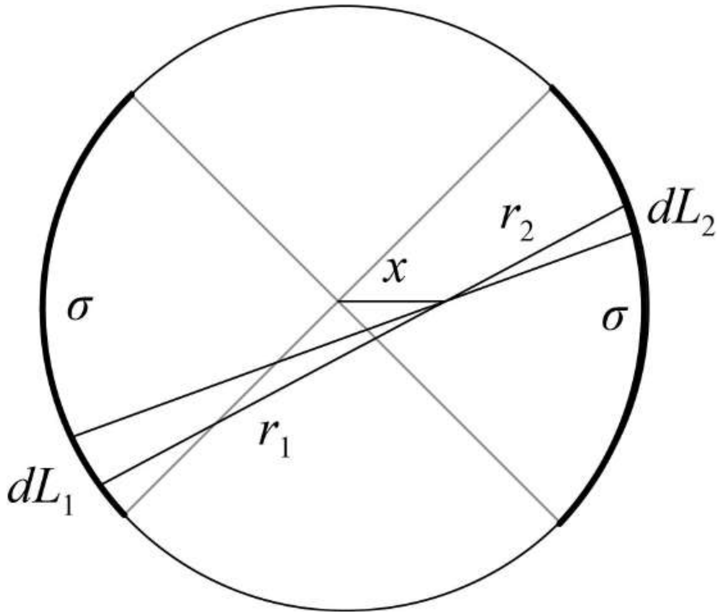
Поле цилиндра можно представить как сумму полей бесконечно длинных тонких нитей (узких полосок), заряженных с постоянной линейной плотностью заряда λ. Найдём поле такой нити на расстоянии r от нее, воспользовавшись симметрией поля и теоремой Гаусса

$$\Phi = 2\pi r L E_r = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

откуда следует:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}.$$

Найдём напряжённость поля в точке с координатами $(x; 0)$. Рассмотрим два выделенных на рисунке небольших участка цилиндра.



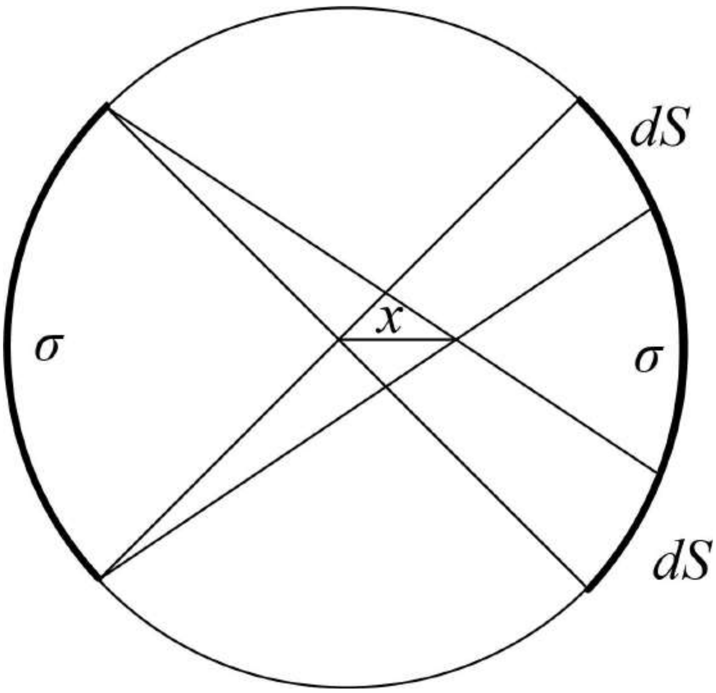
Они создают противоположно направленные поля как от двух нитей с линейными плотностями заряда σdL_1 и σdL_2 соответственно. Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{dL_1}{r_1} = \frac{dL_2}{r_2},$$

поэтому

$$dE_1 = \frac{\sigma dL_1}{2\pi r_1 \varepsilon_0} = \frac{\sigma dL_2}{2\pi r_2 \varepsilon_0} = dE_2,$$

и эти два поля друг друга компенсируют. Исходя из этого ясно, что поле цилиндра в рассматриваемой точке эквивалентно суммарному полю двух выделенных полосок шириной dS каждая, поля которых не компенсируются (см.рис.)



При этом

$$dS = x\sqrt{2},$$

и каждая полоска создаёт поле, равное

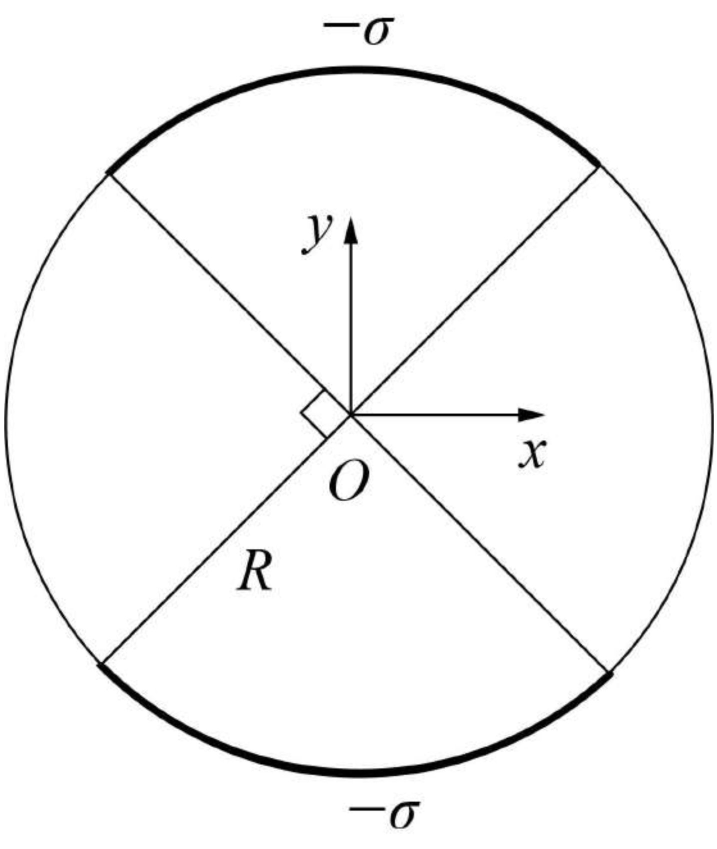
$$E_0 = \frac{\sigma x \sqrt{2}}{2\pi R \varepsilon_0}$$

Поля этих полосок компенсируют друг друга в направлении оси y, поэтому $E_y = 0$, а проекция поля на ось x равна

$$E_x = 2 \cdot \frac{-E_0}{\sqrt{2}} = -\frac{\sigma x}{\pi R \varepsilon_0}.$$

Таким образом, результирующее поле направлено к оси цилиндра.

Для нахождения поля в точке $(0, y)$ представим исходный цилиндр как суперпозицию полностью заряженного цилиндра с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и двух четвертинок с поверхностной плотностью $-\sigma$ (см рис.)



Поле E_1, создаваемое двумя отрицательно заряженными четвертинками, аналогично, найденному в первом случае, поэтому можем воспользоваться готовым результатом:

$$E_{1_y} = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}; E_{1_x} = 0$$

Поле, создаваемое в точке $(y, 0)$, равномерно заряженным цилиндром из соображений симметрии и теоремы Гаусса равно нулю. Тогда по принципу суперпозиции проекции результирующего поля E' в искомой точке равны:

$$E_y{'} = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}; E_x{'} = 0.$$

Поле E' направлено от оси цилиндра.

Ответ:

$$E_y{'} = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}; E_x{'} = 0.$$

Разбалловка

T [Условие](#)

S [Решение](#)

M [Разбалловка](#)

1 ?? Найдите векторы напряженности электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты $(x;0)$ и $(0;y)$. Считайте $x, y \ll R$.

За каждую арифметическую ошибку или потерю безразмерного коэффициента, баллы снимаются только в том пункте, в котором допущена ошибка	None
Есть формула для поля бесконечной заряженной нити $$E=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$$	1.00
В предыдущей формуле неверный численный коэффициент	-0.50
Поле на оси цилиндра равно 0	1.00
M1 Указано, что поля от большей части заряженных поверхностей для точки $(x,0)$ компенсируются	1.00
M1 Утверждение из предыдущего пункта обосновано	1.00
M1 Найдены размеры нескомпенсированных поверхностей	1.00
M2 Выписан верный интеграл для напряженности в точке $(x,0)$	1.00
M2 Верно вычислен интеграл	2.00
M3 Верно используется наложение заряженных цилиндров для нахождения поля в точке $(x,0)$ через поле в $(0,y)$	3.00
Определено направление поля в точке $(x,0)$	1.00
Получена проекция E_x: $$E_x=-\frac{\sigma x}{\pi R\varepsilon_0}$$ Комментарий: пункт не оценивается при неверном методе	1.00
В предыдущей формуле неверный численный коэффициент или потерян знак	-0.50
МЕТОД 1: Указано, что поля от большей части заряженных поверхностей для точки $(0,y)$ компенсируются	1.00
МЕТОД 1: Утверждение из предыдущего пункта обосновано	1.00
МЕТОД 1: Найдены размеры нескомпенсированных поверхностей	1.00
МЕТОД 2: Выписан верный интеграл для напряженности в точке $(0,y)$	1.00
МЕТОД 2: Верно вычислен интеграл	2.00
МЕТОД 3: Верно используется наложение заряженных цилиндров для нахождения поля в точке $(0,y)$ через поле в $(x,0)$	3.00
Определено направление поля в точке $(0,y)$	1.00
Получена проекция E_y: $$E_y=\frac{\sigma y}{\pi R\varepsilon_0}$$ Комментарий: пункт не оценивается при неверном методе	1.00
В предыдущей формуле неверный численный коэффициент или потерян знак	-0.50

2020 -- We are what they grow beyond.

Решение

[I] Условие

[S] Решение

[M] Разбалловка

1 ?? При каком значении $x = x_{кр}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

Зонды столкнутся, если одновременно окажутся в точке пересечения траекторий. Если двигатели не включались, то зонды движутся равномерно, поэтому:

$$\frac{x_{кр}}{v} = 3\frac{\sqrt{L^2 - {x_{кр}}^2}}{v},$$

откуда

Ответ:

$$x_{кр} = \frac{3L}{\sqrt{10}}$$

2 ?? Найдите минимальное значение силы тяги $F_{мин}$ при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{кр}$.

Так как $x = x_{кр}$, то вектор относительной скорости второго зонда относительно первого $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ в момент включения двигателей направлен строго на первый зонд.
Перейдём в систему отсчёта, связанную с первым зондом. В ней на второй зонд действуют сила тяги двигателя и сила инерции, равная

$$\vec{F}_и = m_2\frac{-\vec{F}}{m_1}.$$

Из этого следует, что второй зонд движется прямолинейно.

Найдём модуль скорости второго зонда в момент, когда расстояние между зондами равно S. Запишем закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{m_2 v^2_{отн}}{2} - \frac{m_2 v^2_{отн_0}}{2} = A_F + A_{F_и} = \left(-\vec{F} + \vec{F}_и\right)\Delta\vec{r}_{отн},$$

откуда:

$$\frac{m_2 v^2_{отн}}{2} - \frac{m_2 v^2_{отн_0}}{2} = -F\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)(L - S)\,.$$

Минимально возможная сила достигается, если при расстоянии $S = 0$ между зондами их относительная скорость равна нулю, поэтому:

$$F_{min} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{v^2_{отн_0}}{2L} = \frac{4mv^2}{9L}.$$

Ответ:

$$F_{min} = \frac{4mv^2}{9L}$$

3 ?? Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{мин} + dF$ ($dF \ll F_{мин}$), а $x = x_{кр}$. Найдите вектор конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.

Поскольку по условию $dF \ll F_{min}$, будем считать, что $F = F_{min}$. Подставляя в закон изменения кинетической энергии (1) выражение для F_{min}, получим:

$$\frac{m_2 v^2_{отн}}{2} = FS\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Из этого следует, что в момент, когда расстояние между зондами $S = 2L$

$$|v_{\text{отн}}| = \sqrt{2}|v_{\text{отн}_0}|.$$

Направление относительной скорости меняется на противоположное, поэтому

$$\vec{v}_{\text{отн}} = -\sqrt{2}\vec{v}_{\text{отн}_0}.$$

Вернёмся в исходную систему отсчёта.

Равнодействующая сила, действующая на систему из двух зондов, равняется нулю, поэтому центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2}{5}.$$

Отсюда для скорости первого Зонда относительно центра масс $\vec{v}_{1_{\text{отн}_C}}$ получаем:

$$\vec{v}_{1_{\text{отн}_C}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = \frac{4}{5}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{4}{5}\vec{v}_{\text{отн}}.$$

где $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Получим окончательное выражение для вектора конечной скорости второго зонда

$$\vec{v}_{\text{к}} = \vec{v}_C + \vec{v}_{1_{\text{отн}_C}} = \vec{v}_C - \frac{4\sqrt{2}}{5}\vec{v}_{\text{отн}_0} = \frac{1}{5}\vec{v}_1\left(1 - 4\sqrt{2}\right) + \frac{4}{5}\vec{v}_2\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Ответ:

$$\vec{v}_{\text{к}} = \frac{1}{5}\vec{v}_1\left(1 - 4\sqrt{2}\right) + \frac{4}{5}\vec{v}_2\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

4 ?? Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{\text{кр}}$). Найдите модуль конечной скорости первого зонда относительно второго.

Вновь перейдём в систему отсчёта, связанную с первым зондом. Учтём, что при произвольном значении x относительное движение второго зонда перестаёт быть прямолинейным, так как $\vec{v}_{\text{отн}_0}$ перестаёт быть направленной на первый зонд, следовательно, относительное ускорение становится неколлинеарным начальной относительной скорости.

Запишем закон изменения кинетической энергии для малого относительного перемещения зондов:

$$dE_k = \left(-\vec{F} + \vec{F}_{\text{и}}\right) d\vec{r}_{\text{отн}} = -\vec{F}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) d\vec{r}_{\text{отн}} = -F\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) dS,$$

поскольку вектор силы тяги всегда направлен против направления на второй зонд. Полученное выражение оказывается применимым при любых значениях x и не зависит от формы траектории. Поэтому, используя результат, полученный при решении второго вопроса для значения $S = 2L$

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_{\text{отн}_0}^2 + \frac{2FL(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$

Ответ:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? При каком значении $x = x_{кр}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

Записано условие столкновения.	1.00
Получен ответ на первый вопрос $$x_{кр} = \frac{Lv_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{3L}{\sqrt{10}} \approx 0,95L.$$	1.00

2 ?? Найдите минимальное значение силы тяги $F_{мин}$ при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{кр}$.

Обосновано, что при $x = x_{кр}$ силы тяги не меняют направления.	1.00
Верно описана динамика системы.	0.50
Получен правильный ответ $$F_{min} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v^2_{отн_0}}{2L} = \frac{4mv^2}{9L}.$$	0.50

3 ?? Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{мин} + dF$ ($dF \ll F_{мин}$), а $x = x_{кр}$. Найдите вектор конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.

Указано, что в процессе движения вектор относительной скорости меняет направление.	0.50
Верно описана динамика системы.	0.50
$$v_{отн} = \sqrt{2} v_{отн_0} = \frac{\sqrt{20}v}{3} = \approx 1,49v,$$ либо $$\tau = \frac{3\sqrt{10}\left(1+\sqrt{2}\right)}{5}\frac{L}{v},$$ где τ - время работы двигателей.	0.50
Указано, что векторная сумма импульсов зондов постоянна, либо $$\Delta p_x = -\frac{3F\tau}{\sqrt{10}}; \Delta p_y = \frac{F\tau}{\sqrt{10}},$$ где оси x и y направлены вдоль $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно.	0.50
$$\alpha = \frac{1 - 4\sqrt{2}}{5} \approx -0,93v.$$	1.00
$$\beta = \frac{4(1+\sqrt{2})}{5} \approx 1,93v.$$	1.00

4 ?? Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{\text{кр}}$). Найдите модуль конечной скорости первого зонда относительно второго.

Верное выражение для суммарной работы силы тяги и силы инерции. $$A = A_{\vec{F}} + A_{\vec{F}_\text{и}} = 5FL,$$ либо для суммарной работы сил тяги $$A = FL$$	1.00
Выражение для работы получено с необходимыми обоснованиями.	2.00
$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v^2_{\text{отн}_0} + \frac{2FL(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$	1.00
Примечание : любые ответы, полученные из некорректных рассуждений, оцениваются в ноль баллов.	None

Теоретический тур, 11 класс

1. Куда упадет шарик?

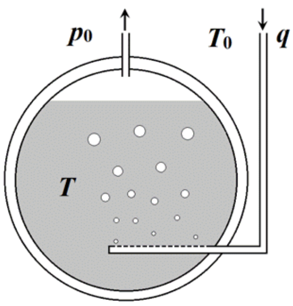
С лодки, движущейся по течению реки, опускают в воду металлический шарик. Шарик падает на дно реки на расстоянии l_1 по горизонтали от места, где его опустили в воду. Если опустить в воду шарик с лодки, движущейся против течения, то шарик падает на дно на расстоянии l_2 ниже по течению. Для лодки, переплывающей реку по траектории, перпендикулярной течению реки, расстояние до точки падения на дно составляет l_3.

$\boxed{1}$ Чему равно расстояние до точки падения на дно для лодки, движущейся в озере той же глубины, что и река?

$\boxed{2}$ Во сколько раз скорость лодки больше скорости течения?

Величина проекции скорости шарика на вертикальное направление при падении в воду равна нулю, закон зависимости силы сопротивления при движении шарика в воде неизвестен, все расстояния отсчитываются по горизонтали от места падения шарика в воду до места падения его на дно. Течение реки и ее глубина везде одинаковы. Двигатель лодки развивает постоянную силу тяги независимо от направления движения.

2. «Буль-буль»



В реакторе в водном растворе некоторого вещества в результате химической реакции выделяется тепло с мощностью $N = 5$ кВт. Для регулирования температуры в реактор через трубки с маленькими отверстиями, проложенными на дне реактора, продувается воздух. Давление воздуха, подающегося в реактор, можно считать равным атмосферному $P_0 = 10^5$ Па, температуру – равной температуре помещения $T_0 = 22\ ^\circ$C. Определите объемный расход воздуха q, необходимый для поддержания в реакторе температуры $T < T_K$, где $T_K = 100\ ^\circ$C – температура кипения водного раствора при атмосферном давлении. Считайте $T_K - T \ll T_K$. Определите численное значение q для $T = 95\ ^\circ$C.

Молярная теплота испарения при температуре T для воды известна: $\lambda = 40$ кДж/моль. Давление насыщенного водяного пара вблизи T_K меняется практически линейно с коэффициентом $\alpha = 3.5$ кПа/ °C. Давление насыщенного пара над раствором в точности соответствует давлению насыщенного водяного пара. Теплотой, идущей на нагрев воздуха, можно пренебречь. Перепад давления на отводящей из реактора газ трубке пренебрежимо мал. В отсутствие подачи воздуха в реактор, теплообмена с окружающей средой нет.

3. Пластина с шайбой

Часть 1. Тонкий стержень из диэлектрика равномерно заряжен с линейной плотностью заряда λ. Точка A расположена на расстоянии h от стержня и равноудалена от его концов. Стержень виден из точки A под углом 2φ (рис. 1). Определите напряженность электрического поля в точке A.

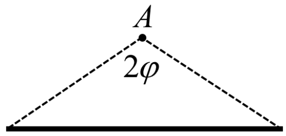


Рис. 1

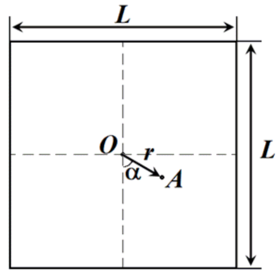


Рис. 2

Часть 2. Тонкая диэлектрическая квадратная пластина с длиной стороны L равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma > 0$. В точку A, смещенную в плоскости пластины на малое расстояние $r \ll L$ относительно ее центра (т. O) под углом $\alpha = 60^\circ$ к стороне квадрата (рис. 2), помещают маленькую гладкую диэлектрическую шайбу массы m с зарядом $q < 0$. Шайбу отпускают без начальной скорости.

$\boxed{2.1}$ Определите величину и направление ускорения шайбы сразу после того, как ее отпустили.

$\boxed{2.2}$ Через какое время шайба впервые окажется на минимальном расстоянии от центра пластины?

Силы тяжести нет, пластина закреплена.

4. Виток в витке

Индуктивность кольца радиуса R, сделанного из тонкой проволоки, равна L.

$\boxed{1}$ Найдите индуктивность проволочного кольца, у которого все геометрические размеры в 2 раза больше.

Если в плоскости кольца радиуса R поместить сверхпроводящее колечко с вдвое меньшими геометрическими размерами так, чтобы плоскости колец и их центры совпадали (рис. 3), то индуктивность кольца радиуса R оказывается равной L_1.

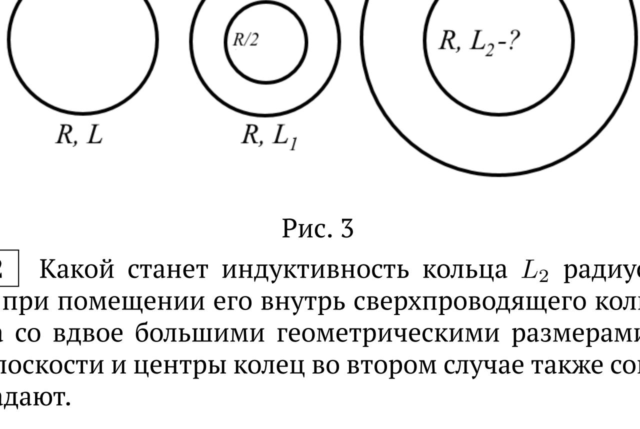


Рис. 3

$\boxed{2}$ Какой станет индуктивность кольца L_2 радиуса R при помещении его внутрь сверхпроводящего кольца со вдвое большими геометрическими размерами? Плоскости и центры колец во втором случае также совпадают.

5. Прозрачный слой

В шаре радиуса $2R$ из оптически прозрачного материала имеется сферическая полость радиуса R. Центры шара и полости совпадают. Внутри полости воздух. Из воздуха снаружи на поверхность шара падает луч света (рис. 4). При каких значениях угла падения луча на поверхность шара α луч проникнет внутрь полости? Рассмотрите два случая:

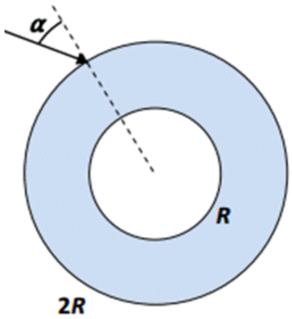


Рис. 4

$\boxed{1}$ Показатель преломления вещества шара постоянен и равен $n = 2$.

$\boxed{2}$ Показатель преломления вещества шара линейно уменьшается при увеличении расстояния r от центра: $n(r) = 2.5 - 0.5\frac{r}{R}, R \leq r \leq 2R$.

Показатель преломления воздуха считать равным $n_0 = 1$.

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? Чему равно расстояние до точки падения на дно для лодки, движущейся в озере той же глубины, что и река?

В системе отсчета, связанной с водой, скорость лодки v одинаковая, независимо от направления движения, поэтому расстояние l, которое проходит шарик до места падения, всегда одно и то же. Время движения шарика в воде τ также одинаковое во всех случаях. В системе отсчета, связанной с землей, расстояния, которые проходит шарик, равны

$$l_1 = l + u\tau$$

$$l_2 = u\tau - l,$$

где u — скорость течения. Отсюда

Ответ:

$$l = \frac{(l_1 - l_2)}{2}$$

2 ?? Во сколько раз скорость лодки больше скорости течения?

При этом также $u\tau = \frac{(l_1+l_2)}{2}$. При движении по траектории перпендикулярной течению реки расстояние l_3 определяется по теореме косинусов

$$l_3^2 = l^2 - 2lu\tau \cdot \cos\alpha + (u\tau)^2,$$

где α — угол между направлением вектора скорости лодки относительно воды и перпендикуляром к направлению течения реки. Учитывая, что $cos\alpha = \frac{u}{v}$, получаем

$$l_3^2 = \frac{(l_1 - l_2)}{4}^2 - 2\frac{(l_1 - l_2)}{2}\frac{(l_1 + l_2)}{2} \cdot \frac{u}{v} + \frac{(l_1 + l_2)^2}{4}$$

Отсюда

Ответ:

$$\frac{v}{u} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2}$$

Разбалловка

1 ?? Чему равно расстояние до точки падения на дно для лодки, движущейся в озере той же глубины, что и река?

Скорость движения лодки v относительно воды (или в СО воды) постоянна	0.50
Время движения шарика от момента броска и до момента падения на дно τ во всех трех случаях одинаково. Балл ставится только в случае корректного доказательства данного утверждения. Не влияет на оценку последующих пунктов.	0.75
Перемещение шарика в горизонтальной плоскости относительно воды (или в СО воды) s одинаково по модулю во всех трех случаях. Балл ставится только в случае корректного доказательства данного утверждения. Не влияет на оценку последующих пунктов.	0.75
Модуль перемещения воды $u\tau$ относительно берега за время движения шарика одинаков для всех трёх случаев	0.50
Правильно записано выражение для связи модулей перемещений шарика в первом случае: $$l_1 = u\tau + s$$	1.00
Правильно записано выражение для связи модулей перемещений шарика во втором случае: $$l_2 = u\tau - s$$ При неверных знаках в правой части выражения за данный пункт ставится 0, но в последующих пунктах баллы не снимаются	1.00
Получено выражение для перемещения шарика в горизонтальной плоскости при движении в озере (или для всех случаев в СО воды): $$s = \frac{l_1 - l_2}{2}$$	1.00

2 ?? Во сколько раз скорость лодки больше скорости течения?

Найден модуль перемещения воды относительно берега: $$u\tau = \frac{l_1 + l_2}{2}$$	1.00
Правильно нарисована связь перемещений для третьего случая (или пояснена в тексте решения)	1.00
Правильно записана теорема косинусов или аналогичные выражения для прямоугольных треугольников в соответствие с рисунком $$l_3^2 = s^2 + (u\tau)^2 - 2su\tau \cdot \cos\varphi$$	1.50
Соотношение скоростей записано как тригонометрическая функция соответствующего угла (синус, косинус или тангенс) $$\cos\varphi = u/v$$	1.00
Угол между направлениями скоростей показан на рисунке или есть его словесное определение	0.50
Получен верный ответ для соотношения скоростей: $$\frac{v}{u} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2}$$	1.50

Решение

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 ?? Определите объемный расход воздуха q, необходимый для поддержания в реакторе температуры $T < T_K$, где $T_K = 100°\mathrm{C}$ — температура кипения водного раствора при атмосферном давлении. Считайте $T_K - T \ll T_K$. Определите численное значение q для $T = 95°\mathrm{C}$.

За некоторый промежуток времени τ через трубки пройдет ν_1 молей воздуха

$$\nu_1 = \frac{P_0 q \tau}{R T_0}$$

Количество молей водяного пара ν_2, который испарится внутрь пузырьков за это же время, определяется количеством теплоты, выделившейся в реакторе.

$$\nu_2 = \frac{N\tau}{\lambda}$$

Давление внутри пузырьков равно атмосферному и складывается из давления насыщенного пара $P_{\text{П}}$ при температуре T и давления воздуха $P_{\text{В}}$, при этом

$$P_{\text{П}} = P_0 - \alpha(T_K - T)$$

$$P_{\text{В}} = P_0 - P_{\text{П}} = \alpha(T_K - T)$$

Отношение количества молей пара и воздуха в пузырьках равно отношению их парциальных давлений

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{P_0 - \alpha(T_K - T)}{\alpha(T_K - T)} = \frac{NRT_0}{\lambda P_0 q}$$

Отсюда

Ответ:

$$q = \frac{NRT_0\alpha(T_K - T)}{P_0\lambda(P_0 - \alpha\,(T_K - T))} \approx 6,5 \cdot 10^{-4} \text{м}^3/\text{с}$$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 [??] Определите объемный расход воздуха q, необходимый для поддержания в реакторе температуры $T < T_K$, где $T_K = 100°\mathrm{C}$ — температура кипения водного раствора при атмосферном давлении. Считайте $T_K - T \ll T_K$. Определите численное значение q для $T = 95°\mathrm{C}$.

Выражение для объема воздуха через объемный расход $V = q\tau$	0.25
Правильно записано уравнение связи q и количества вещества для подаваемого воздуха	1.50
Нахождение давления насыщенного пара при температуре T: $p = p_0 - \alpha(T_K - T)$	1.00
Связь теплоты и количества испаряемой воды $Q = \lambda\nu$	0.50
Нахождение выделяемой теплоты $Q = N\tau$	0.25
Правильно записано условие стабильности пузырька (сумма парциальных давлений пара и воздуха равно $P_0 = P_{\text{возд}} + P_{\text{пара}}$)	2.00
Учет изменения объема пузырька при испарении в него воды	1.00
Учет изменения объема пузырька за счет изменения температуры воздуха в пузырьке	0.50
Уравнение состояния для пара	0.50
Отношение количеств вещества выражено через отношение парциальных давлений $$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{P_0 - \alpha(T_K - T)}{\alpha(T_K - T)}$$	1.50
Аналитический ответ в приближении $\alpha(T_K - T) \ll P_0$ $$q \approx \frac{NRT_0\alpha(T_K - T)}{P_0^2\lambda}$$	1.00
Получен правильный аналитический ответ $$q = \frac{NRT_0\alpha(T_K - T)}{P_0\lambda(P_0 - \alpha\,(T_K - T))}$$	1.00
Получен правильный численный ответ $$q \approx 6.5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3/\text{с}$$	1.00

Решение

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 4.00 Определите напряженность электрического поля в точке A.

I способ

Напряженность электрического поля определяется скоростью изменения потенциала: $E = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta h}\right|$. Найти разность потенциалов от стержня в точках A и A', расстояние между которыми Δh — это то же самое, что найти разность потенциалов в точке A от двух стержней, смещенных на расстояние Δh.

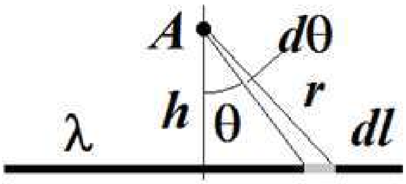
Рассмотрим вклады в потенциал от малых элементов стержней, видимых из центра под равными углами. Потенциал точечного заряда определяется соотношением $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.Поскольку линейные плотности зарядов одинаковы, то отношение потенциалов от таких элементов будет следующим$\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{l_1}{l_2}\dfrac{r_2}{r_1}$. Из подобия треугольников следует, что данное отношение равняется единице. Таким образом, разность потенциалов от двух стержней, находящихся на расстоянии Δh, равна потенциалу от двух частей на краях одного из стержней. Длина каждой из них $\Delta l = \Delta h \mathrm{tg}\varphi$, находятся они на расстоянии $r = \dfrac{h}{\cos\varphi}$ от точки A, откуда $\Delta\varphi = \dfrac{2\lambda\Delta l}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\lambda\Delta h \sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h}$, и

Ответ:

$$E = \frac{\lambda \sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h}$$

II способ

Если элемент стержня виден из точки A под углом $d\theta$, то длина этого элемента $dl = \dfrac{r d\theta}{\cos\theta}$, где θ — угол между направлением на элемент и перпендикуляром, опущенным из точки А на стержень, $r = \dfrac{h}{\cos\theta}$ — расстояние от элемента до точки A. Тогда напряженность электрического поля, создаваемого этим элементом, равна $\dfrac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, а его проекция на перпендикуляр



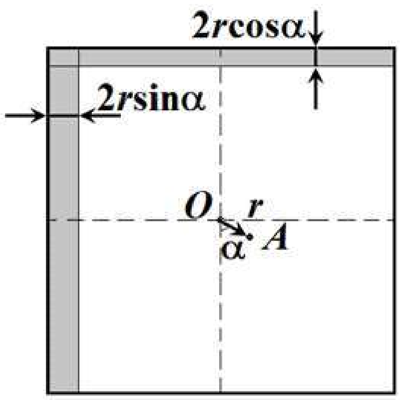
$$dE = \frac{\lambda dl \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda \cos\theta \, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 h}$$

Суммируя эти проекции для всех элементов, получаем

$$E = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{\lambda \cos\theta \, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 h} = \frac{\lambda \sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h}$$

2.1 5.00 Определите величину и направление ускорения шайбы сразу после того, как ее отпустили.

При отклонении от центра взаимодействие частицы с пластиной можно представить как взаимодействие с прямоугольником максимально большого размера с центром в положении частицы и с двумя оставшимися тонкими полосами (см. рис). Прямоугольник не имеет составляющей поля в плоскости квадрата в силу симметрии, значит, эта составляющая определяется только полями полосок.Толщины полос равны удвоенным смещениям частицы вдоль направлений, перпендикулярных им.Поскольку $r \ll L$, воспользуемся результатом части 1 и заменим полоски на стержни с линейной плотностью заряда $\lambda_1 = 2r\sigma \sin\alpha$ и $\lambda_2 = 2r\sigma \cos\alpha$. Напряженность поля от каждой из них равна $E_{1,2} = \dfrac{\lambda_{1,2}}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 (L/2)}$, поскольку стержни видны из центра квадрата под углом $2\varphi = \pi/2$. Эти напряженности перпендикулярны (каждая направлена перпендикулярно своему стержню), поэтому складывая их, получаем



$$E = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 L} = \frac{\sqrt{2} r\sigma}{\pi\varepsilon_0 L}$$

\noindent Из отношения $\dfrac{E_1}{E_2} = \mathrm{tg}\alpha$ получаем, что суммарное поле направлено под углом α к стороне — от центра квадрата. Шайба будет притягиваться к центру, поскольку заряды пластины и шайбы от центра квадрата. Шайба будет притягиваться к центру, поскольку заряды пластины и шайбы разноимённые. Таким образом, ускорение шайбы будет направлено к точке O и равно

Ответ:

$$a = \frac{\sqrt{2} r \sigma}{\pi \varepsilon_0 m L}$$

2.2 [3.00] Через какое время шайба впервые окажется на минимальном расстоянии от центра пластины?

Движение шайбы под действием данного поля эквивалентно движению под действием пружины с коэффициентом жёсткости $k = \frac{\sqrt{2}\sigma q}{\pi \varepsilon_0 L}$. Движение будет гармоническим с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 m L}{\sigma q}}$, а траектория будет проходить через центр квадрата.

Ответ: Впервые шайба окажется в центре через время $t = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\pi^3 \varepsilon_0 m L}{4\sqrt{2}\sigma q}}$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 4.00 Определите напряженность электрического поля в точке A.

Поле перпендикулярно стержню	0.10
Поле одного элемента как точечного заряда $$dE_0 = k\frac{\lambda dx}{r^2}$$	1.00
Правильная проекция напряженности: $$dE = dE_0 \cos\theta$$	0.30
Правильно найден элемент проекции напряженности через переменную интегрирования: $$dE = \frac{k\lambda\cos\theta d\theta}{h}$$	0.70
Правильные пределы интегрирования (от $-\varphi$ до φ)	0.40
Ответ $$E = \frac{\lambda\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h} = \frac{2k\lambda\sin\varphi}{h}$$	1.50

2.1 5.00 Определите величину и направление ускорения шайбы сразу после того, как ее отпустили.

Показано, что поле квадрата можно заменить на поле двух полосок	1.00
Правильно найден размер одной полоски $2r\cos\alpha$	0.50
Правильно найден размер другой полоски $2r\sin\alpha$	0.50
Найдена напряженность поля от полоски Пояснение: Необходимо воспользоваться формулой $E = \frac{\lambda\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h} = \frac{2k\lambda\sin\varphi}{h}$ или полученной в вопросе 1. В неё необходимо подставить $\varphi = \pi/4$ и $h = L/2$. Если одна из этих подстановок не верная - пункт всё равно ставится.	1.00
Найдена напряженность поля пластины в проекциях Пояснение: Для получения этого пункта необходимо все подставновки в $\varphi = \pi/4$ и $h = L/2$. сделать верно.	0.90
Найден модуль вектора напряженности $$E = \frac{4\sqrt{2}kr\sigma}{L} = \frac{\sqrt{2}r\sigma}{\pi\varepsilon_0 L}$$	0.50
Найдено направление вектора напряженности или ускорения (вдоль AO)	0.50
Найдена величина ускорения (этот пункт - ответ, тут всё должно быть верно) $$\lvert a\rvert = \frac{4\sqrt{2}kr\sigma\lvert q\rvert}{mL} = \frac{\sqrt{2}r\sigma\lvert q\rvert}{\pi\varepsilon_0 mL}$$	0.10

2.2 3.00 Через какое время шайба впервые окажется на минимальном расстоянии от центра пластины?

Указано, что движение является гармоническим вдоль направления OA	0.80

Определен период колебаний или угловая частота	0.60
Время движения $t = T/4$	0.60
Найдено искомое время (этот пункт - ответ, тут всё должно быть верно) $$t = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\pi^3 \varepsilon_0 m L}{4\sqrt{2}\sigma \lvert q \rvert}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{mL}{\sqrt{2} k \sigma \lvert q \rvert}}$$	1.00

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 [3.00] Найдите индуктивность проволочного кольца, у которого все геометрические размеры в 2 раза больше.

Прежде всего заметим, что индуктивность кольца пропорциональна его радиусу. В самом деле, величина магнитной индукции в каждой точке пространства уменьшается обратно пропорционально радиусу кольца, а площадь увеличивается пропорционально квадрату радиуса. При заданной величине тока в кольце магнитный поток через плоскость кольца, таким образом, прямо пропорционален радиусу. Поэтому индуктивность кольца радиуса $\frac{R}{2}$ равна $\frac{L}{2}$, а кольца радиуса $2R — 2L$.

Ответ:

$$2L$$

2 [9.00] Какой станет индуктивность кольца L_2 радиуса R при помещении его внутрь сверхпроводящего кольца со вдвое большими геометрическими размерами? Плоскости и центры колец во втором случае также совпадают.

Магнитный поток через внутреннюю область нашего кольца (область A) в виде концентрического круга радиуса $\frac{R}{2}$ составляет некоторую часть α от полного потока через плоскость кольца

$$\Phi_A = \alpha LI$$

Тогда магнитный поток через область с внутренним радиусом $\frac{R}{2}$ и внешним радиусом R (область B) внутри нашего кольца

$$\Phi_B = (1-\alpha)LI$$

Введем также обозначение для потока Φ_C через область C с внутренним радиусом R и внешним радиусом $2R$, охватывающую снаружи наше кольцо

$$\Phi_C = \beta LI$$

В первом случае (сверхпроводящее колечко внутри) магнитный поток через область A, ограниченную сверхпроводящим контуром равен нулю

$$\Phi_{A1} = \alpha LI - \frac{L}{2} I_1 = 0$$

Здесь I_1 — ток, возникающий в сверхпроводящем колечке. Полный поток через плоскость кольца радиуса R при этом

$$\Phi_1 = L_1 I = (1-\alpha)\, LI + \beta \frac{L}{2} I_1$$

Во втором случае наше кольцо с током I охвачено сверхпроводящим кольцом радиуса $2R$ с индуктивностью $2L$. Во внешнем кольце возникает такой ток I_2, при котором полный поток магнитного поля через его плоскость равнялся нулю

$$LI - \beta LI - 2LI_2 = 0$$

Полный поток через плоскость кольца радиуса R при этом

$$\Phi_2 = L_2 I = LI - \alpha \cdot 2LI_2$$

Из предыдущих уравнений получаем

$$L_1 I = (1-\alpha)\, LI + \alpha\beta LI = (1 - \alpha + \alpha\beta)\, LI,$$

И далее

$$L_2 I = LI - \alpha \cdot (1-\beta)\, LI = (1 - \alpha + \alpha\beta)\, LI$$

Таким образом, $L_2 = L_1$.

Ответ:

$$L_2 = L_1$$

Решение 2 (взаимная индуктивность)

Соображение подобия относится и к взаимной индуктивности двух контуров — при увеличении всех геометрических размеров системы в 2 раза коэффициент взаимной индуктивности увеличивается в 2 раза. Таким образом, если коэффициент взаимной индуктивности колец радиусов R и $R/2$ равен L_{12}, то для колец радиусов $2R$ и R он будет равен $2L_{12}$. С их использованием уравнения первого варианта решения приобретают вид

$$\Phi_{\mathrm{A}1} = L_{12}I - \frac{L}{2}I_1 = 0$$

$$\Phi_1 = L_1 I = LI - L_{12}I_1$$

$$2L_{12}I - 2LI_2 = 0$$

$$\Phi_2 = L_2 I = LI - 2L_{12}I_2$$

Из них также следует

$$L_1 = L_2 = L - \frac{2L_{12}^2}{L}$$

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 3.00 Найдите индуктивность проволочного кольца, у которого все геометрические размеры в 2 раза больше.

Указана связь индукции магнитного поля во всех точках пространства и геометрических размеров $$B \propto \frac{1}{R}$$	1.50
Указана связь площади и геометрических размеров $$S \propto R^2$$	0.50
Найдена индуктивность витка двойных размеров $$L(2R) = 2 \cdot L(R)$$	1.00

2 9.00 Какой станет индуктивность кольца L_2 радиуса R при помещении его внутрь сверхпроводящего кольца со вдвое большими геометрическими размерами? Плоскости и центры колец во втором случае также совпадают.

Указан явно или используется факт, что поток через сверхпроводящее кольцо равен 0	1.30
Указан явно или используется факт, что поток через кольцо является суммой потоков, создаваемых полями обоих колец	0.50
Указан явно или используется факт, что потоки через разные участки плоскости, создаваемые одним кольцом, пропорциональны между собой	1.00
Записано уравнение для потока Φ_{A1} через плоскость сверхпроводящего кольца в первом случае $$\Phi_{A1} = L_{12}I - \frac{L}{2}I_1 = 0$$ $$\Phi_{A1} = \alpha LI - \frac{L}{2}I_1 = 0$$	0.70
Корректно записаны потоки в уравнении выше	0.60
Записано уравнение для потока Φ_1 через поток через плоскость кольца радиуса R в первом случае $$\Phi_1 = L_1I = LI - L_{12}I_1$$ $$\Phi_1 = L_1I = (1-\alpha)LI + \beta\frac{L}{2}I_1$$	0.70
Корректно записаны потоки в уравнении выше	0.60
Записано уравнение для потока через плоскость сверхпроводящего кольца во втором случае $$2L_{12}I - 2LI_2 = 0$$ $$(1-\beta)LI - 2LI_2 = 0$$	0.70
Корректно записаны потоки в уравнении выше	0.60
Записано уравнение для потока Φ_2 через плоскость кольца радиуса R во втором случае $$\Phi_2 = L_2I = LI - 2L_{12}I_2$$	0.70

$$\Phi_2 = L_2 I = LI - \alpha \cdot 2LI_2$$	
Корректно записаны потоки в уравнении выше	0.60
Найдена индуктивность L_2 $$L_2 = L - \frac{2L_{12}^2}{L} = L_1$$ $$L_2 = (1 - \alpha + \alpha\beta)L = L_1$$	1.00

Решение

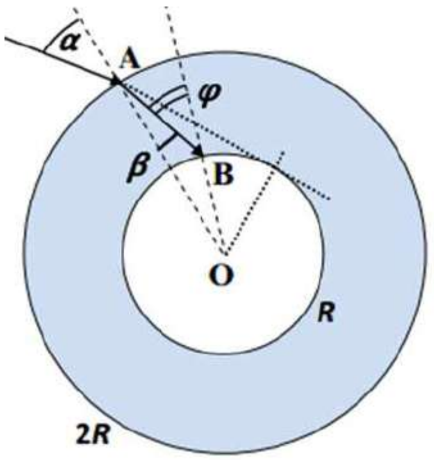
T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? Показатель преломления вещества шара постоянен и равен $n = 2$.

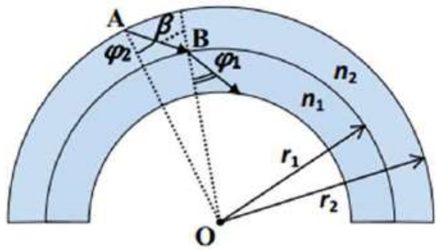
Рассмотрим сначала первый случай, когда после преломления на поверхности шара луч идет по прямой (рисунок 2). Для попадания внутрь полости должно быть выполнено два условия: преломленный луч должен попасть на ее поверхность, и при этом угол падения должен быть меньше угла полного внутреннего отражения для этой поверхности. Из построения видно, что второе условие более жесткое: «крайний» луч, задевающий поверхность полости, падает на нее под углом 90°, в то время как луч, падающий на эту поверхность под углом ПВО $\varphi = arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ соответствует меньшему углу преломления β. Из теоремы синусов для треугольника OAB следует, что $\dfrac{2R}{\sin(\pi-\varphi)} = \dfrac{R}{\sin(\beta)} = \dfrac{nR}{\sin(\alpha)}$. Поэтому $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{n}\sin(\alpha_{max})$. Значит, $\alpha_{max} = 30^\circ$, то есть для попадания внутрь полости угол падения луча на поверхность шара должен удовлетворять условию $\alpha < 30^\circ$.



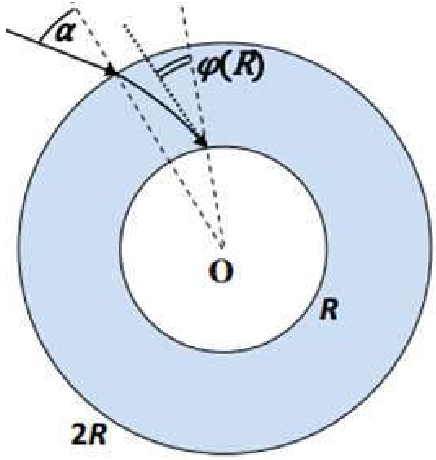
Ответ: $\alpha < 30^\circ$

2 ?? Показатель преломления вещества шара линейно уменьшается при увеличении расстояния r от центра: $n(r) = 2.5 - 0.5\frac{r}{R}, R \le r \le 2R$.

Анализ второго случая начнем с построения закона изменения направления светового луча в сферически-симметричной среде с переменной оптической плотностью. Рассмотрим прохождение луча через тонкий сферический слой, внутренний и внешний радиусы которого равны r_1 и r_2. Будем считать в пределах этого слоя показатель преломления постоянным и равным n_2, а под его внутренней поверхностью — равным n_1 (рисунок 3). Пусть световой луч входит в этот слой под углом φ_2 к радиусу, проведенному в точку входа A. Тогда угол его падения β на внутреннюю поверхность слоя снова может быть определен из теоремы синусов: $\dfrac{r_2}{\sin(\pi-\beta)} = \dfrac{r_1}{\sin(\varphi_2)}$, то есть $\sin(\beta) = \dfrac{r_2}{r_1}\sin(\varphi_2)$. Угол наклона луча к радиусу после перехода в следующий слой определяется из закона преломления $\sin(\varphi_1) = \dfrac{n_2}{n_1}\sin(\beta) = \dfrac{n_2 r_2}{n_1 r_1}\sin(\varphi_2)$, и мы обнаруживаем, что при движении в сферически-симметричной среде с переменным показателем преломления $nr\sin(\varphi) = const$. Применим этот результат к нашей задаче, в которой $nr\sin(\varphi) = 2Rsin(\alpha)$. Так как угол падения луча на поверхность полости должен быть меньше угла ПВО ($\sin[\varphi(R)] < \frac{1}{n(R)}$), и $n(R)\sin[\varphi(R)] = 2sin(\alpha)$, то $sin(\alpha) < \frac{1}{2}$, и для попадания внутрь полости угол падения луча на поверхность шара должен удовлетворять условию $\alpha < 30^\circ$.



Однако, для того чтобы при таких α луч мог «добраться» до границы полости, необходимо, чтобы световой луч не прошел мимо нее. Заметим, что при проходе мимо полости угол между лучом и радиусом должен в какой-то точке достигнуть значения $\varphi = 90^\circ$ - тогда r перестает убывать. В этом случае луч либо движется по окружности, либо "разворачивается" и в конечном итоге покидает слой. Покажем, что в нашем случае это невозможно. Произведение $f(r) = n(r) \cdot r = 2,5 \cdot r - 0,5\frac{r^2}{R}$ — квадратный трехчлен с максимумом при $r = 2,5R$. В интервале $R < r < 2R$ функция $f(r)$ всюду возрастает при росте r и, поскольку $f(r)\,sin\varphi = C$, то по мере приближения к центру угол φ всюду возрастает. Так как конечный угол меньше $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ < 90^\circ$, то и при больших значениях радиуса угол не сможет возрасти до 90°. Итак, при всех $\alpha < 30^\circ$ луч достигает границы полости и проникает внутрь (рисунок 4).



Ответ: При всех $\alpha < 30^\circ$ луч достигает границы полости и проникает внутрь.

Разбалловка

1 ?? Показатель преломления вещества шара постоянен и равен $n = 2$.

Правильно записан (используется в решении) закон преломления на поверхности шара.	0.50
Правильно записана связь угла преломления с углом падения на поверхность полости для первого случая.	0.50
Указано, что возможность попадания луча внутрь полости ограничивается явлением полного внутреннего отражения.	2.00
Получено условие $\alpha < 30^\circ$ для первого случая.	1.00

2 ?? Показатель преломления вещества шара линейно уменьшается при увеличении расстояния r от центра: $n(r) = 2.5 - 0.5\frac{r}{R}, R \leq r \leq 2R$.

M1 Для случая 2 используется идея использования закона преломления луча на каждой сферической поверхности с учетом изменения угла φ внутри каждого сферического слоя при изменении радиуса.	2.00
M2 При применении закона преломления луча используется, что $n \cdot sin(\varphi) = const$.	1.00
Обосновано уравнение, эквивалентное $n \cdot r \cdot \sin(\varphi) = const$	2.00
Уравнение, эквивалентное $n \cdot r \cdot \sin(\varphi) = const$, используется в решении.	1.00
Получено условие $\alpha < 30^\circ$ для второго случая.	2.00
Доказано, что луч достигает поверхности полости во втором случае.	1.00