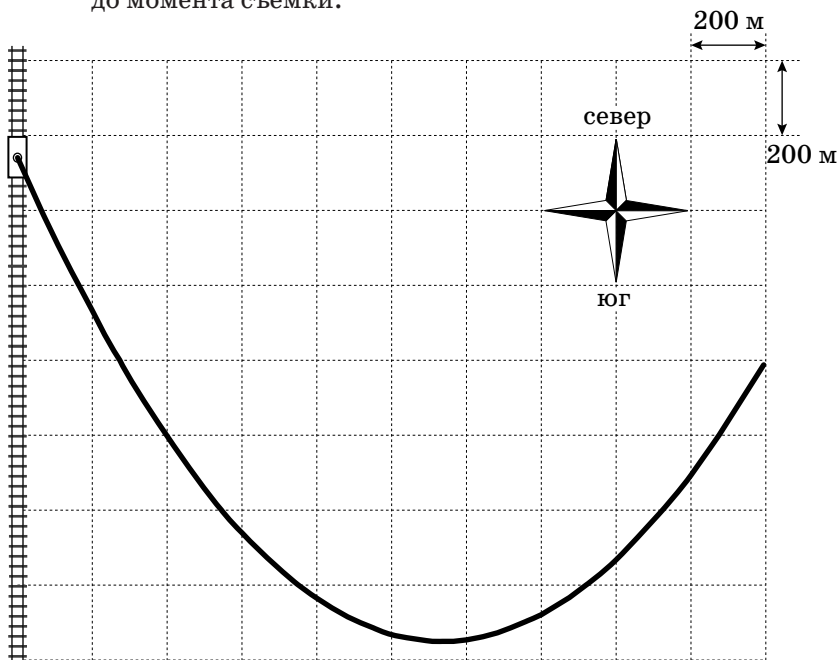
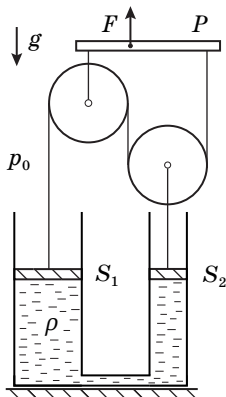


9 КЛАСС**9.1. Паровоз**

При проведении аэрофотосъемки местности в кадр попал шлейф дыма от паровоза, начавшего свое движение из состояния покоя с постоянным ускорением $a = 0,05 \text{ м/с}^2$ по прямому участку железной дороги. На фотографии виден весь шлейф от самого начала движения. Одной клетке соответствует расстояние 200 м. Считая скорость ветра постоянной, определите:

1. В каком направлении двигался паровоз?
2. Под каким углом α к железной дороге дул ветер?
3. Скорость ветра v_0 .
4. Минимальную скорость ветра v_{\min} относительно паровоза.
5. Время движения паровоза τ от начала движения до момента съемки.
6. Расстояние s , которое прошел паровоз от начала движения до момента съемки.





9.2. Блоки и цилиндры

В двух сообщающихся сосудах, площади сечения которых S_1 и S_2 , находится жидкость плотностью ρ . Сосуды герметично закрыты поршнями, которые могут перемещаться под действием системы блоков и нерастяжимых нитей связанных с рычагом P (см. рисунок). Вначале нити не натянуты и не провисают, а поршни соприкасаются с жидкостью. Рычаг медленно смещают вверх на небольшое расстояние h так, что он остается горизонтальным, а нити вертикальными.

1. В предположении, что $S_1 > S_2$, определите, в каких направлениях и на какие расстояния сместятся поршни. Какую силу F_1 необходимо прикладывать к рычагу, чтобы удерживать его после смещения на расстояние h ?
2. Какая сила F_2 потребуется для перемещения рычага вверх на расстояние h при $S_2 = 2S_1$?

Массами рычага, блоков, нитей и поршней можно пренебречь. Трения нет. Сосуды от подставки не отрываются. Давление паров жидкости гораздо меньше атмосферного давления p_0 . Ускорение свободного падения g .

9.3. Прилетевший пластилин

Кусок пластилина массой m , упав без начальной скорости с некоторой высоты, прилип к бруску такой же массы, движущемуся по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью $v_0 = 4$ м/с под действием постоянной горизонтальной силы. Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,2$. Определите скорость v_1 бруска через время $t_1 = 1$ с после начала падения пластилина. Постройте график зависимости скорости бруска v от времени t после начала падения пластилина для двух случаев: а) с высоты $h_a = 10$ м; б) с высоты $h_b = 25$ м, указав на нем координаты характерных точек.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

9.4. Струйное нагревание

В пустой теплоизолированный сосуд наливают воду при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ струйкой с массовым расходом $\mu = 2,0$ г/с. Когда в сосуде оказывается $m = 100$ г воды, в нем включается нагреватель мощностью $N = 200$ Вт. Температура содержимого сосуда измеряется помещенным в него ртутным термометром.

Определите:

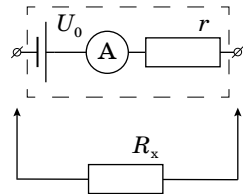
1. Через какое время τ_1 с момента включения нагревателя температура воды в сосуде увеличится до $t_1 = 30^\circ\text{C}$?
2. До какой максимальной температуры t_{\max} сможет нагреться содержимое сосуда?

Выведите зависимость скорости v подъема столбика ртути термометра от времени τ с момента включения нагревателя, если на его шкале расстояние между отметками t_0 и t_1 равно $l = 2,0$ см. Определите скорость подъема столбика при температуре t_1 .

Удельная теплоемкость воды равна $c = 4200$ Дж/(кг \cdot °C). Процессы теплообмена происходят быстро, теплоемкости термометра и сосуда малы.

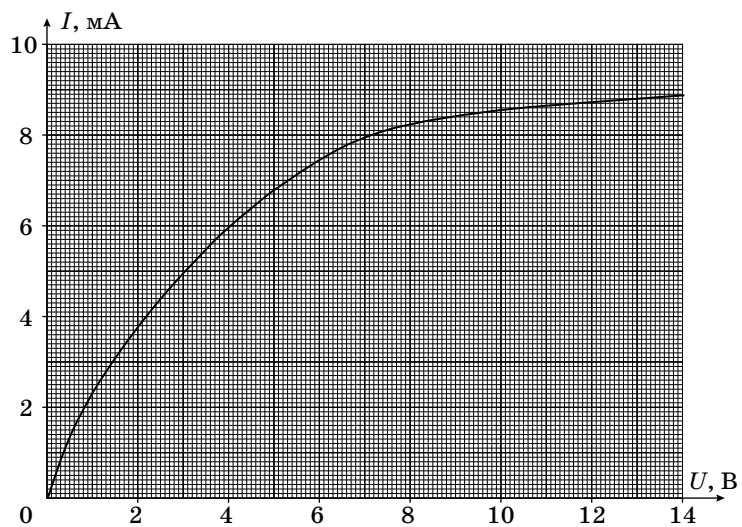
9.5. Нелинейные показания

По упрощенной модели омметр состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0 , резистора сопротивлением r и идеального амперметра (см. рисунок). При подключении к омметру резистора сопротивлением R_x показания амперметра автоматически пересчитываются так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления подключенного резистора.



Омметр при подключении к нелинейному элементу Z , вольт-амперная характеристика которого приведена ниже, показывает сопротивление $R_z = 800$ Ом. Если параллельно к элементу Z подключить резистор сопротивлением $R = 1,0$ кОм, омметр покажет значение $R_1 = 400$ Ом. Определите напряжение U_0 источника омметра и его сопротивление r . Найдите показания омметра R_2 при подключении к нему нелинейного элемента Z и резистора сопротивлением R , соединенных последовательно.

Примечание: Необходимые для решения построения выполните на выданном отдельном бланке и сдайте его вместе с работой.



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

9.1. (Замятнин М.) Направление ветра можно оценить с помощью касательной, проведенной к начальному участку графика. Ветер дует от железной дороги в северо-восточном направлении, примерно под углом 30° к меридиану. Из закона сложения скоростей нетрудно заметить, что при движении паровоза с севера на юг, угол между шлейфом и железной дорогой по мере разгона должен уменьшаться, но он увеличивается, следовательно, паровоз движется с юга на север.

Так как движение паровоза равноускоренное из состояния покоя, то зависимость модуля его скорости от времени имеет вид: $u(t) = at$. Введем систему координат, направив ось OX перпендикулярно, а ось OY вдоль железной дороги, выбрав ноль в начальной точке шлейфа. В системе отсчета (СО) ветра проекции скорости паровоза на оси OX и OY равны:

$$w_y = u(t) + v_0 \cos \alpha$$

$$w_x = v_0 \sin \alpha$$

Координаты паровоза от времени (в СО ветра) изменяются следующим образом:

$$y(t) = v_0 \cos \alpha t + \frac{at^2}{2} \quad (\text{площадь под графиком } w_y(t))$$

$$x(t) = v_0 t \sin \alpha$$

Так как форма шлейфа не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой, уравнение траектории паровоза в СО ветра совпадает с уравнением траектории дыма и имеет вид:

$$y = \frac{ax^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha} + x \operatorname{ctg} \alpha$$

Это уравнение параболы, координаты вершины которой x_0 и y_0 равны:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{a} \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{v_0^2}{2a} \cos^2 \alpha$$

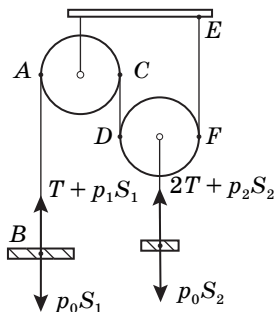
Из рисунка находим $y_0 = 750$ м и $x_0 = 870$ м, тогда $y_0 = \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$, из чего убеждаемся, что $\operatorname{ctg} \alpha = 1,72$ ($\alpha = 30^\circ$).

Зная угол, можно найти скорость ветра: $v_0 = \frac{\sqrt{2ay_0}}{\cos \alpha} = 10$ м/с. Заметим, что расстояние между крайними (по оси x) точками параболы равно $\Delta x = 2000$ м. Но, $\Delta x = v_0 \tau \sin \alpha$, где τ – время всего движения паровоза. Откуда $\tau = \Delta x / v_0 \sin \alpha = 400$ с и расстояние, пройденное паровозом $s = a\tau^2 / 2 = 4000$ м. В принципе, это расстояние можно найти, определив положение начальной точки дви-

жения паровоза, продлив касательную, проведенную к началу шлейфа до пересечения с железной дорогой. Минимальная скорость ветра относительно паровоза равна $v_{\min} = v_0 \sin \alpha = 5 \text{ м/с}$.

9.2. (Аполонский А.) Объем жидкости не изменяется, следовательно поршни могут перемещаться только в противоположных направлениях. Поршень S_2 смещается вверх, а S_1 — вниз. Пусть при перемещении рычага вверх на h , правый поршень поднялся на x , а левый опустился на y . Тогда из-за несжимаемости жидкости $y = xS_2/S_1$. Рассмотрим изменение длин вертикальных участков нити AB , CD и EF . Длина AB увеличивается на $\Delta l_1 = h + y$, длина участков CD и EF уменьшается на $\Delta l_2 = x - h$. Длина нити не меняется, поэтому $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$. Следовательно $h + y = 2x - 2h$. Откуда:

$$x = \frac{3hS_1}{(2S_1 - S_2)}, \text{ а } y = \frac{3hS_2}{(2S_1 - S_2)}.$$



На поршни действуют силы натяжения (на левый действует сила T , а на правый $2T$), сила давления атмосферы и сила давления, действующая со стороны жидкости. Пусть p_1 давление в жидкости под поршнем в левом цилиндре. Давление под правым поршнем будет равно:

$$p_2 = p_1 - \rho g(x + y) = p_1 - \rho g x(1 + S_2/S_1).$$

Условие равновесия для левого поршня: $T + p_1S_1 = p_0S_1$. Для правого: $2T + p_2S_2 = p_0S_2$. Откуда:

$$p_1 = p_0 - \rho g x \frac{S_2(S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)S_1}$$

$$T = (p_0 - p_1)S_1 = \rho g x \frac{S_2(S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)S_1}$$

Сила F , приложенная к рычагу равна: $F = 3T = 9\rho gh \frac{S_1 + S_2}{(2S_1 - S_2)^2}$.

При $S_2 = 2S_1$ на правый поршень действуют силы давления и натяжения вдвое большие, чем на левый, поэтому поршни не могут двигаться в противоположных направлениях. Следовательно смещение поршней возможно лишь при их отрыве от поверхности жидкости. При перемещении рычага силы не изменяются и равны: $T = p_0S_1$, $F = 3T = 3p_0S_1$.

9.3. (Замятнин М.) Пластилин, падая свободно с высоты h_1 за

время $\tau_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ приобретает скорость $u_i = \sqrt{2gh_i}$.

Так как брусок до удара движется равномерно, внешняя сила тяги равна $F = \mu mg$. В момент слипания тел на систему действуют две внешние ударные силы: трения, нормальной реакции опоры и две внешние постоянные силы: тяжести и тяги. За бесконечно малое время удара роль постоянных сил в изменении импульса системы пренебрежима. Запишем изменение импульса системы с учетом ударных сил (теорему о движении центра масс системы в импульсной форме). На горизонтальную ось: $\Delta p_x = -\mu N \Delta t$; на вертикальную: $\Delta p_y = N \Delta t$. Учитывая, что скольжение бруска не прекращается за время слипания: $\Delta p_x = -\mu \Delta p_y$, или $2mv_k - mv_0 = -\mu ti$, откуда скорость системы сразу после слипания $v_k = (v_0 - \mu u_i)/2$.

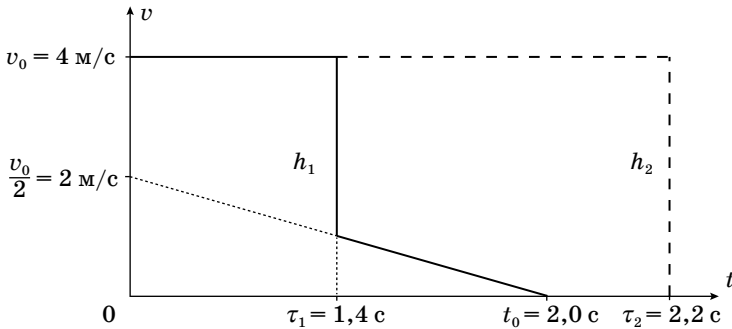
Из второго закона Ньютона, записанного для системы после слипания: $2ma = F - 2\mu mg$, следует, что под действием внешней силы тяги система будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a = \mu g/2$. Окончательно зависимость скорости системы от времени приобретает вид $v = v_k - a(t - \tau) = (v_0 - \mu u_i - \mu g(t - \tau))/2 = (v_0 - \mu gt)/2$. Скорость не зависит от начальной высоты падения пластилина! Полученная зависимость верна для времен $t > \tau$. Поэтому при падении с высот больших, чем $h_1 = 5$ метров скорость бруска через 1 с не изменится и будет равна 4 м/с, но при падении с меньших высот она окажется равной $v = (v_0 - \mu gt_1)/2 = 1$ м/с.

Для любых высот падения пластилина скорость бруска обращается в ноль при $t_0 = v_0/\mu g = 2$ с.

Следует заметить, что ответ на скорость системы угадывается. Если в силу существования решения задачи предположить, что от высоты падения пластилина конечная скорость системы не зависит, то для определенности начальную высоту можно взять нулевой. Тогда сразу пишется ответ $v = (v_0 - \mu gt)/2$. Но такое решение нельзя засчитывать, как правильное, так как оно получено для вырожденного случая и гарантированно не обобщается.

Приведенное выше решение получено в предположении, что брусок не останавливается (его не заклинивает) в момент удара. Для указанных численных данных заклинивание возможно при падении пластилина с высот более $h = v_0^2/(2\mu^2 g) = 20$ м.

График зависимости скорости бруска от времени получается путем шивки постоянной скорости бруска до соударения с выведенной выше зависимостью со скачком во время удара.



9.4. (Зикрацкий Г.) Запишем уравнение теплового баланса для времени τ_1 :

$$N\tau_1 = (m + \mu\tau_1)c(t_1 - t_0)$$

$$\tau_1 = \frac{mc(t_1 - t_0)}{N - \mu c(t_1 - t_0)} = 36 \text{ с}$$

Максимальная температура t_{\max} достигается при обращении в ноль знаменателя и равна:

$$t_{\max} = \frac{N}{\mu c} + t_0 = 44 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Рассмотрим небольшой интервал времени $\Delta\tau$ через время τ после начала нагрева за который в систему поступает $\mu\Delta\tau$ воды при комнатной температуре. Из уравнения теплового баланса:

$$N\Delta\tau = (m + \mu\tau)c\Delta t + \mu\Delta\tau c(t + \Delta\tau - t_0), \text{ откуда}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{Nm}{c(m + \mu\tau)^2}$$

Так как $\tau = \tau_1$ и с учетом размера шкалы, искомая скорость равна:

$$v = \frac{Nml}{(t_1 - t_0)c(m + \mu\tau)^2} = 0,32 \text{ мм/с}.$$

9.5. (Киреев А.) При подключении к нелинейному элементу Z показания омметра равны $R_z = U_z/I_z = 0,8$ кОм, что соответствует силе тока $I_z = 7,5$ мА и напряжению $U_z = 6$ В на нелинейном элементе (точка A на рисунке).

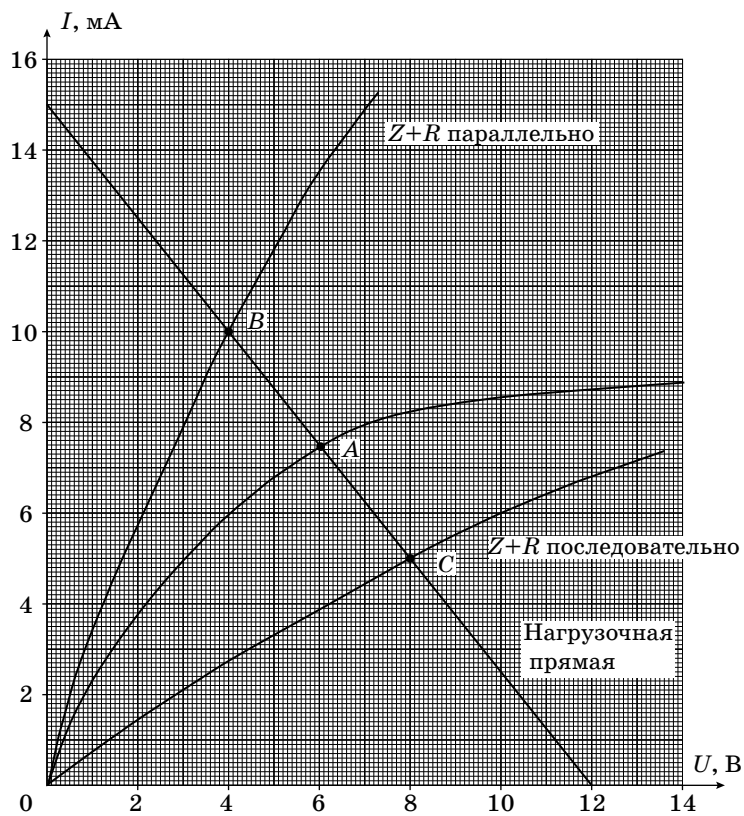
Вольтамперная характеристика участка цепи, содержащего соединённые параллельно нелинейный элемент Z и резистор R , имеет вид, представленный на рисунке (зависимость 1, её можно построить, учитывая, что при параллельном соединении двух элементов общим для них является напряжение, а сила тока через участок цепи равна сумме сил токов через каждый элемент). Показания омметра при этом $R_1 = U_1/I_1 = 0,4$ кОм, что соответствует силе тока $I_1 = 10$ мА и напряжению $U_1 = 4$ В на участке цепи (точка B на рисунке).

Так как омметр содержит источник постоянного напряжения и сопротивление, то для него можно построить нагрузочную прямую (см. рисунок), которая должна пройти через точки A и B и задается уравнением:

$$I = -\frac{U}{R} + \frac{U_0}{R}.$$

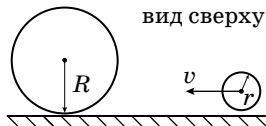
По точкам пересечения нагрузочной прямой с осями координат определяем напряжение источника $U_0 = 12$ В (при $I = 0$) и сопротивление $r = U_0/I = 0,8$ кОм (при $U = 0$).

Вольтамперная характеристика участка цепи, содержащего соединённые последовательно нелинейный элемент Z и резистор R , имеет вид, представленный на рисунке (зависимость 2 можно построить, учитывая, что при последовательном соединении двух элементов общей для них является сила тока, а напряжение на участке цепи равно сумме напряжений на каждом элементе). Показания омметра можно найти по координатам точки пересечения C нагрузочной прямой и кривой 2: $R_2 = U_2/I_2 = 1,6$ кОм.



10 КЛАСС**10.1. Шайбы и стенка**

Две шайбы находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Малая шайба радиуса r движется со скоростью v вдоль вертикальной стенки при малом зазоре с ней.



Большая шайба радиуса $R = 7r$ касается стенки. Какую скорость u приобретёт большая шайба после всех столкновений, если массы шайб одинаковы? Трения в системе нет, столкновения шайб друг с другом и со стенкой абсолютно упругие.

10.2. Автомобиль на конвейере

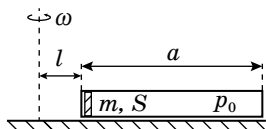
Автомобиль движется по горизонтальному неподвижному конвейеру со скоростью $v_0 = 20$ м/с в безветренную погоду. При этом половина мощности двигателя затрачивается на преодоление сопротивления воздуха, другая половина – на преодоление трения качения.

1. Навстречу автомобилю подул ветер со скоростью $v_0 = 20$ м/с (относительно земли). С какой установившейся скоростью v_1 относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась, а конвейер неподвижен?
2. В некоторый момент ветер утих, а конвейер стал двигаться с постоянной скоростью $v_0 = 20$ м/с в сторону, противоположную движению автомобиля. С какой установившейся скоростью v_2 относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась?

Примечание1: сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату относительной скорости, сила трения качения постоянна.

Примечание2: во всех случаях проскальзывания колес не возникает.

Примечание3: уравнение третьей степени можно решить методом подбора.

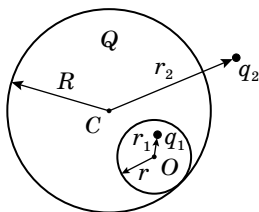


10.3. Трубка на центрифуге

На центрифуге, которая может вращаться только вокруг вертикальной оси, закреплён в горизонтальном положении герметичный легкий цилиндр. Ось цилиндра проходит через ось вращения. Внутри цилиндра находится тонкий поршень, который может перемещаться без трения. Цилиндр заполнен идеальным газом, давлением которого поршень прижат к торцу цилиндра, ближнему к оси вращения. Длина цилиндра равна $a = 0,5$ м, площадь поршня $S = 5$ см², его масса $m = 10$ г, давление газа в цилиндре $p_0 = 1,0$ кПа. Расстояние от оси вращения до ближнего торца цилиндра $l = 0,1$ м. Центрифуга начинает вращаться, причём угловая скорость вращения ω очень медленно увеличивается. Температура газа поддерживается постоянной.

Примечание: считайте, что в ходе эксперимента воздух остаётся однородным.

1. При каком значении ω_1 угловой скорости начальное положение равновесия поршня перестанет быть устойчивым?
2. На каком расстоянии x_1 от начального положения установится поршень при неизменной угловой скорости ω_1 ?
3. Теперь частоту вращения начали медленно уменьшать. При каком значении ω_2 поршень вернётся в исходное положение?



10.4. Заряженный шар (классика)

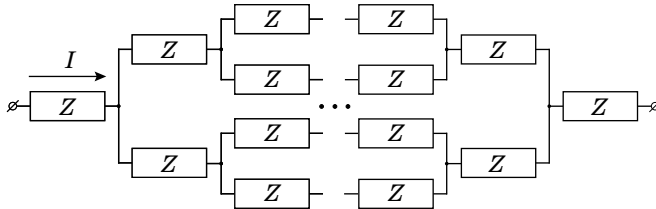
Проводящий шар радиусом R имеет сферическую полость радиусом r , касающуюся наружной поверхности шара. Заряд шара равен Q . В полости, на расстоянии r_1 от ее центра, находится точечный заряд q_1 . Вне шара, на расстоянии r_2 от его центра, находится точечный заряд q_2 .

1. Найдите потенциал $\varphi_{\text{ш}}$ шара.
2. Найдите потенциал φ_0 в центре O полости.

Потенциал бесконечно удаленных точек примите равным нулю.

10.5. Нелинейность

Нелинейный элемент Z имеет вольтамперную характеристику $I_Z = \alpha U_Z^2$, где $\alpha = 0,07 \text{ А/В}^2$. Получите формулу зависимости силы тока I от напряжения в цепи, составленной из бесконечного числа нелинейных элементов Z .

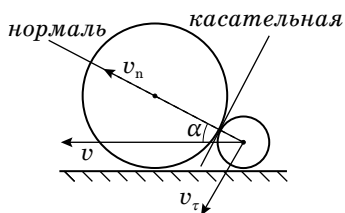


РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10.1. (Воробьев И.) 1. *Общее рассмотрение*

Сначала столкнутся шайбы. После их столкновения большая шайба станет удаляться от стенки, меньшая полетит к стенке и отскочит от неё. Так как зазор со стенкой мал, то столкновение с ней произойдёт сразу после первого и расположение шайб можно считать неизменившимся. Если скорость меньшей шайбы после отскока окажется такова, что она догонит большую, то произойдёт ещё одно столкновение шайб. Чтобы понять, возможны ли дальнейшие столкновения, найдем скорости после упомянутых выше столкновений.

2. *Первый контакт шайб*



а) Через точку контакта шайб при ударе проведём касательную и нормаль через центры шайб. Нормаль образует угол α со стенкой и с направлением скорости v . Находим, что $\sin\alpha = (R - r)/(R + r) = 3/4$.

б) Проекция скорости v на нормаль $v_n = v\cos\alpha$, а на касательную $v_\tau = v\sin\alpha$.

3. *Скорости после первого столкновения*

а) Пусть скорости шайб после 1-го удара v_1 и u_1 . Так как трения нет, то силы при столкновении направлены по нормали, и проекции на касательную у шайб не изменятся $u_{1\tau} = 0$; $v_{1\tau} = v_\tau$.

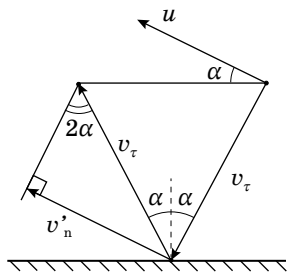
б) Применяя законы сохранения энергии и импульса для упругого столкновения тел равной массы, получим нормальные составляющие скоростей шайб после удара $u_{1n} = v_n$; $v_{1n} = 0$.

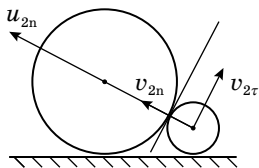
4. *Отражение от стенки*

а) Скорость меньшей шайбы после первого столкновения равна v_τ и образует угол α с перпендикуляром к стенке, после упругого отражения от стенки она сохранит свою величину и будет направлена под углом 2α к касательной (угол падения равен углу отражения)

б) При $v_\tau \sin 2\alpha > u_{1n}$ меньшая шайба догонит большую. Это произойдет при:

$\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha > \cos\alpha$. И $\sin^2\alpha > 1/2$, что при данных r и R заведомо выполнено.





5. Второе столкновение шайб

а) По аналогии с пунктом 3, нормальные составляющие скоростей шайб после второго столкновения $v_{2n} = u_{1n} = v_n$; $u_{2n} = v'_n = v_\tau \sin 2\alpha$, а касательные составляющие не изменились. Теперь $u_{2n} > v_{2n}$.

б) После второго удара шайбы удаляются от стенки и друг от друга, столкновений больше не будет.

в) После всех столкновений скорость большой шайбы $u = u_{2n} = v_\tau \sin 2\alpha = 2v \sin^2 \alpha \cos \alpha = (9\sqrt{7}/32)v \approx 0,74v$.

10.2. (Петров В.). Сила трения F_B между автомобилем и воздухом и сила трения качения F_K уравниваются силой трения F_T между колесами и дорогой. Момент силы трения M равен по модулю моменту, развиваемому двигателем машины:

$$M = F_T r = F_B r + F_K r, \text{ где } r - \text{ радиус колес машины.}$$

Мощность, развиваемая двигателем:

$$P = M\omega = M \frac{v_{\text{отн}}}{r} = (F_B + F_K) v_{\text{отн}}$$

Здесь $v_{\text{отн}}$ – скорость движения автомобиля относительно конвейера, ω – угловая скорость вращения колёс.

По условию $F_B = kv_B^2$, где v_B – скорость движения воздуха относительно автомобиля.

В случае неподвижного конвейера и отсутствия ветра:

$$\frac{P}{2} = kv_0^3 = F_K v_0 \tag{0}$$

Отсюда:

$$k = \frac{P}{2v_0^3}$$

$$F_K = \frac{P}{2v_0}$$

В случае неподвижного конвейера и дующего навстречу ветра:

$$P = (k(v_1 + v_0)^2 + F_K)v_1 \tag{1}$$

$$P = \left(\frac{P}{2v_0^3}(v_1 + v_0)^2 + \frac{P}{2v_0} \right) v_1$$

$$\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^3 + 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right) - 2 = 0$$

$$v_1 \approx 0,575v_0 \approx 11,5 \text{ м/с}$$

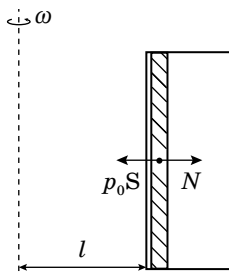
В случае движущегося конвейера:

$$P = (kv_2^2 + F_K)(v_0 + v_2) \tag{2}$$

$$P = \left(\frac{Pv_2^2}{2v_0^3} + \frac{P}{2v_0} \right) (v_0 + v_2)$$

$$\left(\frac{v_2}{v_0} \right)^3 + \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_0} \right) - 1 = 0$$

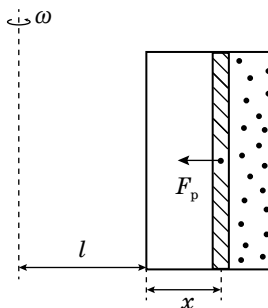
Решив численно это уравнение, получим $v_2 \approx 0,544v_0 \approx 10,9$ м/с.



10.3. (Аполонский А.) **1.** Найдём силу реакции N ближней к оси вращения стенки цилиндра, действующую на поршень в исходном положении. По II закону Ньютона: $m\omega^2 l = p_0 S - N$.

По мере увеличения ω сила $N = p_0 S - m\omega^2 l$ уменьшается. Отрыв от стенки может произойти, когда N станет равной нулю, то есть $p_0 S - m\omega^2 l = 0$, отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 S}{ml}} = \omega_0.$$



2. При постоянной температуре для идеального газа выполняется следующее соотношение: $pV = p_0 Sa = \text{const}$. Пусть x – смещение поршня по отношению к его исходному положению, тогда $V = S(a - x)$. Газ действует на поршень с силой, равной $F_p = pS = \frac{a}{a - x} p_0 S$.

Тогда: $m\omega^2(l + x) = \frac{a}{a - x} p_0 S$ или

$$x^2 - x(a - l) + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) al = 0.$$

Это квадратное уравнение определяет положение равновесия поршня при некоторой угловой скорости вращения ω .

При $\omega = \omega_0$ одно из положений равновесия $x_0 = 0$, а второе – $x_1 = a - l$.

x_0 соответствует неустойчивому положению равновесия, так как при $x_0 < x < x_1$:

$$m\omega_0^2(l + x) > \frac{a}{a - x} p_0 S.$$

Это означает, что при небольшом смещении поршня от положения $x_0 = 0$ сила давления газа не сможет удержать поршень. При $\omega_1 = \omega_0 = 22,4$ с⁻¹ его начальное положение равновесия неустойчиво и поршень перейдет в устойчивое положение $x_1 = a - l = 0,4$ м.

3. При медленном уменьшении угловой скорости вращения при некотором значении $\omega = \omega_2$ корни квадратного уравнения совпадают. В результате, положение равновесия поршня при смещении влево оказывается неустойчивым, и поршень возвращается в исходное положение $x_0 = 0$.

Найдем ω_2 , приравняв дискриминант к нулю:

$$D = (a - l)^2 - 4al \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} - 1 \right) = 0.$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{2\sqrt{al}}{a+l} \omega_0 = 16,7 \text{ с}^{-1}.$$

10.4. (Чивилев В.) В материале шара поля нет, так как он проводящий. Окружим полость некоторой поверхностью, поток вектора \vec{E} через неё равен нулю, поэтому сумма зарядов, окружённых ей, (т. е. q_1 и индуцированного заряда на стенке полости) по теореме Гаусса равна нулю. Значит, индуцированный заряд на стенке полости равен $-q_1$. Так как объёмных зарядов в проводнике нет, а суммарный заряд шара Q , заряд на поверхности шара $Q + q_1$.

Заряды внутри и на стенке полости распределены так, что не создают поля снаружи от полости. Значит, полость вместе с зарядом q_1 и индуцированными зарядами на её стенке можно удалить, при этом потенциалы точек вне полости (в том числе и потенциал шара) не изменится. Мысленно проделав это, найдём потенциал шара как потенциал его центра (потенциалы всех точек проводника одинаковы). Он создаётся только зарядом на поверхности $Q + q_1$ и зарядом q_2 .

Разбивая поверхность шара на малые участки с зарядами ΔQ_i , получим, что поверхностный заряд создаёт в центре потенциал:

$$\varphi_1 = \sum_i \frac{k\Delta Q_i}{R} = \frac{k}{R} \sum_i \Delta Q_i = \frac{k(Q + q_1)}{R}.$$

Таким образом, потенциал шара:

$$\varphi_{\text{ш}} = k \left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} \right).$$

Рассмотрим разность потенциалов φ_0 в центре полости и φ_A в некоторой точке A на её стенке. Заряд q_1 и заряд $-q_1$ на стенке полости (вклад которого в φ_0 рассчитывается аналогично φ_C , не зависит от распределения заряда по стенке и равен $k(-q_1)/r$) создают потенциалы:

$$\varphi'_0 = \frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r} \quad \text{— в центре полости;}$$

$$\varphi'_A = 0 \quad \text{— в точке А.}$$

Заряд на поверхности шара экранирует поле q_2 , т. е. эти заряды не создают поля внутри шара, а значит, не влияют на разность потенциалов $\varphi_0 - \varphi_A$, где $\varphi_A = \varphi_{\text{ш}}$. Таким образом:

$$\varphi_0 - \varphi_A = \varphi'_0 - \varphi'_A = \frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r} \quad ;$$

$$\varphi_0 = k \left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} + q_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \right).$$

10.5. (Киреев А.) Так как все элементы одинаковы, токи в каждом узле будут делиться поровну, как показано на рисунке.

Тогда напряжение на элементах:

$U_1 = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}$; $U_2 = \sqrt{\frac{I}{2\alpha}}$; $U_3 = \sqrt{\frac{I}{4\alpha}}$ и т. д., где I — общая сила тока в цепи.

Напряжение, приложенное к цепи: $U = 2(U_1 + U_2 + U_3 + \dots)$.

$$(U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = \sqrt{\frac{I}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right).$$

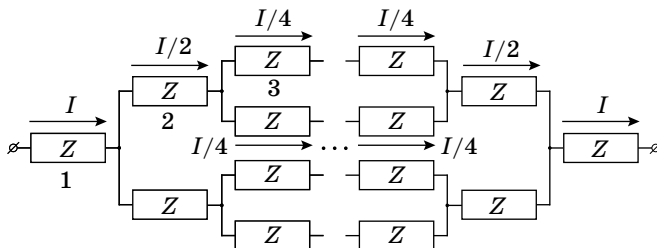
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$U = 2\sqrt{\frac{I}{\alpha}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$I = \alpha U^2 \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{8} = \gamma U^2, \text{ где}$$

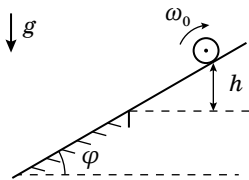
$$\gamma = \alpha \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{8} = 1,5 \text{ мА/В}^2.$$



11 КЛАСС

11.1. Цилиндр на наклонной плоскости

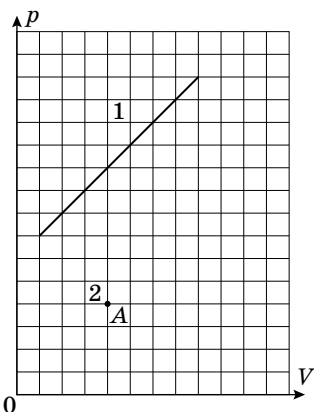
Верхняя часть наклонной плоскости гладкая, нижняя – шероховатая. На верхнюю часть кладут тонкостенную цилиндрическую трубу, вращающуюся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 , и отпускают. В начальный момент ось цилиндра неподвижна, а линия касания трубы с плоскостью находится на высоте $h = 10$ см над границей раздела гладкого и шероховатого участков. Коэффициент трения между трубой и шероховатой поверхностью $\mu = 0,1$. Радиус цилиндра равен $R = 5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



1. Считайте, что ω_0 велико. При каком угле $\varphi = \varphi_m$ труба вернется в начальное положение за минимальное время.
2. Найдите это минимальное время t_{\min} .
3. Пусть $\varphi = \varphi_m$. При каких ω_0 труба вернется в начальное положение?

11.2. Совпадающие теплоемкости

В архиве лорда Кельвина нашли цилиндр с одним моле идеального одноатомного газа. Лорд Кельвин проводил с ним два процесса и изобразил их на pV -диаграмме. Чернила, разумеется, выцвели. От первого процесса уцелела часть графика отрезок прямой, а от графика второго процесса, как обычно, сохранилась единственная точка A . Из поясняющих записей следовало, что в этих процессах при равных температурах теплоемкости совпадали. Восстановите график зависимости давления p от объема V для второго процесса.



11.3. В пузыре

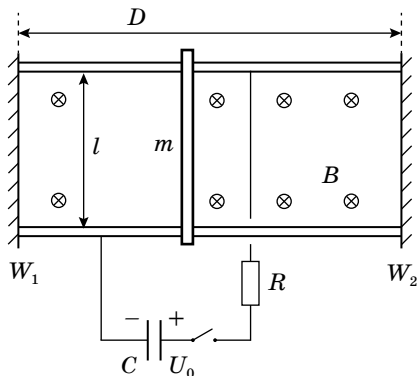
В далёком космосе есть планета, состоящая полностью из воды. Известно, что глубоководные обитатели изнутри могут обозревать все пространство вокруг, тогда и только тогда, когда находятся на расстоянии не более, чем $x = 3000$ км от центра планеты. Местные жители решили запустить спутник? С какой скоростью он должен двигаться на самой низкой возможной орбите? Показатель преломления воды $n = 4/3$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг². Планета не вращается вокруг своей оси, волн на ее поверхности не бывает, воду можно считать несжимаемой.

11.4. Столкновения в магнитном поле

По двум горизонтальным проводящим рельсам может скользить без трения металлическая перемычка массой m (см. рис). Расстояние между рельсами l . Движение перемычки ограничено двумя непроводящими жесткими вертикальными стенками W_1 и W_2 , находящимися на расстоянии D друг от друга. К рельсам через ключ K последовательно подключены заряженный до напряжения U_0 конденсатор емкости C и резистор сопротивления R . Перпендикулярно плоскости рельсов включено вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B , такое что $m > B^2 l^2 C$ и $DBl \gg RCU_0$. В момент, когда ключ замкнули, перемычка покоилась посередине между стенками. Определите:

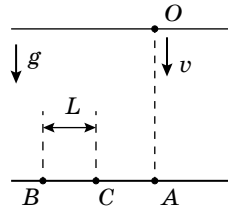
1. с какой стенкой произойдет первое столкновение перемычки;
2. скорость v_1 перед первым столкновением;
3. скорость v_n перед n -ым столкновением.

Все столкновения перемычки со стенками абсолютно упругие.



11.5. Уронили в речку шарик

Из точки O на поверхности воды в реку бросают одинаковые маленькие металлические шарики (см. рис). Отпущенный без начальной скорости шарик упал на дно в точке B , а шарик, запущенный вертикально вниз с известной скоростью v в точку C . Расстояние $BC = L$. Найдите горизонтальную составляющую скорости второго шарика при ударе о дно u_x . Считайте, что при движении на шарик со стороны воды действует сила, прямо пропорциональная скорости движения шарика относительно воды и направленная против этой скорости. Скорость течения не зависит от глубины, а дно горизонтально. Силу Архимеда не учитывать.



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11.1. (Дидин М.) 1. На цилиндр действуют силы тяжести, реакции опоры и трения. Поскольку цилиндр вернулся в исходное положение, сила трения направлена вверх вдоль наклонной плоскости. Это значит, что цилиндр вращается по часовой стрелке. Сначала цилиндр начнёт скользить вниз с ускорением $a_1 = g \sin \varphi$. На границе с шероховатой поверхностью скорость цилиндра достигнет $v_0 = \sqrt{2gh}$. При дальнейшем движении цилиндра вниз не него начнёт действовать сила трения $F_{\text{тр}} = \mu g \cos \varphi$, направленная вверх. (Если на шероховатой поверхности цилиндр перестанет вращаться по часовой стрелке, он покатится вниз, т.е. не вернётся в исходную точку). При качении цилиндра вверх сила трения не превосходит $\mu g \cos \varphi$, а ускорение a_2 при подъёме не больше, чем ускорение при спуске. Значит, скорость на границе не больше v_0 , и в точке старта цилиндр остановится (прекратит движение вверх, но может продолжать вращаться). Ускорение цилиндра на шероховатой поверхности постоянно и равно $a_2 = g(\mu \cos \varphi - \sin \varphi)$. Время подъёма:

$$t = \frac{2v_0}{g} \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\mu \cos \varphi - \sin \varphi} \right)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\mu \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{\mu \cos \varphi}{\sin \varphi (\mu \cos \varphi - \sin \varphi)}$$

$$f_1(\varphi) = \text{tg} \varphi (\mu \cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$\frac{df_1}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) - \text{tg} \varphi (\mu \sin \varphi + \cos \varphi) = 0$$

$$\mu \cos^2 \varphi = \sin \varphi \left(\frac{1}{\cos \varphi} + \cos \varphi \right)$$

$$\sin \varphi = \mu \frac{\cos^3 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} < \mu \cos^3 \varphi < \mu$$

Так как $\mu = 0,1$, $\varphi \ll 1$, тогда $\cos \varphi = 1$ и $\sin \varphi = \varphi = 0,05$.

Так как $h = 0,1$ м, $v_0 = \sqrt{2gh} = 1,4$ м/с.

Получаем, что $t_{\text{min}} = 11,3$ с. Запишем уравнение движения и основное уравнение динамики относительно центра цилиндра:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha \\ mr^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu mgr \cos \alpha \end{cases}$$

Разделим одно уравнение на другое:

$$\frac{dv}{rd\omega} = \frac{\mu \cos \varphi - \sin \varphi}{-\mu \cos \varphi} = \frac{\mu - \frac{\mu}{2}}{-\mu} = -\frac{1}{2}$$

Изменение скорости между двумя последовательными прохождениями линии раздела наклонной плоскости $\Delta v = 2v_0$.

При минимальной возможной угловой скорости проскальзывание прекращается ровно на линии раздела плоскости:

$$\Delta\omega = \frac{v_0}{R} - \omega_0$$

Откуда получаем, что

$$\omega_0 = \frac{5v_0}{R} = \frac{5\sqrt{2gh}}{R} = 140 \text{ с}^{-1}$$

11.2. (Воробьев И.) Способ 1

Рассмотрим преобразование плоскости pV состоящее из сжатия в k раз по оси p и такого же растяжения по оси V . При этом преобразовании сохраняются площади всех фигур, а поэтому сохраняются температуры ($T = pV/R$), работы ($dA = pdV$) и теплоемкости ($C = dQ/dT = dU/dT + dA$). По точке A определяем $k = 2$ и строим график второго процесса: отрезок из точки (2; 3,5) в точку (16; 7). Вне этого интервала восстановить второй процесс невозможно.

Способ 2

Из первого начала термодинамики имеем для теплоёмкости: $C = dQ/dT = dU/dT + pdV/dT$.

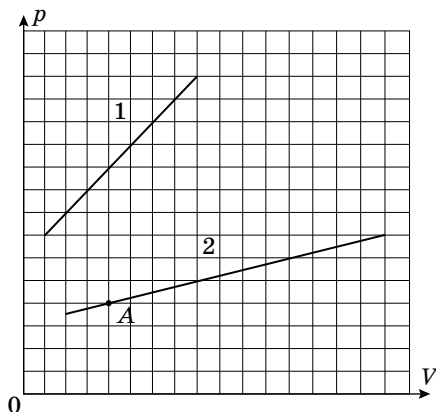
Так как внутренняя энергия $U = \nu C_V T$, а давление $p = \nu RT/V$, то $C = \nu C_V + (\nu RT/V)dV/dT$.

Пусть $V_1(T)$ и $V_2(T)$ объёмы при температуре T для процессов 1 и 2. Из совпадения теплоёмкостей имеем $dV_2/V_2 = dV_1/V_1$ при одинаковых T и dT , а тогда $(V_2 + dV_2)/(V_1 + dV_1) = V_2/V_1$. Отношение объёмов при температуре $T + dT$ равно отношению объёмов при температуре T , а то есть отношение одинаково при любых температурах и $V_2(T) = kV_1(T)$, где k константа.

При одинаковой температуре $p_2 V_2 = p_1 V_1$, тогда отношение давлений при одинаковой температуре $p_2/p_1 = 1/k$.

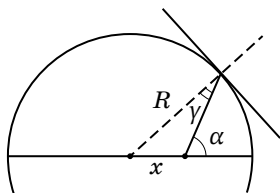
В точке A $p_A V_A = 16$ условных единиц (одна клеточка по горизонтали единица объёма, а по вертикали – единица давления). При той же температуре для первого процесса тогда $p_1 V_1 = 16$, зависимость же давления от объёма, заданная отрезком прямой, $p_1 = 6 + V_1$. Откуда получим уравнение для V_1 , отвечающего температуре в точке A : $(6 + V_1)V_1 = 16$. Выбираем положительный корень $V_1 = 2$. Откуда находим $k = V_A/V_1 = 2$.

Наклон графика второго процесса $dp_2/dV_2 = (dp_1/dV_1)k^2 = 0,25$ оказывается постоянным. Из принадлежности графика точке A получим зависимость давления от объёма для второго процесса: $p_2 = 3 + V_2/4$ и соответственно прямолинейный график.



Для первого процесса за пределами уцелевшего отрезка возможно иная зависимость давления от объёма. Тогда график второго процесса однозначно восстановим лишь в пределах, отвечающих начальной $V_1 = 1$; $p_1 = 7$ и конечной точкам $V_1 = 8$; $p_1 = 14$ уцелевшего отрезка. По найденному выше коэффициенту $k = 2$ для графика второго процесса в начальной точке имеем $V_2 = 2$; $p_2 = 3,5$, а в конечной $V_2 = 16$; $p_2 = 7$. На рисунке выше приведён восстановленный в этих пределах график второго процесса.

11.3. (Кутелев К.) Видимость для наблюдателя, находящегося внутри планеты ограничена эффектом полного отражения. Отметим, что наблюдатель может не видеть только близкие к планете объекты.



Угол падения на поверхность планеты γ можно связать с углом α с помощью теоремы синусов:

$$\frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\sin \gamma}.$$

Для данного положения x максимальный угол падения достигается при $\alpha = 90^\circ$: $\sin \gamma_{\max} = \frac{x}{R}$.

Полное внутреннее отражение появится на дальности x , для которой выполнится условие $n \sin(\gamma_{\max}) = 1$.

Это позволяет найти радиус планеты $R = xn$.

Спутник массой m движется по самой низкой орбите радиуса R с первой космической скоростью:

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \quad v = \sqrt{G \frac{M}{R}}.$$

Подставляя радиус, получаем:

$$v = xn\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho} = 2,1 \text{ км/с.}$$

11.4. (Аполонский А.) При движении перемычки в магнитном поле между ее сторонами, скользящими по направляющим возникает ЭДС равная $\varepsilon_n = Bvl$, где v – скорость перемычки. Изменение скорости перемычки происходит из-за воздействия на нее силы Ампера равной $F_a = IBl$ при протекающем через нее токе I . Тот же ток заряжает или разряжает конденсатор (в зависимости от направления движения перемычки).

Второй закон Ньютона для перемычки:

$$ma = IBl$$

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = IBl$$

$m\Delta v = I\Delta tBl = -\Delta qBl$, где Δq – изменение заряда конденсатора.

При разгоне перемычки от нулевой скорости до v_1 :

$$\Delta v = v_1 = \frac{-\Delta qBl}{m} = \frac{(CU_0 - q)Bl}{m}$$

$$q = CBv_1l$$

Тогда:

$$v_1 = \frac{C(U_0 - Bv_1l)Bl}{m} = \frac{CU_0Bl}{m\left(1 + \frac{B^2l^2C}{m}\right)}$$

Рассмотрим n -ое столкновение со стенкой. Перемычка налетает со скоростью v_n . Заряд на конденсаторе при этом равен $q_n = CBv_nl$.

После столкновения перемычка движется в противоположном направлении с той же скоростью v_n , соответствующей теперь противоположному знаку заряда конденсатора.

Изменение скорости перемычки в процессе перезарядки:

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(q_n + q_{n+1})Bl}{m}.$$

Здесь v_{n+1} и q_{n+1} – модули скорости и заряда конденсатора при установлении соответствия между ЭДС индукции и напряжением на конденсаторе после столкновения. При этом учтено, что знак заряда конденсатора изменился и $\Delta q = q_n + q_{n+1}$.

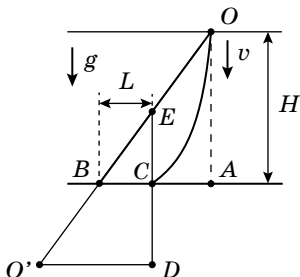
$$v_n - v_{n+1} = \frac{(v_n + v_{n+1})B^2l^2C}{m}$$

Отсюда:

$$v_{n+1} = v_n \frac{1 - \frac{B^2 l^2 C}{m}}{1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}}$$

После n столкновений скорость равна:

$$v_{n+1} = v_1 \left(\frac{1 - \frac{B^2 l^2 C}{m}}{1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}} \right)^n = \frac{CU_0 Bl}{m} \frac{\left(1 - \frac{B^2 l^2 C}{m}\right)^n}{\left(1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}\right)^{n+1}}$$



11.5. (Аполонский А.) Способ 1

Перейдем в инерциальную систему отсчета,двигающуюся со скоростью (w_x, w_y) , с которой двигался бы шарик через большое время (установившаяся скорость, если бы не дно). Поместим начало этой системы в точку O в момент бросания. В этой системе отсчета река не движется вдоль оси OX , а движение

реки вдоль оси OY компенсирует силу тяжести, поэтому полная сила (в данной CO), действующая на камешек, прямо пропорциональна скорости: $\vec{a} = -k\vec{u}$, где u — скорость шарика в этой CO . Поэтому движение в ней происходит по прямой, а изменение скорости пропорционально смещению в этой же системе отсчета с тем же коэффициентом. Значение коэффициента k находится из начальных условий вертикальной компонента ускорения при бросании без начальной скорости $g = kw_y$. В момент падения второго шарика в точку C , начало отсчета находится в точке O' (см. рис). Рассмотрим точку E , в которой будет первый шарик через то время, за которое второй шарик падает на дно. Она находится над точкой C , так как проекции начальных скоростей на OX одинаковы. $\triangle EBC \propto \triangle EO'D$, поэтому $O'D = Lw_y/v$. Горизонтальная скорость в момент падения:

$$w = k \cdot O'D = \frac{g}{w_y} \frac{Lw_y}{v} = \frac{gL}{v}.$$

Способ 2

Ось OX сонаправлена со скоростью реки, а ось OY направлена вертикально вниз.

Введем обозначения w_x — скорость течения реки, $w_y = g/k$. Тогда:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -kv_x + kw_x \\ \dot{v}_y = -kv_y + kw_y \end{cases}$$

Уравнения без индекса выполнены для обеих проекций:

$$\frac{dv}{v-w} = -kdt, \text{ следовательно}$$

$$v = w + (v_0 - w)e^{-kt} = w(1 - e^{-kt}) + v_0e^{-kt}$$

Введем обозначение:

$$f(t) = \int_0^t (1 - e^{-kt'}) dt'.$$

Тогда смещение по оси OX равно:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \int_0^{t_1} v_x dt = w_x f(t_1) \\ \Delta y_1 &= \int_0^{t_1} v_y dt = w_y f(t_1) = H, \end{aligned}$$

где H – глубина реки.

Во втором случае время падения равно t_2 :

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \int_0^{t_2} v_x dt = w_x f(t_2) = \Delta x_1 - L \\ \Delta y_2 &= \int_0^{t_2} v_y dt = w_y f(t_2) + v \int_0^{t_2} e^{-kt} dt = w_y f(t_2) + \frac{v}{k}(1 - e^{-kt_2}) = H. \end{aligned}$$

Вычитая попарно уравнения, записанные для разных осей получаем:

$$\begin{cases} w_x(f(t_1) - f(t_2)) = L \\ w_y(f(t_1) - f(t_2)) - \frac{v}{k}(1 - e^{-kt_2}) = 0 \end{cases}$$

Замечая, что искомая скорость w равна:

$$w = w_x(1 - e^{-kt_2}) = \frac{kLw_y}{v} = \frac{gL}{v}.$$