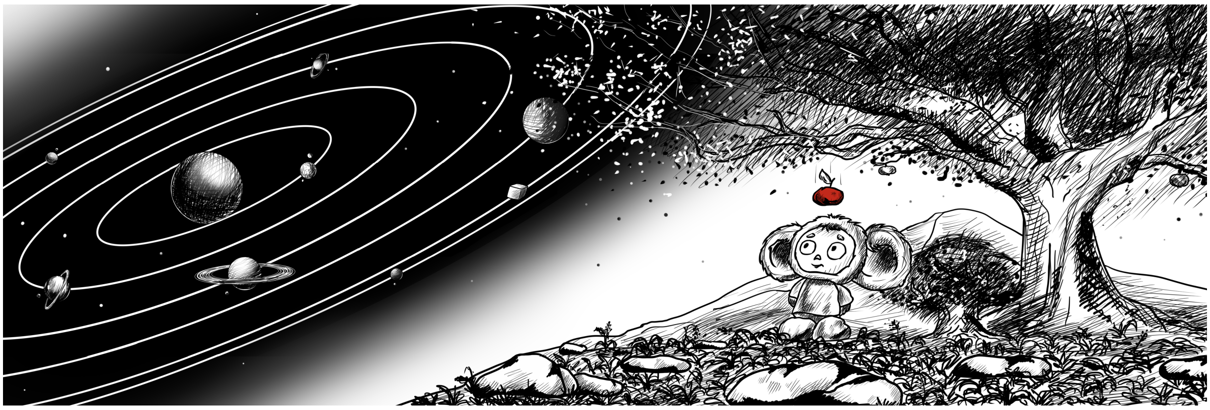


Отделение физики
vk.com/4mipt

Условия и решения олимпиады

Авторы условий:

7 класс
1. Колымагина Е.
2. Цыбиков К.
3. Цыганков Г.
4. Свинцицкий А.

8 класс
1. Колымагина Е.
2. Цыбиков К.
3. Цыганков Г.
4. Коренев Д.

9 класс
1. Щавлев В.
2. Бейлин Н.
3. Коренев Д.
4. Баринов Л.
5. Колдунов Л.

10 класс
1. Щавлев В.
2. Бейлин Н.
3. Пауков М.
4. Колдунов Л.
5. Колдунов Л.

Рисунки — Поздняк Я., Баринов Л., Еськин М.
Набор и вёрстка — Косяк С., помогал Свинцицкий А.

Долгопрудный, 2023 г.

Содержание

Олимпиада 7 класс **2**

Решения 7 класс **4**

Критерии 7 класс **10**

Олимпиада 8 класс **12**

Решения 8 класс **14**

Критерии 8 класс **15**

Олимпиада 9 класс **16**

Решения 9 класс **18**

Критерии 9 класс **25**

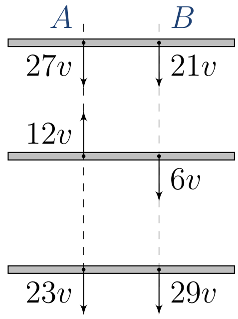
Олимпиада 10 класс **26**

Решения 10 класс **28**

Критерии 10 класс **31**

Олимпиада 7 класс

7.1. Экспериментатор Глюк проводил опыты с незакрепленными рейками, измеряя скорости их движения в точках A и B (делят рейки на три равные части), которые он вынес на рисунки. Однако он забыл, что между рейками были прокинуты вертикальные нити. К сожалению Глюк забыл и количество этих нитей и их расположение. Между какими из реек могли быть прокинуты эти нити и на каком расстоянии от левого края реек? Длины реек одинаковы и равны 36 м. Длина нитей равна расстоянию между рейками.



7.2. Ученикам ЛОШ наскучили обычные праки и они решили начать изучать эффект Зеебека. Для этого они взяли две однородные проволочки разной длины и плотности, но одинакого сечения, и спаяли их концы (см. рис. 1). Далее будущие ученые нашли однородную палку, массой которой можно пренебречь, и два упора. Палку поставили на упоры так, что расстояния от упоров до ближайших к ним концов палки одинаково и равно a (иными словами, все поставили симметрично). Расстояние между упорами l. Величины l и a заведомо больше длины проволоки. Оказалось, что если проволоку поставить швом ровно над левой опорой и на левый край поставить шарик массы больше m_1 (см. рис. 2а), то палка упадет, а при любой меньшей массе палка будет в состоянии равновесия. А если поставить на правый край шарик массы больше m_2, палка также упадет (см. рис.2б), и также будет в равновесии при любой меньшей массе шарика. Найдите отношение плотности левого однорого куска проволоки к плотности правого однородного куска, если для проволоки одновременно известно:

1. длина её правого однородного куска относится к длине левого как $\frac{1}{n} < 1$;
2. масса одного однородного куска на $\triangle M > 0$ больше, чем другого.

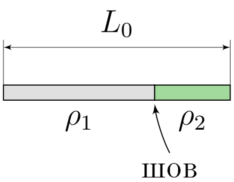


Рис. 1

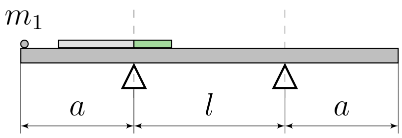


Рис. 2а

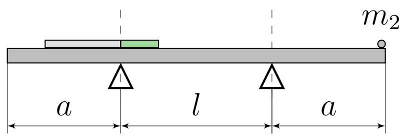
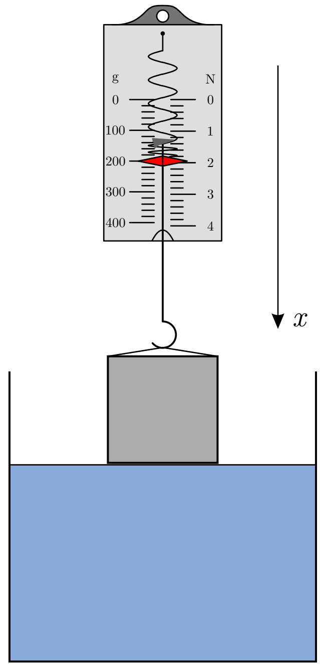


Рис. 2б

7.3. Экспериментатор Лаг взял три сообщающихся сосуда одинаковой высоты, заполненных до середины жидкостью плотностью ρ_0. Их площади поперечного сечения относятся друг к другу как $1:2:4$. Затем он начал последовательно каждое колено заполнять жидкостью плотностью $\rho < \rho_0$ до самой верхушки до тех пор, пока все колена не будут заполнены. После этого он взял другие такие же три сообщающихся сосуда и повторил свои действия, но заполнял колена жидкостью плотностью ρ в другой последовательности. Так он провёл серию экспериментов, перепробовав все возможные варианты последовательности заполнения колен. При какой последовательности заполнения объём слитой жидкости будет максимален? При какой минимален? Найти отношение $V_{\max}/V_{\min}$, если известно, что отношение плотностей $\rho_0/\rho = 17$. *Примечание.* При малых $x \ll 1$ справедливо соотношение $1/(1-x) \approx 1+x$.

7.4. Экспериментатор Глюк решил исследовать закон своего друга Гука. Для этого он взял прямоугольный параллелепипед, в основании которого квадрат со стороной $a = 4$ см, школьный динамометр с жёсткостью пружины $k = 50$ Н/м и сосуд с водой. Стенки сосуда вертикальные. У Гука был план и он его придерживался: сначала он подвесил параллелепипед к динамометру так, что нижняя грань параллелепипеда касалась жидкости. Далее он стал опускать динамометр, держась за его корпус. При этом он снимал зависимость показаний динамометра от его перемещения. Результаты измерений он занёс в таблицу.



x, см	0	1,4	2,7	4,3	5,5	7,0	8,2	10,0	14,0	15,1
F, Н	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,0	2,0

1. Получите зависимость перемещения параллелепипеда y от перемещения корпуса динамометра x и его показаний F.
2. Постройте график зависимости показаний динамометра F от перемещения параллелепипеда y.
3. С помощью графика определите площадь поперечного сечения сосуда S.
4. Определите высоту H и плотность ρ параллелепипеда.
5. Определите максимальное изменение уровня воды в сосуде $\Delta h_{\max}$.

Замечание. В решении необходимо использовать все данные из таблицы. За оценку по одной точке полный балл за задачу не ставится.

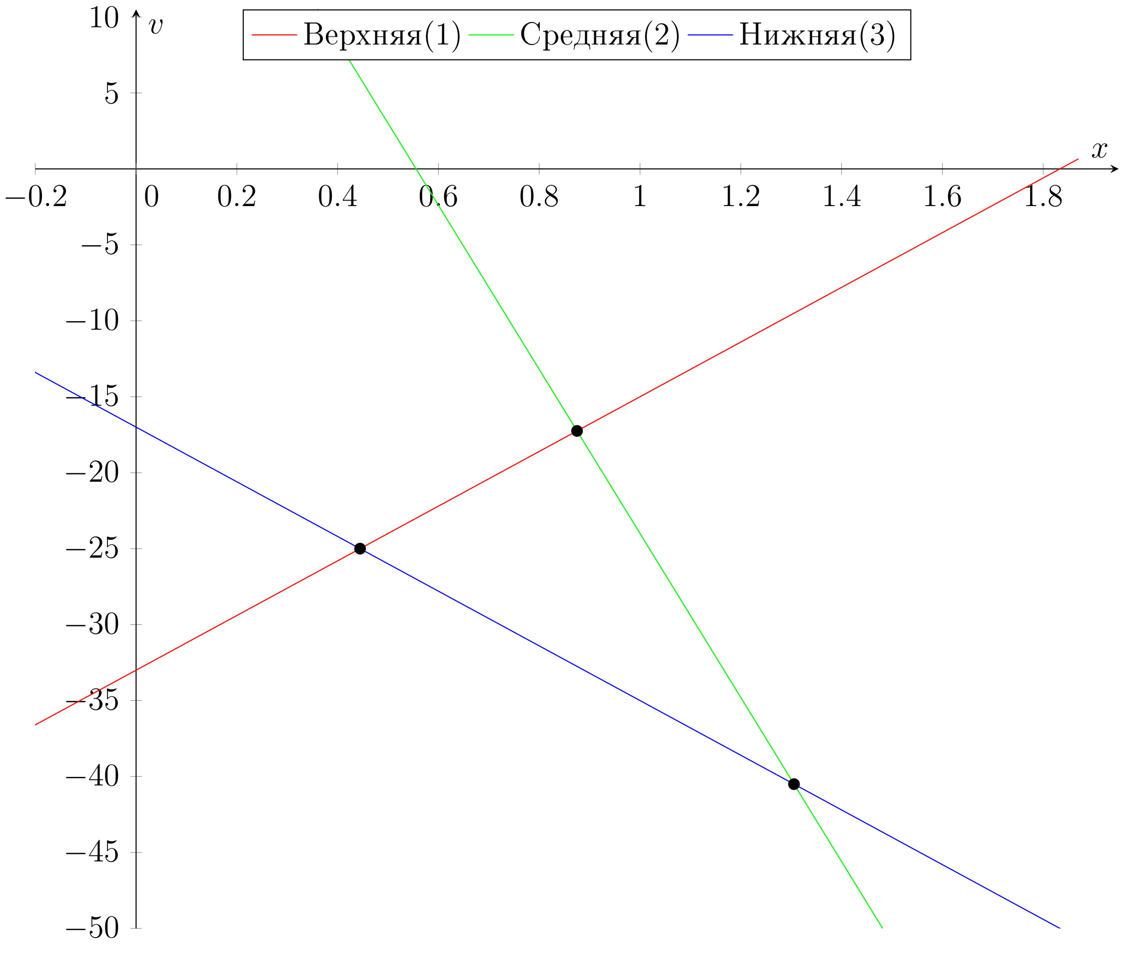
Решения 7 класс

7.1 Так как нити нерастяжимы, то ими можно соединить только те точки реек, которые движутся с одинаковой скоростью или приближаются друг к другу. Найдём такие точки.

Заметим, что указанные скорости направлены перпендикулярно рейкам, поэтому то же будет справедливо и для всех остальных точек (так как это, по сути, жёсткий стержень), а скорости будут зависеть линейно от координаты на рейке. Представим распределение скоростей, проведя прямую через концы отрезков, обозначающих направление скорости и их величину (длина отрезка пропорциональна величине скорости). Построим эти прямые в координатах («расстояние от левого конца рейки», «скорость»).

Напоминание: найти уравнение прямой $y = kx + b$ по двум известным точкам $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ можно, решив следующую систему:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b, \\ y_2 = kx_2 + b, \end{cases} \implies \begin{cases} k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\ b = \dfrac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}. \end{cases}$$



Посчитаем коэффициенты в уравнениях для каждой рейки:

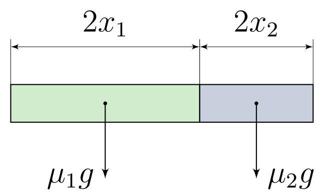
$$k_1 = 18, \qquad b_1 = -33,$$
$$k_2 = -54, \qquad b_2 = 30,$$
$$k_3 = -18, \qquad b_3 = -17.$$

Затем вычислим абсциссы точек их пересечения с $y = 0$ и друг с другом.

$$x_{10} = \frac{11}{6}, \qquad x_{20} = \frac{5}{9}, \qquad x_{30} = -\frac{17}{18},$$
$$x_{12} = \frac{7}{8}, \qquad x_{13} = \frac{4}{9}, \qquad x_{23} = \frac{47}{36}.$$

График достаточно построить схематически. Из него делаем выводы о том, что на первой и второй рейках сближаются точки $l_{12} \in \left[0; \frac{7}{8}\right]$, на первой и третьей — точки $l_{13} \in \left[0; \frac{4}{9}\right]$. Так как абсцисса точки пересечения второй и третьей прямых больше единицы, то все точки третьей рейки удаляются от точек второй. Запишем ответ с учётом того, что полная длина реек равна 36 м. Вертикальными нитями можно соединить 1 и 2 рейки в точках $l_{12} \in [0; 31{,}5]$, 1 и 3 в точках $l_{13} \in [0; 16]$. 2 и 3 рейки соединять нельзя.

7.2 По условию, если на левый край поставить шарик массы больше m_1, то палка упадет, а при любой меньшей массе палка будет в состоянии равновесия. Из этого можно сделать вывод, что в первом состоянии, когда мы поставим шарик массой m_1, сила реакции правой опоры будет равна 0 и суммарный момент сил относительно левой опоры будет равен 0.



Во втором состоянии при массе шарика m_2, сила реакции левой опоры будет равна 0 и суммарный момент сил относительно правой опоры равен 0.

Пусть площадь поперечного сечения проволоки равна S, длина левой части равна $l_1 = 2x_1$, а плотность ρ_1, а правой части: $l_2 = 2x_2$ и ρ_2. Обозначим массу левой части проволоки за μ_1, правой части за μ_2. Тогда $\mu_1 = 2\rho_1 x_1 S$ и $\mu_2 = 2\rho_2 x_2 S$.

Тогда записывая правила моментов относительно левой опоры в первом случае и относительно правой во втором случае, получаем:

$$M_{\text{рез}} = \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + m_1 g a = 0, \tag{1}$$

$$M_{\text{рез}} = \mu_1(l + x_1) + \mu_2(l - x_2) - m_2 g a = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) можно заметить: чтобы палочка переворачивалась равновесно, необходимо, чтобы масса правой части проволоки была больше, чем масса левой части, иначе суммарный момент не сможет обнулиться. Тогда можно записать:

$$\mu_2 = \mu_1 + \Delta M.$$

Вычтем из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{a(m_1+m_2)}{l}. \tag{3}$$

Тогда сразу получаем искомые значения масс:

$$\mu_1 = \frac{a(m_1+m_2)}{2l} - \frac{\Delta M}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{a(m_1+m_2)}{2l} + \frac{\Delta M}{2}. \tag{4}$$

Запишем теперь их отношение:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{2\rho_1 x_1 S}{2\rho_2 x_2 S} = \frac{\rho_1 l_1}{\rho_2 l_2} = \frac{\rho_1}{n\rho_2} = \frac{a(m_1+m_2) - \Delta M l}{a(m_1+m_2) + \Delta M l},$$

откуда и выразим значение для плотностей

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = n \cdot \frac{a(m_1+m_2) - \Delta M l}{a(m_1+m_2) + \Delta M l}.$$

7.3 Решим задачу в общем виде. Будем последовательно вливать жидкость плотностью ρ в сосуды S_1, S_2, S_3.

При первом вливании в сосуд S_1 жидкость с плотностью $\rho_0 = 17\rho$ не выливается. Найдём высоту влитого столба из выражений для закона Паскаля и сохранения объёма жидкости:

$$\begin{cases} p_A - p_0 = \rho g h_1 + \rho_0 (H - h_1) = \rho_0 g h, \\ \dfrac{H}{2}(S_1+S_2+S_3) = (H-h_1)S_1 + h(S_2+S_3), \end{cases} \Longrightarrow h_1 = \frac{\rho_0(S_1+S_2+S_3)H}{2\rho_0(S_1+S_2+S_3) - \rho(S_2+S_3)}.$$

Далее вливаем жидкость в сосуд S_2:

$$\begin{cases} p_B - p_0 = \rho g h_2 + \rho_0 g (H - h_2) = \rho_0 g h_3, \\ \dfrac{H}{2}(S_1+S_2+S_3) = (H-h_2)(S_1+S_2) + h_3 S_3, \end{cases} \Longrightarrow \quad h_2 = \frac{\rho_0(S_1+S_2+S_3)H}{2\rho_0(S_1+S_2+S_3) - \rho S_3}.$$

Объём вылитой жидкости:

$$V^{\text{выл}} = S_1\left(h_1 - \frac{H}{2}\right) + S_2\left(h_2 - \frac{H}{2}\right) = \frac{H}{2}\left(\frac{S_1}{\frac{\alpha S_\Sigma}{S_2+S_3} - 1} + \frac{S_2}{\frac{\alpha S_\Sigma}{S_3} - 1}\right),$$

где $S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$, $\alpha = \rho_0/\rho = 17$. Перепишем полученное выражение в немного другом виде:

$$V^{\text{выл}} = \frac{H}{2}\left(\frac{S_1}{\frac{\alpha S_\Sigma}{S_2+S_3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{S_2+S_3}{\alpha S_\Sigma}} + \frac{S_2}{\frac{\alpha S_\Sigma}{S_3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{S_3}{\alpha S_\Sigma}}\right).$$

Дроби $(S_2+S_3)/(\alpha S_\Sigma)$ и $S_3/(\alpha S_\Sigma)$ на порядок (то есть как минимум в 10 раз) меньше единицы, поэтому можем применить формулу $1/(1-x) \approx 1 + x,\ (x \ll 1)$:

$$\begin{aligned} V^{\text{выл}} &= \frac{H}{2}\left(\frac{S_1}{\frac{\alpha S_\Sigma}{S_2+S_3}} \cdot \left(1 + \frac{S_2+S_3}{\alpha S_\Sigma}\right) + \frac{S_2}{\frac{\alpha S_\Sigma}{S_3}} \cdot \left(1 + \frac{S_3}{\alpha S_\Sigma}\right)\right) = \\ &= \frac{H}{2}\left(\frac{S_1(S_2+S_3)}{\alpha S_\Sigma} + S_1 \cdot \left(\frac{S_2+S_3}{\alpha S_\Sigma}\right)^2 + \frac{S_2 S_3}{\alpha S_\Sigma} + S_2\left(\frac{S_3}{\alpha S_\Sigma}\right)^2\right) = \\ &= \frac{H}{2}\left(\frac{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3}{\alpha S_\Sigma} + S_1 \cdot \left(\frac{S_2+S_3}{\alpha S_\Sigma}\right)^2 + S_2\left(\frac{S_3}{\alpha S_\Sigma}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое (нулевой порядок разложения дроби по x) в скобках не зависит от последовательности наливания, зависимость появляется в квадратичных слагаемых (первый порядок разложения). Для получения максимального объёма значение $4S$ должно быть внутри квадрата, поэтому $S_3 = 4S, S_2 = 2S, S_1 = \ S$. Аналогично, для получения минимума берём обратный порядок. Подставляем величины в *исходное* выражение (а не приближённое!):

$$V^{\text{выл}}_{\min} = \frac{HS(49\alpha - 9)}{(7\alpha - 3)(7\alpha - 1)},$$

$$V^{\text{выл}}_{\max} = \frac{HS(49\alpha - 36)}{(7\alpha - 6)(7\alpha - 4)}.$$

Тогда искомое отношение:

$$\frac{V^{\text{выл}}_{\max}}{V^{\text{выл}}_{\min}} = \frac{(49\alpha - 36)(7\alpha - 3)(7\alpha - 1)}{(49\alpha - 9)(7\alpha - 6)(7\alpha - 4)} \approx 1{,}0188.$$

7.4 Запишем закон Гука:

$$F = k(\Delta y - \Delta x),$$

Где $(\Delta y - \Delta x)$ — изменение длины пружины Если динамометр переедет вниз на x, а груз еще на y, то пружина растянется на $y - x$

$$F = k(y - x) - k(y_0 - x_0).$$

Где, y_0 и x_0 — начальные положения груза и блока. Обозначим $F_0 = k(y_0 - x_0)$, а значит

$$F + F_0 = k(y - x).$$

Из начальных условий

$$F_0 = 4 \text{ Н}.$$

Строим таблицу $F(y)$

x, см	0	1,4	2,7	4,3	5,5	7	8,2	10	14	15,1
F, Н	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3	2,8	2,6	2	2
y, см	0	1,0	1,9	3,1	3,9	5	5,8	7,2	10	11,1

Перейдем к следующему вопросу. Полощадь грузика $S_{\text{гр}} = a^2$, объем вытесненной жидкости при его погружении (S — площадь сосуда, Δh — изменение уровня воды в сосуде) равен

$$S_{\text{гр}} y = (S - S_{\text{гр}}) \cdot \Delta h.$$

Из уравнение равновесия грузика

$$F_a = \rho_{\text{в}} g S_{\text{гр}} (y + \Delta h) = mg - F,$$

откуда

$$F = mg - \rho_{\text{в}} g S_{\text{гр}} \left(y + \frac{y S_{\text{гр}}}{S - S_{\text{гр}}} \right) = mg - \rho_{\text{в}} g S_{\text{гр}} \left(1 + \frac{S_{\text{гр}}}{S - S_{\text{гр}}} \right) \cdot y,$$

где множитель перед y — это угловой коэффициент наклона графика $k = -0{,}2$ Н/м, который мы уже знаем:

$$k = -\rho g S_{\text{гр}} \left(\frac{S}{S - S_{\text{гр}}} \right).$$

Подставляем числа

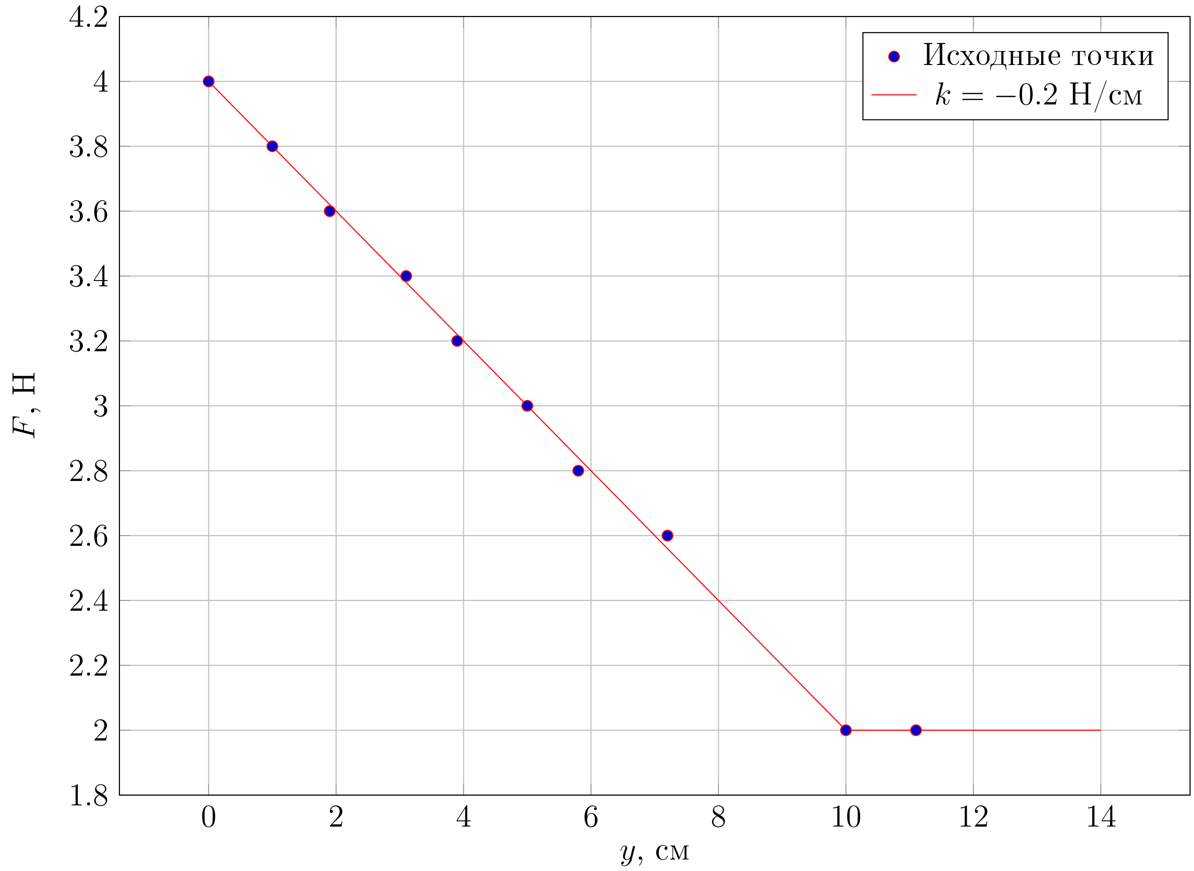
$$20 = 10^3 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{S}{S - 16},$$

откуда и находим площадь дна сосуда

$$S = 80 \text{ м}^2.$$

Сосуд оказался размером с большой бассейн, а потому изменением уровня жидкости по сравнению с глубиной погружения можно пренебречь.

График зависимости показаний динамометра F, от перемещения y



9

По графику $F(y)$ определим $y_{\min}$ — минимальное смещение груза при котором пружина дальше растягиваться не будет, т. е.

$$F(y_{\min}) = 2 \text{ Н}, \quad \Longrightarrow \quad y_{\min} = 10 \text{ см}.$$

Если дальше увеличивать y — при $y \leqslant 10$ см, то пружина не будет сильнее растягиваться т. к. грузик будет полностью погружен в воду, а значит, что высота параллелепипеда H будет равна смещению груза $y_{\min} = H = 10$ см. В начальный момент груз не погружен, а потому

$$F_0 = mg = H \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g, \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{F_0}{H \cdot a^2 \cdot g} = \frac{4}{0{,}1 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 10} = 2500 \text{ кг/м}^3.$$

Определим максимальное изменение уровня воды в сосуде $h_{\max}$ (оно максимально при полном погружении бруска):

$$\Delta h = \frac{S_{\text{гр}}}{S - S_{\text{гр}}} y_{\min} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{100 - 10^{-4}} \approx 25 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Критерии 7 класс

Критерии 1 задача.

1. Сделан вывод о линейной зависимости скорости от координаты на рейке — 1 балл.
2. Показано, что нить 1–2 может быть — 1 балл.
3. Показано, что нити 2–3 нет — 1 балл.
4. Записаны условия и найдено крайнее положение прикрепления нити 1–2 — 2 балла.
5. Показано, что нить 1–3 есть и найдено крайнее положение ее крепления — 2 балла.
6. Учтено, что нить может провисать, и ответ представлен в соответствующем виде — 3 балла.

Критерии 2 задача.

1. Указано, что центр масс однородного стержня в его середине — 1 балл.
2. Написано уравнение (1) — 2 балла.
3. Написано уравнение (2) — 2 балла.
4. Определено, что масса части справа больше: $\mu_2 = \mu_1 + \Delta M$ — 1 балл (либо написано, что центр масс проволоки находится справа от стыка).
5. Уравнение (3) — 1 балл.
6. Найдены массы — 2 балла (по баллу за каждую).
7. Получен верный ответ — 1 балл.

Критерии 3 задача.

1. Получено выражение для высоты влитого столба h_1— 2 балла.
2. Получено выражение для высоты влитого столба h_2 — 3 балла.
3. Найдены и обоснованы значения для объемов $V_{\min}$ и $V_{\max}$ — 4 балла.
4. Получен итоговый ответ — 1 балл.

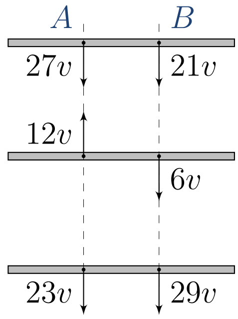
Критерии 4 задача.

1. Записан закон Гука (в любом виде) — 1 балл.
2. Учтено, что перемещение динамометра не равно растяжению пружины — 1 балл.
3. Записана связь на растяжение пружины динамометра — 1 балл.
4. Заполнена таблица зависимости $F(y)$ — 1 балл.
5. Построен график зависимости $F(y)$ — 1 балл.

6. Записана связь на изменение уровня воды в сосуде при погружении груза — 1 балл.
7. Записано условие равновесия грузика — 1 балл.
8. Найдена высота цилиндра — 1 балл.
9. Найдена плотность цилиндра — 1 балл.
10. Найдено максимальное изменение уровня воды в сосуде — 1 балл.

Олимпиада 8 класс

8.1. Экспериментатор Глюк проводил опыты с незакрепленными рейками, измеряя скорости их движения в точках A и B (делят рейки на три равные части), которые он вынес на рисунки. Однако он забыл, что между рейками были прокинуты вертикальные нити. К сожалению Глюк забыл и количество этих нитей и их расположение. Между какими из реек могли быть прокинуты эти нити и на каком расстоянии от левого края реек? Длины реек одинаковы и равны 36 м. Длина нитей равна расстоянию между рейками.



8.2. Ученикам ЛОШ наскучили обычные праки и они решили начать изучать эффект Зеебека. Для этого они взяли две однородные проволочки разной длины и плотности, но одинакого сечения, и спаяли их концы (см. рис. 1). Далее будущие ученые нашли однородную палку, массой которой можно пренебречь, и два упора. Палку поставили на упоры так, что расстояния от упоров до ближайших к ним концов палки одинаково и равно a (иными словами, все поставили симметрично). Расстояние между упорами l. Величины l и a заведомо больше длины проволоки. Оказалось, что если проволоку поставить швом ровно над левой опорой и на левый край поставить шарик массы больше m_1 (см. рис. 2а), то палка упадет, а при любой меньшей массе палка будет в состоянии равновесия. А если поставить на правый край шарик массы больше m_2, палка также упадет (см. рис.2б), и также будет в равновесии при любой меньшей массе шарика. Найдите отношение плотности левого однорого куска проволоки к плотности правого однородного куска, если для проволоки одновременно известно:

1. длина её правого однородного куска относится к длине левого как $\frac{1}{n} < 1$;
2. масса одного однородного куска на $\triangle M > 0$ больше, чем другого.

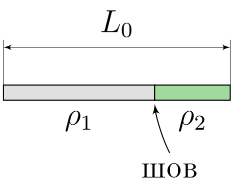


Рис. 1

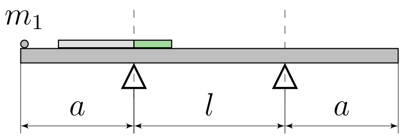


Рис. 2а

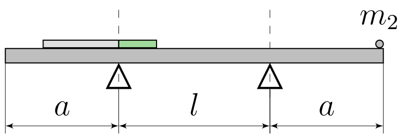
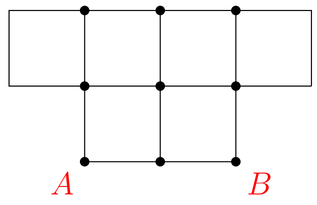


Рис. 2б

8.3. Экспериментатор Лаг взял три сообщающихся сосуда одинаковой высоты, заполненных до середины жидкостью плотностью ρ_0. Их площади поперечного сечения относятся друг к другу как $1:2:4$. Затем он начал последовательно каждое колено заполнять жидкостью плотностью $\rho < \rho_0$ до самой верхушки до тех пор, пока все колена не будут заполнены. После этого он взял другие такие же три сообщающихся сосуда и повторил свои действия, но заполнял колена жидкостью плотностью ρ в другой последовательности. Так он провёл серию экспериментов, перепробовав все возможные варианты последовательности заполнения колен. При какой последовательности заполнения объём слитой жидкости будет максимален? При какой минимален? Найти отношение $V_{\max}/V_{\min}$, если известно, что отношение плотностей $\rho_0/\rho = 17$. *Примечание.* При малых $x \ll 1$ справедливо соотношение $1/(1-x) \approx 1+x$.

8.4. Проволочная сетка составлена из 18 одинаковых отрезков проволоки по $R = 58$ Ом каждый.

1. Чему равно сопротивление сетки между контактами A и B?
2. Проволока «перегорает» (разрушается), если по ней проходит ток, превышающий 0,2 А. Какое максимальное напряжение можно приложить к контактам A и B, чтобы ток между ними не прекратился?



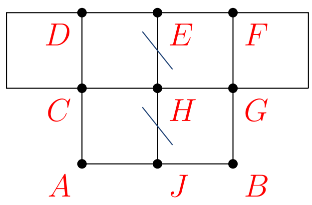
Решения 8 класс

8.1 Смотрите решение задачи 7.1.

8.2 Смотрите решение задачи 7.2.

8.3 Смотрите решение задачи 7.3.

8.4 Найдем сопротивление схемы. Центральные резисторы (см. рисунок) можно выкинуть в силу симметрии.



$$R_{AC} = R_{GB} = R, \quad R_{AJB} = R_{CHG} = R_{DEF} = 2R,$$

также найдем сопротивление между точками C и D, (между E и F будет такое же) соединенных двумя параллельными резистрами сопротивлением $3R$ и R соответственно:

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{R_{FG}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{R}, \quad \Longrightarrow \quad R_{CD} = R_{FG} = \frac{3}{4}R,$$

откуда

$$R_{CDEFG} = R_{CD} + R_{DEF} + R_{FG} = \frac{7}{2}R.$$

Складываем:

$$\frac{1}{R_{CG}} = \frac{1}{R_{CDEFG}} + \frac{1}{R_{CHG}} = \frac{2}{7R} + \frac{1}{2R}, \quad \Longrightarrow \quad R_{CG} = \frac{14}{11}R.$$

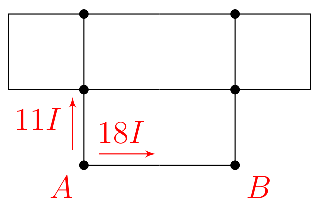
Получаем значение и для

$$R_{ACGB} = 2R + \frac{14}{11}R = \frac{36}{11}R.$$

Откуда формула для общего сопротивления схемы

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{ACGB}} + \frac{1}{R_{AJB}} = \frac{11}{36R} + \frac{1}{2R}, \quad \Longrightarrow \quad R_{AB} = \frac{36}{29}R.$$

Переходим ко второму пункту: пусть в схему втекает суммарный ток в $29I$, тогда в точке A он сразу делится в отношении 18 к 11 — обратно пропорционально сопротивлениям по которым он потечет. Ток между AB прекратится тогда, когда схема будет полностью разрушена, т. е. как минимум $11I$ будет равен граничному значению тока в 0,2 А. Т. е. общий втекающий ток равен $29I$, а напряжение на AB



$$U = 29I \cdot R_{AB} = 29I \cdot \frac{36}{29}R = 36IR = 0{,}2 \cdot \frac{36}{11} \cdot 58 = 38 \text{ В}.$$

Критерии 8 класс

Критерии 1 задача.

Смотрите критерии задачи 7.1.

Критерии 2 задача.

Смотрите критерии задачи 7.2.

Критерии 3 задача.

Смотрите критерии задачи 7.3.

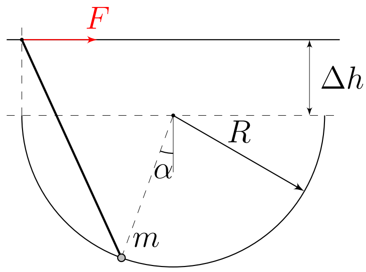
Критерии 4 задача.

1. Убраны 2 центральные перегородки в силу симметрии — 1 балл.
2. Расставлены токи — 3 балла.
3. Найдено эквивалентное сопротивление 72 Ом — 2 балла.
4. Указан факт, что максимальное напряжение будет тогда, когда перегорят нижние 2 куска провода — 2 балла.
5. Найдено максимальное напряжение 38 В — 2 балла.

Олимпиада 9 класс

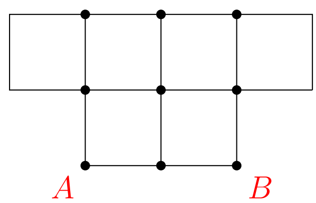
9.1. С утеса высотой 55 метров выстреливают ядром с начальной скоростью 100 м/с под углом 30° к горизонту. Определите, с какой начальной скоростью под углом 60° к горизонту одновременно с выстрелом должен подпрыгнуть барон Мюнхгаузен, стоящий на расстоянии 80 м от предполагаемого места падения ядра, чтобы «оседлать» (встретить) его. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2. Все движения происходят в одной вертикальной плоскости.

9.2. Бусинка массы m прикреплена к жесткому невесомому стержню, верхний конец которого движется по гладкой горизонтальной направляющей. Сама бусинка скользит без трения по закрепленной проволоке в форме полуокружности радиуса R. На верхнюю часть стержня начинает действовать постоянная горизонтальная сила равная $F = 12mg/13$. В начальный момент угол между радиусом из центра полуокружности к бусинке и вертикалью был α ($\sin\alpha = 5/13$), а верхний конец стержня находился на высоте $\Delta h = 3R/2$ от верхнего края проволоки. Найдите суммарную силу реакции со стороны направляющей и проволоки на систему бусинка+стержень, когда бусинка проходит самую нижнюю точку.



9.3. Проволочная сетка составлена из 18 одинаковых отрезков проволоки по $R = 58$ Ом каждый.

1. Чему равно сопротивление сетки между контактами A и B?
2. Проволока «перегорает» (разрушается), если по ней проходит ток, превышающий 0,2 А. Какое максимальное напряжение можно приложить к контактам A и B, чтобы ток между ними не прекратился?



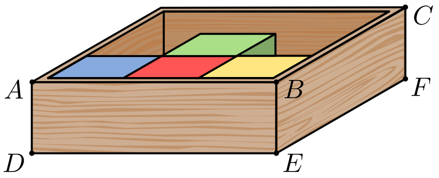
9.4. Экспериментатор Глюк вышел на пенсию и стал больше времени проводить со своими внуками. Во время наблюдения за их игрой Глюка осенило, что с помощью коробки с кубиками можно приблизительно определить угол наклона парты внука.

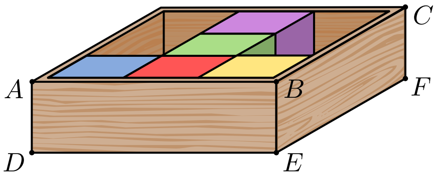
В коробку помещается 9 одинаковых кубиков массой m со стороной a. Масса пустой коробки с крышкой равна массе одного кубика, а толщиной коробки он решил пренебречь. Из своих прошлых экспериментов Глюк знал, что коэффициент трения поверхности этой парты о стенки коробки $\mu = 0{,}6$.

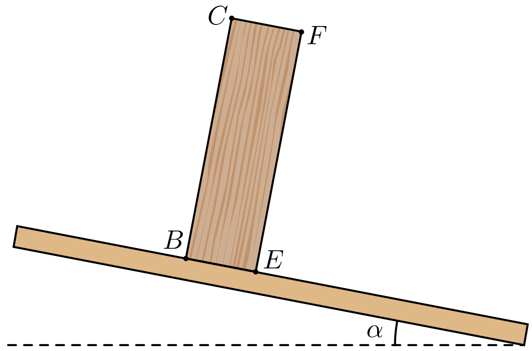
Глюк кладет кубики в коробку, закрывает её крышкой, ставит на поверхность парты и смотрит, происходит ли опрокидывание вдоль стороны ED (см. рисунок). Оказалось, что с 4 кубиками коробка покоится, а с 5 кубиками падает (расположение кубиков внутри коробки изображено на рисунке).

1. Помогите Глюку рассчитать диапазон значений угла наклона парты.

2. Можно ли улучшить точность определения угла, не меняя порядок действий Глюка? Что для этого необходимо сделать?







9.5. Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту $h = 1{,}2$ м. Лучи от Солнца образуют угол 30° с горизонтом.

1. Найдите длину тени, отбрасываемой палкой.

Палку начинают наклонять с постоянной угловой скоростью $\omega = 0{,}1$ рад/с в направлении отбрасываемой ею тени так, что её нижний конец не сдвигается с места.

2. Чему равна длина тени l, когда шест образует угол 15° с вертикалью?
3. Чему равен промежуток времени между моментами времени, когда длина тени равна l?
4. Чему была равна максимальная длина тени от палки $l_{\max}$?
5. Чему равна скорость движения края тени v, когда палка образует угол 45° с вертикалью?

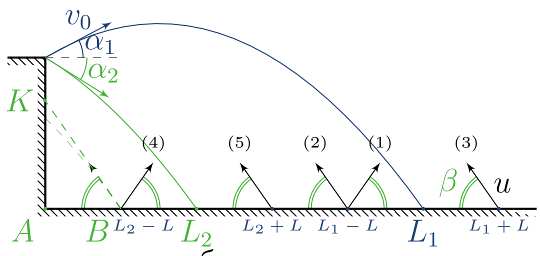
Примечание. При решении вам могут понадобиться следующие формулы

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha.$$

Решения 9 класс

9.1 Рассмотрим все возможные случаи вылета ядра (α_1 выше горизонта, α_2 ниже горизонта), расположения барона ($L = 80$ м слева и справа от места падения ядра) и направление прыжка барона (влево и вправо под углом $\beta = 60°$), которые могут быть реализованы в этой задаче.



При прыжке барона из точки B влево, траектория полета будет ниже гипотенузы BK, которая не пересекается с траекорией ядра. Запишем уравнения движения по осям для ядра и барона:

Для ядра в проекции на ось OX:

$$x_я(t) = v_0 \cos \alpha t,$$

на ось OY

$$y_{я1}(t) = H + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}, \qquad y_{я2}(t) = H - v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Для барона в проекции на ось OX:

$$x_{б1}(t) = L_1 - L + u_0 \cos \beta t, \qquad x_{б2}(t) = L_1 - L - u_0 \cos \beta t,$$

$$x_{б3}(t) = L_1 + L - u_0 \cos \beta t, \qquad x_{б4}(t) = L_2 - L + u_0 \cos \beta t,$$

$$x_{б5}(t) = L_2 + L - u_0 \cos \beta t.$$

И на ось OY

$$y_б(t) = u_0 \sin \beta t - \frac{gt^2}{2}.$$

В остальных случаях траектории барона и ядра не пересекутся, нет смысла их рассматривать.

Найдем дальность полета ядра:

$$y_{я1}(\tau) = H + v_0 \sin \alpha \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0,$$

$$\frac{g}{2}\tau^2 - v_0 \sin \alpha \tau - H = 0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно τ:

$$\mathcal{D} = (v_0 \sin \alpha)^2 + 2gH = 50^2 + 2 \cdot 10 \cdot 55 = 3600 \text{ с}^2,$$

$$\tau_1 = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{\mathcal{D}}}{g} = \frac{50 + 60}{10} = 11 \text{ с}.$$

Аналогично и для второго случая

$$\tau_2 = \frac{-v_0 \sin \alpha + \sqrt{\mathcal{D}}}{g} = \frac{-50 + 60}{10} = 1 \text{ с}.$$

Подставим в уравнения движения и найдем дальности полета ядра в двух случаях:

$$L_1 = x_я(\tau_1) = 50\sqrt{3}\cdot 11 \text{ м}, \qquad L_2 = x_я(\tau_1) = 50\sqrt{3} \text{ м}.$$

Т. к. $L_2 > L$, то случай 4 возможен.

Когда барон оседлает ядро — их координаты совпадут, потому в первом случае

$$y_{я1} = y_б, \quad \Longrightarrow \quad H + v_0 \sin\alpha t_{в1} = u_0 \sin\beta t_{в1},$$

и во втором

$$y_{я2} = y_б, \quad \Longrightarrow \quad H - v_0 \sin\alpha t_{в1} = u_0 \sin\beta t_{в1},$$

откуда из первого

$$H = (u_0 \sin\beta - v_0 \sin\alpha) t_{в1}, \tag{1}$$

и второго уравнения

$$H = (u_0 \sin\beta + v_0 \sin\alpha) t_{в2}. \tag{2}$$

Теперь координаты по оси OX:

$$x_я = x_{б1л}, \quad \Longrightarrow \quad v_0 \cos\alpha t_{в1} = L_1 - L + u_0 \cos\beta t_{в1},$$

получаем

$$(v_0 \cos\alpha - u_0 \cos\beta) t_{в1} = L_1 - L, \tag{3}$$

делим 1 на 3:

$$\frac{u_0 \sin\beta - v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha - u_0 \cos\beta} = \frac{H}{L_1 - L}. \tag{4}$$

Также из 3 выразим время до встречи

$$t_{в1} = \frac{L_1 - L}{v_0 \cos\alpha - u_0 \cos\beta}.$$

Для остальных случаев аналогично найдем — для первого при броске влево, ядро под углом α вниз:

$$x_я = x_{б1л}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_0 \sin\beta - v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha + u_0 \cos\beta} = \frac{H}{L_1 - L}, \tag{5}$$

вправо:

$$x_я = x_{б1п}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_0 \sin\beta - v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha + u_0 \cos\beta} = \frac{H}{L_1 + L}, \tag{6}$$

второй случай влево:

$$x_я = x_{б2л}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_0 \sin\beta + v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha - u_0 \cos\beta} = \frac{H}{L_2 - L}, \tag{7}$$

вправо:

$$x_я = x_{б2п}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_0 \sin\beta + v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha + u_0 \cos\beta} = \frac{H}{L_2 + L}, \tag{8}$$

Из уравнений 4 — 8 выразим начальную скорость барона для каждого случая:

$$u_0((L_1 - L)\sin\beta + H\cos\beta) = v_0((L_1 - L)\sin\alpha + H\cos\alpha),$$

откуда

$$u_{01} = v_0 \frac{(L_1 - L)\sin\alpha + H\cos\alpha}{(L_1 - L)\sin\beta + H\cos\beta} \approx 61{,}8 \text{ м/с}.$$

Проверим — проходит ли результат по времени:

$$t_{\text{в}1} = \frac{L_1 - L}{v_0\cos\alpha - u_{01}\cos\beta} = \frac{550\sqrt{3} - 80}{100\cdot\sqrt{3}/2 - 61{,}8\cdot 1/2} = 12{,}26 \text{ с} > \tau_1,$$

это значит, что случай не реализуется, т. к. время встречи больше времени полета ядра. Аналогично из уравнений 5 — 8

$$u_{02} = v_0 \frac{(L_1 - L)\sin\alpha + H\cos\alpha}{(L_1 - L)\sin\beta - H\cos\beta} \approx 66{,}5 \text{ м/с}, \quad t_{\text{в}1} = \frac{L_1 - L}{v_0\cos\alpha - u_{01}\cos\beta} = 8{,}55 \text{ с},$$

меньше времени полета τ_1, потому реализуется, третий случай аналогично

$$u_{03} = v_0 \frac{(L_1 + L)\sin\alpha + H\cos\alpha}{(L_1 + L)\sin\beta - H\cos\beta} \approx 65{,}1 \text{ м/с}, \quad t_{\text{в}1} = \frac{L_1 + L}{v_0\cos\alpha - u_{01}\cos\beta} = 10{,}11 \text{ с},$$

меньше τ_1 — он реализуется. Четвертый случай:

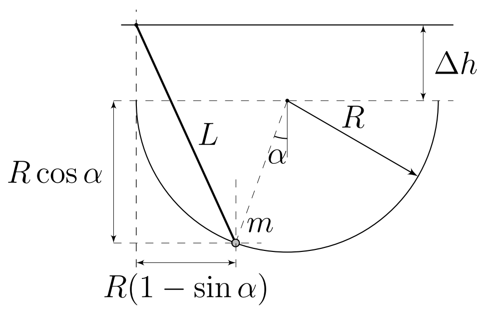
$$u_{04} = v_0 \frac{-(L_2 - L)\sin\alpha + H\cos\alpha}{(L_2 + L)\sin\beta + H\cos\beta} \approx 133 \text{ м/с}, \quad t_{\text{в}1} = \frac{L_2 - L}{v_0\cos\alpha - u_{01}\cos\beta} = 0{,}33 \text{ с},$$

время до столкновения меньше времени полета τ_2 — тоже верный, и пятый:

$$u_{05} = v_0 \frac{-(L_2 - L)\sin\alpha + H\cos\alpha}{L_2 + L)\sin\beta - H\cos\beta} \approx -30{,}5 \text{ м/с}$$

не подходит, т. к. барон не может лететь сквозь землю вниз.

9.2 Найдем длину стержня L. Из прямоугольного треугольника (см рисунок), стороны в котором равны $\Delta h + R\cos\alpha$ и $R(1-\sin\alpha)$ соответственно. По теореме Пифагора:



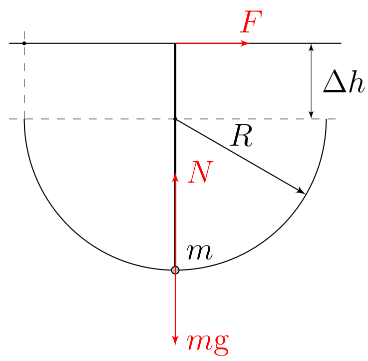
$$L = \sqrt{(\Delta h + R\cos\alpha)^2 + R^2(1-\sin\alpha)^2}.$$

Подставим $\sin\alpha = 5/13$ ($\cos\alpha = 12/13$) и $\Delta h = 3/2R$ в выражение:

$$L = \frac{5}{2}R.$$

Заметим, что длина стержня совпадает с расстоянием от направлеющей до нижней точки полуокружности ($\Delta h + R = 5/2R$). А значит, что в момент прохождения бусинкой нижней точки стержень может располагаться единственным образом — вертикально.

Запишем закон изменения энергии. Верхний конец стержня к этому моменту прошел расстояние R, откуда найдем работу силы F: $A = FR$, также учтем изменение потенциальной энергии бусинки $mgR(1-\cos\alpha)$



$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha) + FR,$$

откуда:

$$m\frac{v^2}{R} = 2mg(1-\cos\alpha) + 2F.$$

В момент прохождения бусинкой нижней точки на систему бусинка+стержень действуют 2 силы реакции опоры (со стороны направляющей и со стороны проволоки) — обозначим их результирующую за N, направленную вдоль стержня (например вверх, если получим знак минус, то направление другое), а также сила тяжести бусинки (масса стержня равна 0). По второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось получаем:

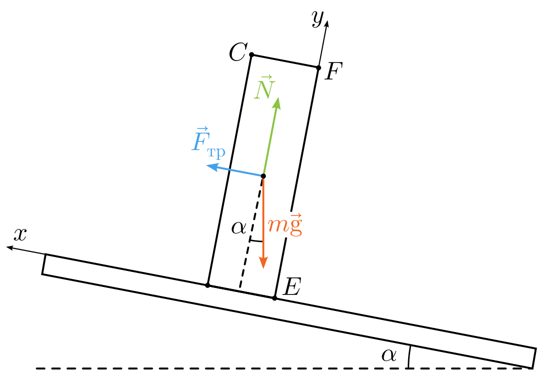
$$ma = m\frac{v^2}{R} = N - mg, \quad\Longrightarrow\quad N = m\frac{v^2}{R} + mg = 2mg(1-\cos\alpha) + 2F + mg,$$

подставляя $F = 12mg/13$, находим искомый ответ:

$$N = 3mg.$$

9.3 Смотрите решение задачи 8.4.

9.4 Определим, при каких углах α коробка с кубиками не будет проскальзывать. Запишем второй закон Ньютона и спроецируем его на оси x и y



$$\begin{cases} F_{тр} = mg\sin\alpha, \\ N = mg\cos\alpha. \end{cases}$$

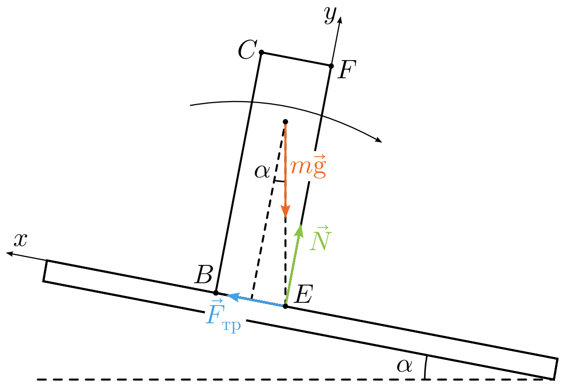
Пока сила трения не достигнет максимального значения, определяемого из закона сухого трения, коробка будет покоиться.

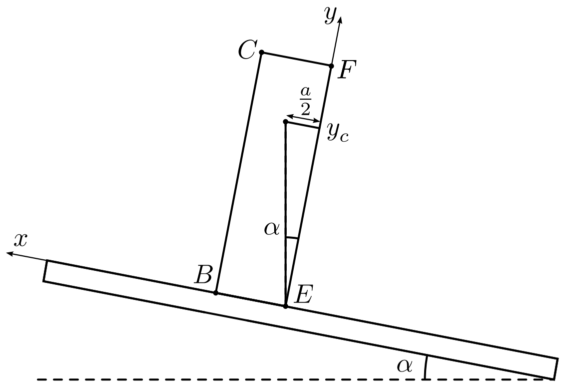
$$\begin{aligned} F_{тр} \leqslant \mu N \quad &\Longrightarrow \quad mg\sin\alpha \leqslant \mu g\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \leqslant 30{,}96^\circ. \end{aligned}$$

Найдем углы, при которых коробка не будет опрокидываться вдоль стороны ED.

В момент опрокидывания точки приложения силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$ находятся на стороне ED, следовательно, при записи уравнения моментов относительно этой оси, моменты сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ будут равны нулю. Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена к центру масс коробки с кубиками. Центр масс находится в точке с координатами $x_c = BE/2 = a/2$ (в силу симметрии) и y_c.

Как только линия действия силы тяжести становится правее прямой ED, коробка опрокидывается, так как момент силы тяжести ничем не скомпенсирован.

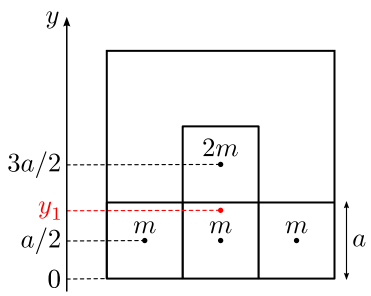


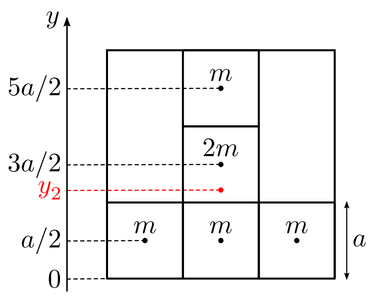


Максимальный угол, при котором не происходит опрокидывание, соответствует ситуации, когда линия действия $m\vec{g}$ пересекает прямую ED (см. рис.). Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{a}{2y_c}.$$

Рассчитаем координаты y_1 и y_2 центра масс коробки с кубиками, изображенными на рисунке в условии.



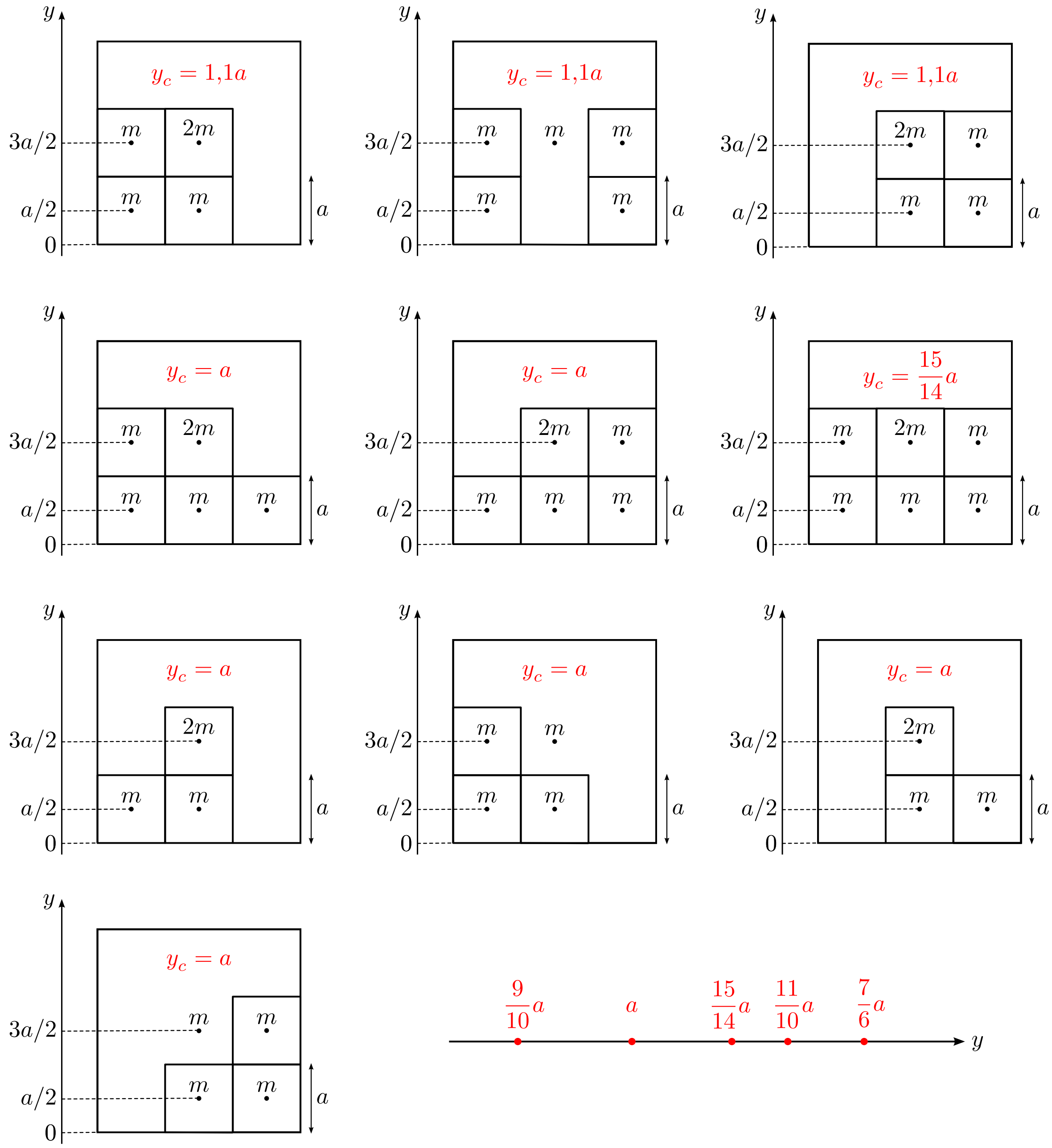


$$y_1 = \frac{2m \cdot 3a/2 + 3m \cdot a/2}{5m} = \frac{9a}{10}, \qquad y_2 = \frac{m \cdot 5a/2 + 2m \cdot 3a/2 + 3m \cdot a/2}{6m} = \frac{7a}{6}.$$

При положении центра масс в точке y_1 коробка не опрокидывается, а при положении в точке y_2 опрокидывается, следовательно,

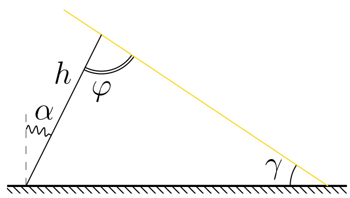
$$\frac{a}{2y_2} < \operatorname{tg}\alpha < \frac{a}{2y_1}, \qquad \frac{3}{7} < \operatorname{tg}\alpha < \frac{5}{9}, \qquad 23{,}20^\circ < \alpha < 29{,}05^\circ.$$

Результаты Глюка можно улучшить. Для этого необходимо собрать такую комбинацию кубиков, при которой координата центра масс y_c будет находиться между $9a/10$ и $7a/6$ и провести эксперимент с опрокидыванием. Подходят следующие варианты расстановки кубиков в коробке:



Верхняя граница угла α, полученная в 4 пункте, меньше угла, при котором начинается проскальзывание, $29{,}05^\circ < 30{,}96^\circ$, значит, в дополнительном эксперименте будет происходить именно опрокидывание. Если коробка упала, то $\operatorname{tg}\alpha > a/(2y_c)$, если осталась стоять, то $\operatorname{tg}\alpha < a/(2y_c)$. При необходимости можно провести ещё эксперименты, которые позволят точнее определить значение угла наклона парты.

9.5 По определению тангенса $\operatorname{ctg}\gamma = L_1/h$, где L_1 — искомая длина тени. Получаем ответ на первый пункт — $L_1 = h\operatorname{ctg}\gamma$.



Пусть палка отклонилась от вертикали на угол α, тогда угол между палкой и землей составит $\beta = 90^\circ - \alpha$, а между лучом и палкой — $\varphi = 60^\circ + \alpha$. По теореме синусов

$$\frac{\sin\gamma}{h} = \frac{\sin\varphi}{L_2},$$

выражаем длину тени во второй раз ($\alpha = 15°$):

$$L_2 = h \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = h \cdot \frac{\sin 75°}{\sin 30°}.$$

Углы, при которых длина тени будет одинакова это углы, синусы которых равны т. е.

$$\sin 75° = \sin\theta, \quad \Longrightarrow \quad \theta = 180° - 75° = 105°.$$

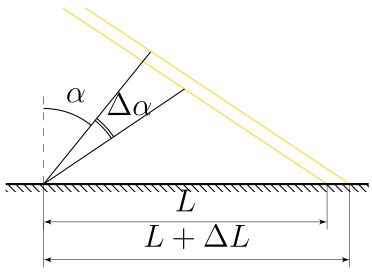
Откуда искомое время равно

$$t = \frac{\theta - \varphi}{\omega} = 5{,}2\text{с}.$$

Т. к. длина тени $L \sim 1/\sin\varphi$ то длина максимальна будет тогда, когда максимален синус. Угол φ лежить в диапазоне от $60°$ до $90° + 60° = 150°$, а значит максимум будет при $\sin\varphi = 1$

$$L_{max} = h \cdot \frac{\sin 90°}{\sin 30°} = 2h = 2{,}4\text{м}.$$

Предположим, что палка повернулась дополнительно на малый угол $\Delta\alpha$ (угол φ увеличился на такое же значение), тогда тень изменила свою длину на ΔL. Из теоремы синусов для треугольников до сдвига и после



$$\frac{\sin\varphi}{L} = \frac{\sin\gamma}{h} = \frac{\sin(\varphi + \Delta\alpha)}{L + \Delta L},$$

перемножая

$$(L + \Delta L)\sin\varphi = L\sin(\varphi + \Delta\alpha).$$

Раскладываем синус суммы:

$$\sin(\varphi + \Delta\alpha) = \sin\varphi\cos\Delta\alpha + \cos\alpha\sin\Delta\alpha.$$

Используя приближение $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, а $\cos\Delta\alpha \approx 1$,

$$(L + \Delta L)\sin\varphi = L\sin\varphi + L\cos\varphi\Delta\alpha, \quad \Longrightarrow \quad \Delta L = L\operatorname{ctg}\varphi\Delta\alpha.$$

Делим обе части уравенения на Δt и, подставляя текущее значение L и угла $\varphi = 60° + \alpha° = 105°$, выражаем скорость тени v

$$v = \omega L\operatorname{ctg}\alpha, \quad \Longrightarrow \quad \omega h \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}\operatorname{ctg}\varphi, \quad \Longrightarrow \quad v = \omega h\frac{\cos 105°}{\sin 30°} \approx -0{,}5\ \text{м/с}.$$

Знак минус означает то, что тень движется влево.

Критерии 9 класс

Критерии 1 задача.

1. Найдена дальность полета L_1 — 2 балла.
2. Найдена дальность полета L_2 — 2 балла.
3. Рассмотрен каждый из 6 возможных случаев — 1 балл каждый (0,5 балла, если не сделана проверка на реализуемость)

Критерии 2 задача.

1. Найдена длина стержня — 2 балла.
2. Сказано, что верхняя точка прошла путь длиной R — 1 балл.
3. Записан ЗСЭ — 2 балла.
4. Записано центростремительное ускорение для бусинки — 1 балл.
5. Записан в проекции 2 закон Ньютона для системы «стержень и бусинка» — 2 балла.
6. Получен верный ответ — 2 балла.

Критерии 3 задача.

Смотрите критерии задачи 8.4.

Критерии 4 задача.

1. Проведена проверка на скольжение ($\alpha \leqslant \mathrm{arctg}(0{,}6) = 30{,}96°$)— 1 балл.
2. Верно найден $y_1 = 9a/10$ — 1 балл.
3. Верно найден $y_2 = 7a/6$ — 1 балл.
4. Записано условие опрокидывания $\mathrm{tg}\,\alpha > a/(2 \cdot y_c)$ — 1 балл.
5. Получен ответ на 1-ый вопрос $23{,}20° < \alpha < 29{,}05°$ — 3 балла.
6. Получен ответ на 2-ой вопрос с обоснованием и без — 3 или 1 балл.

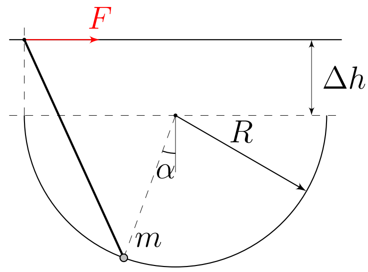
Критерии 5 задача.

1. Получена длина тени в первом пункте l — 1 балл.
2. Получена длина тени во втором пункте l — 1 балл.
3. Верно найдено время — 2 балла.
4. Найдена максимальная длина тени — 1 балл, с обоснованием — 2 балла.
5. Определена скорость тени — 3 балла.

Олимпиада 10 класс

10.1. С утеса высотой 55 метров выстреливают ядром с начальной скоростью 100 м/с под углом 30° к горизонту. Определите, с какой начальной скоростью под углом 60° к горизонту одновременно с выстрелом должен подпрыгнуть барон Мюнхгаузен, стоящий на расстоянии 80 м от предполагаемого места падения ядра, чтобы «оседлать» (встретить) его. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2. Все движения происходят в одной вертикальной плоскости.

10.2. Бусинка массы m прикреплена к жесткому невесомому стержню, верхний конец которого движется по гладкой горизонтальной направляющей. Сама бусинка скользит без трения по закрепленной проволоке в форме полуокружности радиуса R. На верхнюю часть стержня начинает действовать постоянная горизонтальная сила равная $F = 12mg/13$. В начальный момент угол между радиусом из центра полуокружности к бусинке и вертикалью был α ($\sin\alpha = 5/13$, а верхний конец стержня находился на высоте $\Delta h = 3R/2$ от верхнего края проволоки. Найдите суммарную силу реакции со стороны направляющей и проволоки на систему бусинка+стержень, когда бусинка проходит самую нижнюю точку.

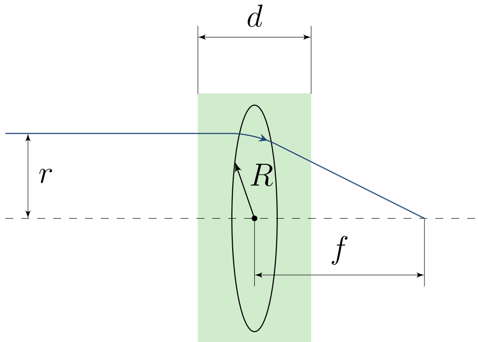


10.3. Рассмотрим эффект электростатической линзы, идея которого используется в сканирующей электронной микроскопии и создании ловушек зарядов. Пускай имеется проводящее кольцо радиуса R, которое можно практически мгновенно заряжать зарядом Q, как только появляется заряженная частица с зарядом q в пределах d (см. рис.). Параллельно оси кольца на расстоянии r ($r \ll R$) распространяются частицы с кинетической энергией E. Магнитными полями, а также изменением продольной скорости электронов следует пренебречь. Движущиеся электроны не влияют на распределение заряда по кольцу. Исходя из этих данных, найдите фокусное расстояние такой «линзы» f, считая $f \gg d$. Сформулируйте критерий мгновенной зарядки кольца.

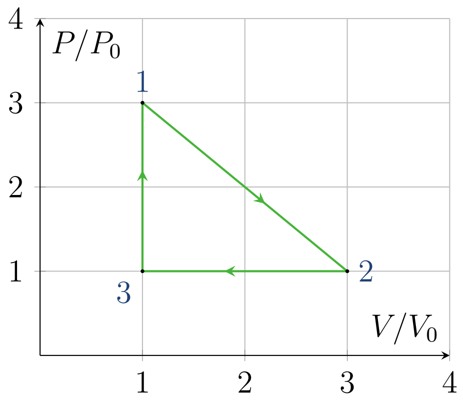
Для решения задачи Вам может пригодиться следующее приближённое соотношение

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2,$$

где $|x| \ll 1$. *Подсказка.* В силу симметрии задачи потенциал кольца $\varphi(z, r)$ не имеет линейной части по r.



10.4. Над фотонным газом совершают циклический процесс, показанный на рисунке. Уравнение состояния фотонного газа имеет вид $P = \alpha T^4/3$, где P и T — это давление и температура соответственно, α — известная размерная константа, а выражение для внутренней энергии имеет вид $U = \alpha V T^4$, где V — это объем. Считая P_0 и V_0 известными, найдите:



1. максимальную и минимальную температуры фотонного газа в процессе 1–2;
2. общее количество теплоты, полученное газом в процессе 1–2;
3. КПД данного цикла.

10.5. Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту $h = 1{,}2$ м. Лучи от Солнца образуют угол $30°$ с горизонтом.

1. Найдите длину тени, отбрасываемой палкой.

Палку начинают наклонять с постоянной угловой скоростью $\omega = 0{,}1$ рад/с в направлении отбрасываемой ею тени так, что её нижний конец не сдвигается с места.

2. Чему равна длина тени l, когда шест образует угол $15°$ с вертикалью?
3. Чему равен промежуток времени между моментами времени, когда длина тени равна l?
4. Чему была равна максимальная длина тени от палки $l_{\max}$?
5. Чему равна скорость движения края тени v, когда палка образует угол $45°$ с вертикалью?

Решения 10 класс

10.1 Смотрите решение задачи 9.1.

10.2 Смотрите решение задачи 9.2.

10.3 При вхождении в коридор d частица начинает взаимодействовать с полем кольца. Определим его, используя подсказку из условия. Для этого найдём потенциал на оси кольца, а потом рассмотрим, как найти его радиальную состовляющую для каждого фиксированного z. Потенциал на оси кольца ищется по принципу суперпозиции

$$\varphi(z,r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Используя приближение, получаем:

$$\varphi(z,0) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{z^2}{2R^2}\right).$$

Воспользуемся указанием:

$$\varphi(z,r) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{z^2}{2R^2}\right)+\alpha r^2.$$

Продольная компонента вектора напряжённости ищется из связи потенциала и напряжённости

$$E_r(z,r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\alpha(r+\Delta r)^2-\alpha r^2}{\Delta r} = -2\alpha r,$$

выделим цилиндрическую поверхность внутри кольца, радиуса r, поток через ее боковую поверхность равен

$$\varPhi_1 = -2\alpha r\cdot 2\pi r z,$$

аналогично определяем аксиальную компоненту

$$E_z(z,r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{zQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

И, т. к. торца два, то

$$\varPhi_2 = 2\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\pi r^2.$$

по теореме Гаусса найдем коэффициент α (заряд внутри маленького кольца 0):

$$2\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\pi r^2 - 2\alpha r\cdot 2\pi r z = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = 0, \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Уравнение движение частицы в плоскости кольца $m\ddot{r} = 2q\alpha r$, время движения в поле оценивается как d/v, поэтому в силу малости d можно оценить радиальную компоненту скорости как

$$v_r = \frac{2q\alpha r}{m}\frac{d}{v}.$$

Зная её и перемещение по вертикали, можно оценить время пролёта до достижения фокуса

$$\tau = -r\bigg/\left(\frac{2q\alpha r}{m}\frac{d}{v}\right),$$

откуда, наконец, выразим фокусное расстояние

$$f = \tau v = -r \Big/ \left(\frac{2q\alpha r}{m} \frac{d}{v} \right) \cdot v = -\frac{E}{qQd\alpha}.$$

Если считать, что сопротивление кольца с подключаемыми проводами R_0, а ёмкость кольца C, постоянная эквивалентной цепи должна быть больше, чем время пролёта, чтоб заряд не успел утечь.

10.4 Известно, что для фотонного газа термические и калорические уравнения выглядит следующим образом:

$$P = \frac{\alpha T^4}{3}, \qquad U = \alpha V T^4.$$

Подставляя одно выражение в другое, получаем выражение для внутренней энергии газа

$$U = \alpha P V.$$

Как видно из первого уравнения температура фотонного газа зависит только от давления системы

$$T = \sqrt[4]{\frac{3P}{\alpha}}.$$

подставляя минимальное и максимальное значение давления соответственно, находим что

$$T_{\min} = T(P_{\min}) = \sqrt[4]{\frac{3P_0}{\alpha}}, \qquad T_{\max} = T(P_{\max}) = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 3P_0}{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{9P_0}{\alpha}}.$$

Переходим ко второму пункту:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + A_{12},$$

где $U_1 = 3\alpha P_0 V_0$ и $U_2 = 3\alpha P_0 V_0$ — внутренние энергии газов в положениях 1 и 2, а Q_{12} — теплота, сообщенная газу в этом процессе, а A_{12} — работа газа. Таким образом,

$$Q_{12} = A_{12}.$$

Площадь под графиком находим как площадь трапеции

$$A_{12} = \frac{1}{2}(3P_0 + P_0) \cdot 2V_0 = 4P_0V_0,$$

откуда

$$Q_{12} = 4P_0V_0.$$

Найдем КПД тепловой машины.

Замечание. Наверняка читателю известна похожая задача с финала всеросийской олимпиады про касание адиабаты наклонным графиком.

В процессе 1–2 до какого-то момента газ сначала принимает тепло, а затем отдает — найдем эту точку:

$$dQ = dU + \delta A.$$

Подставляя работу $\delta A = PdV$ и dU:

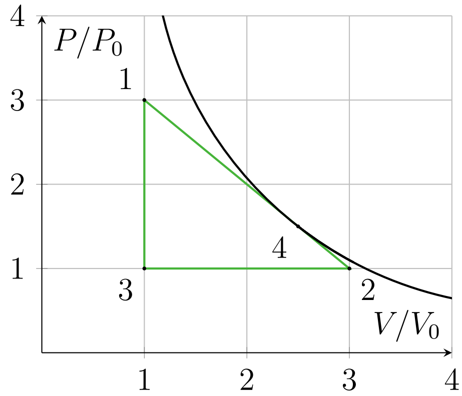
$$0 = 12P_0dV - \frac{6P_0}{V_0}VdV + \left(4P_0 - \frac{P_0}{V_0}V\right)dV = 16P_0dV - 7\frac{P_0}{V_0}VdV,$$

сокращая на dV, находим координаты точки 4

$$V_4 = \frac{16}{7}V_0.$$

Давление в этой точке найдем из уравнения прямой 1–2:

$$P_4 = 4P_0 - \frac{P_0}{V_0}\cdot\frac{16}{7}V_0 = \frac{12}{7}P_0.$$



Выразим тепло в процессе 1–4:

$$Q_{14} = A_{14} + U_4 - U_1.$$

Из площади трапеции находим работу:

$$A_{14} = \frac{1}{2}\left(3P_0 + \frac{12}{7}P_0\right)\cdot\frac{9}{7}V_0 = \frac{297}{98}P_0V_0.$$

Посчитаем также и изменение внутренней энергии:

$$U_4 - U_1 = 3\left(\frac{12P_0}{7}\frac{16V_0}{7} - 3P_0V_0\right) = \frac{135}{49}P_0V_0.$$

Получаем Q_{14}:

$$Q_{14} = \frac{297}{98}P_0V_0 + \frac{135}{49}P_0V_0 = \frac{81}{14}P_0V_0.$$

Для нахождения КПД найдем общее **подведенное** к системе тепло Q^+

$$Q^+ = Q_{14} + Q_{31} = Q_{14}\Delta U_{31}.$$

(На участке 2–3 тепло отводится, т. к. изменение внутреннее равно нулю, а работа отрицательна, а в процессе 3—1 — работа равна 0, а значит $\Delta U_{31} = Q_{31}$),

$$\Delta U_{31} = 3(3P_0V_0 - P_0V_0) = 6P_0V_0,$$

а также найдем площадь треугольника 123 — полную работу в цикле

$$A = \frac{1}{2}\cdot 2V_0\cdot 2P_0 = 2P_0V_0,$$

откуда

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{2P_0V_0}{6P_0V_0 + 81P_0V_0/14} = \frac{28}{165} \approx 0{,}17.$$

10.5 Смотрите решение задачи 9.5.

Критерии 10 класс

Критерии 1 задача.

Смотрите критерии задачи 9.1.

Критерии 2 задача.

Смотрите критерии задачи 9.2.

Критерии 3 задача.

1. Найден потенциал кольца на оси — 1 балл.
2. Найдена радиальная часть потенциала (идея) — 1 балл.
3. Есть идея использования теоремы Гаусса — 1 балл.
4. Рассчитан поток через торцы — 2 балла.
5. Рассчитан поток через боковую поверхность — 2 балла.
6. Написано уравнение движение частицы — 1 балл.
7. Указана радиальная компонента скорости — 0,5 балла.
8. Найдено время достижения фокуса — 0,5 балла.
9. Найдено фокусное расстояние — 0,5 балла.
10. Получено соотношение времён — 0,5 балла.

Критерии 4 задача.

1. Правильно найдены температуры — по 1 баллу за каждую.
2. Записано первое начало термодинамики — 1 балл.
3. Посчитано Q_{12} — 1 балл.
4. Указано, что до некоторого V тепло подводится, после — отводится — 0,5 балл.
5. Составлено уравнение $P(V)$ на участке 1–2 — 1 балл.
6. Составлено уравнение, позволяющее найти это V - 1 балл.
7. Посчитаны P, V в данной точке — 0,5 балла.
8. Найдена работа на участке 1–x — 0,5 балла.
9. Найдено изменение внутренней энергии — 0,5 балла.
10. Найдена работа за цикл — 0,5 балла.
11. Найдено Q подведенное — 0,5 балла.
12. Найден КПД — 1 балл.

Критерии 5 задача.

Смотрите критерии задачи 9.5.