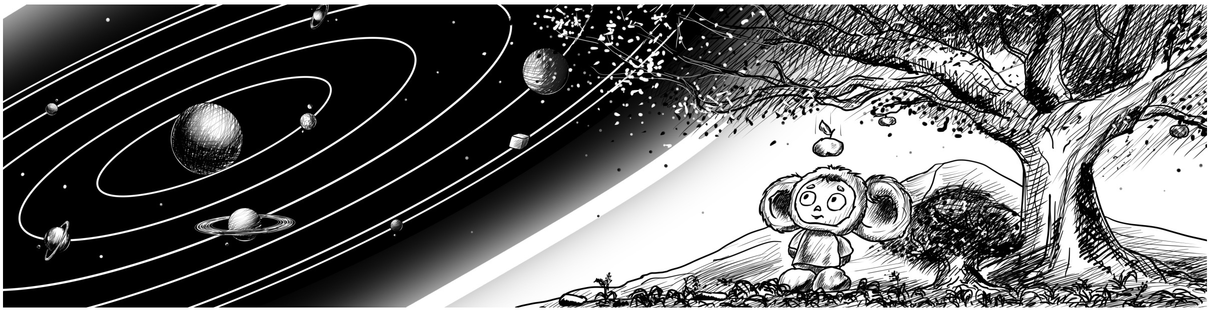


Отделение физики
vk.com/4mipt

Условия и решения олимпиады

Авторы условий:

7 класс

1. Сивцов М.
2. Колымагина Е.
3. Щавлев В.
4. Свинцицкий А.

8 класс

1. Сивцов М.
2. Колымагина Е.
3. Щавлев В.
4. Колдунов Л.

9 класс

1. Свинцицкий А.
2. Стадник Э.
3. Колдунов Л.
4. Стадник Э.
5. Бейлин Н.

10 класс

1. Свинцицкий А.
2. Стадник Э.
3. Колдунов Л.
4. Бейлин Н.
5. Бейлин Н.

Рисунки — Я. Поздняк.

Набор и вёрстка — Д. Хромов, А. Свинцицкий.

Долгопрудный, 2023 г.

Содержание

Олимпиада 7 класс

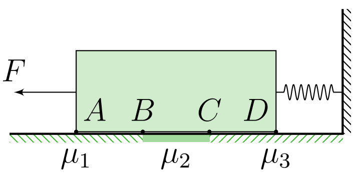
7.1. Коржик, Карамелька и Компот решили «нагулять» аппетит перед обедом. Для этого они вышли из дома, стоящего вдоль прямой дороги, и подошли по ней к фонтану. В какой-то момент Коржик и Компот побежали от фонтана по дороге с постоянными скоростями. Спустя некоторое время Карамелька взяла велосипед и стала двигаться между ними так, что сначала догнала Коржика, затем Компота, потом опять Коржика и потом снова Компота. Сразу после последней встречи Карамелька поехала домой со скоростью 8 м/с. Данные о встречах Карамельки с котиками приведены в таблице:

x, м	200	-100	300	-300
t, чч:мм:сс	13:03:40	13:03:50	13:04:20	13:04:40

Здесь x — координата котика относительно дома в момент встречи с Карамелькой, t — время, в которое произошла встреча.

1. Определите время старта Коржика и Компота.
2. Определите расстояние от фонтана до дома.
3. Определите время прибытия Карамельки домой.

7.2. Система состоит из однородного бруска длиной 90 см и массой 6 кг, прикреплённого к стене с помощью пружины жёсткостью 5 Н/см. Покрытие пола неоднородно и брусок взаимодействует с ним с коэффициентами трения 0,7, 0,6 и 0,2 соответственно. При действии на брусок горизонтальной силы F он может находиться в равновесии в положении, указанном на рисунке. Найдите возможные длины недеформированной пружины для случаев $F = 40$ Н и $F = 10$ Н. Известно, что отрезки AB, BC и CD равны.



7.3. В Северном Ледовитом океане недалеко от Новой земли, где впадают в Карское море Обь и Енисей, плавали льдины с плоскими основаниями и вертикальными стенками. После того как на льдину с площадью основания 20 м^2 взобралась белая медведица массой 200 кг, объём надводной части уменьшился на 40%. Когда к медведице на льдину взобрался белый мишка — сын, объём надводной части уменьшился еще на 20% от текущей величины.

1. Определите массу мишки-сына.
2. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы полностью вытащить льдину с мишками из воды?

Для второго пункта плотность воды и льда примите равными 1000 кг/м^3 и 900 кг/м^3 соответственно.

7.4. На заводе изготовили гладкую деталь довольно странной формы. Деталь сделана из однородного материала и симметрична относительно оси Ox. Зависимость линейной плотности, то есть массы единицы длины этой детали, от координаты x представлена в таблице.

x, м	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
λ, г/см	2,39	2,72	2,93	3,00	2,91	2,68	1,56	1,24	1,05	1,00	1,12

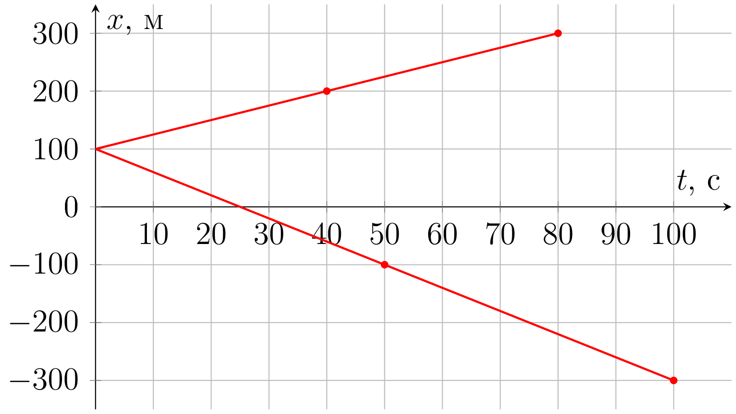
Помогите работникам найти ответы на вопросы.

1. Определите массу детали m.
2. Определите плотность детали ρ.
3. Определите площадь поперечного сечения (то есть перпендикулярного оси симметрии) детали на расстоянии $x = 0{,}7$ м.

При погружении детали в пробирку с водой объём вытесненной воды равен 125 мл.

Решение 7 класс

7.1. 1, 2. Способ 1. Так как Коржик и Компот двигаются с постоянными скоростями, их координаты линейно зависят от времени. Из таблицы мы знаем по две точки на графиках этих зависимостей. Значит, графики зависимостей координат котиков от времени будут отрезками, лежащими на прямых, проходящих через эти пары точек. Примем за начало отсчета по времени момент 13:03:00. Графики $x(t)$ изображены на рисунке ниже.



Точка, в которой пересекаются графики $x(t)$ для Коржика и Компота, имеет координаты (0,100). Эта точка соответствует старту котиков. Значит, время старта — 13:03:00, а расстояние от фонтана до дома равно 100 м.

Способ 2. Пусть x_{ij} — координата котика i (котик 1 — Коржик, котик 2 — Компот) в момент j-ой встречи, t_{ij} — момент времени, в который происходит эта встреча, x_0 — координата фонтана, t_0 — время старта Коржика и Компота, v_i — проекция скорости котика i. Котики двигаются с постоянной скоростью, значит

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{x_{12} - x_{11}}{t_{12} - t_{11}} = \dfrac{100 \text{ м}}{40 \text{ с}} = 2{,}5 \text{ м/с}, \\ v_2 = \dfrac{x_{22} - x_{21}}{t_{22} - t_{21}} = \dfrac{-200 \text{ м}}{50 \text{ с}} = -4 \text{ м/с}. \end{cases}$$

Для места и времени старта имеем систему:

$$x_{11} = x_0 + v_1(t_{11} - t_0)$$
$$x_{21} = x_0 + v_2(t_{21} - t_0)$$

Отсюда находим

$$x_0 = \frac{(t_{11} - t_{21})v_1 v_2 + v_1 x_{21} - v_2 x_{11}}{v_1 - v_2} = 100 \text{ м}, \quad t_1 - t_0 = \frac{v_2(t_{21} - t_{11}) + x_{21} - x_{11}}{v_1 - v_2} = 40 \text{ с}.$$

Значит, расстояние от фонтана до дома равно 100 м, а время старта — 13:03:00.

3. Время, за которое Карамелька доехала до дома после последней встречи, равно

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{300 \text{ м}}{8 \text{ м/с}} = 37{,}5 \text{ с}.$$

Значит, время прибытия Карамельки домой — 13 ч 05 мин 17,5 с.

7.2. Рассмотрим случай $F = 40$ Н. Пусть N_1, N_2, N_3 — силы реакции опоры, действующие на соответствующие части бруска, тогда, так как $AB = BC = CD$,

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{mg}{3}.$$

Максимально возможная сила трения, действующая на брусок, равна

$$F_{\text{тр. max}} = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \mu_3 N_3 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\,\frac{mg}{3} = 30 \text{ Н}.$$

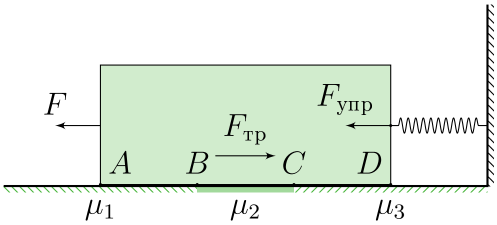
В зависимости от направления силы упругости и силы трения условие равновесия для тела может принимать следующий вид:

а)

$$F + F_{\text{упр}} = F_{\text{тр}} \leqslant F_{\text{трmax}}.$$

Откуда

$$F_{\text{упр}} \leqslant F_{\text{трmax}} - F = -10 \text{ Н}.$$

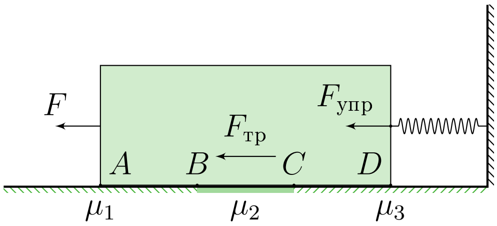


Значит, этот случай не подходит.

б)

$$F + F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}} = 0.$$

Хотя бы одна из сил должна быть отрицательной, значит этот случай тоже не подходит.

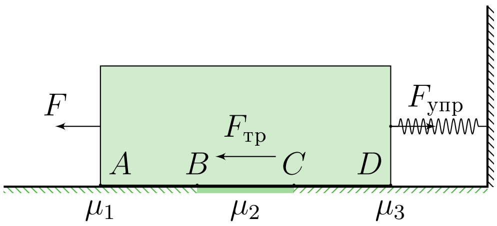


в)

$$F + F_{\text{тр}} = F_{\text{упр}}.$$

Откуда

$$k\Delta l = F_{\text{упр}} = F + F_{\text{тр}} \leqslant F_{\text{трmax}} + F = 70 \text{ Н}.$$



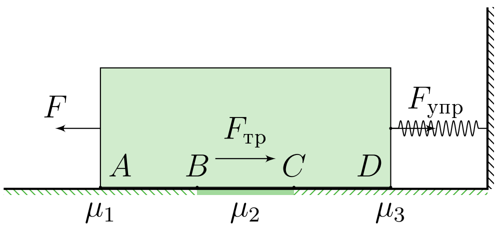
Значит, $\Delta l \leqslant 14$ см.

г)

$$F = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}}.$$

Откуда

$$k\Delta l = F_{\text{упр}} = F - F_{\text{тр}} \geqslant F - F_{\text{трmax}} = 10 \text{ Н}.$$



Значит, $\Delta l \geqslant 2$ см.

Найдем ограничения на начальную длину пружины (l_0):

$$\begin{cases} l - l_0 \geqslant 2 \text{ см}, \\ l - l_0 \leqslant 14 \text{ см}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $l = 30$ см, 16 см $\leqslant l_0 \leqslant$ 28 см.

Аналогично решая задачу для случая $F = 10$ Н, получаем 22 см $\leqslant l_0 \leqslant$ 34 см.

7.3. 1. Пусть V — объем льдины, $V_{\text{п}}$ — объем изначально непогруженной части льдины. Изначальное условие равновесия льдины:

$$mg = \rho_{\text{в}} g(V - V_{\text{н}}), \tag{1}$$

где m —масса льдины. После того как на льдину взобралась медведица массой $m_{\text{м}}$:

$$(m + m_{\text{м}})g = \rho_{\text{в}} g(V - 0{,}6 \cdot V_{\text{н}}). \tag{2}$$

Наконец, когда взобрался мишка-сын:

$$(m + m_{\text{м}} + m_{\text{с}})g = \rho_{\text{в}} g(V - 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot V_{\text{н}}), \tag{3}$$

где $m_{\text{с}}$ — масса мишки сына. Вычтем уравнение 1 из уравнения 2:

$$0{,}4\rho_{\text{в}} g V_{\text{н}} = m_{\text{м}} g. \tag{4}$$

Вычтем уравнение 2 из уравнения 3:

$$0{,}12\rho_{\text{в}} g V_{\text{н}} = m_{\text{с}} g. \tag{5}$$

Поделив уравнение 4 на уравнение 5, получим

$$\frac{m_{\text{м}}}{m_{\text{с}}} = \frac{0{,}4}{0{,}12}, \quad \Longrightarrow \quad m_{\text{с}} = 0{,}3 m_{\text{м}} = 60 \text{ кг}.$$

2. Пусть l_0 — максимальная глубина погружения льдины. Из уравнения 1:

$$\rho_{\text{л}} V g = \rho_{\text{в}} g(V - V_{\text{н}}), \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} V_{\text{н}} = 10 V_{\text{н}}.$$

Из уравнения 4:

$$V_{\text{н}} = \frac{m_{\text{м}}}{0{,}4\rho} = 0{,}5 \text{ м}^3.$$

Тогда объем погруженной части равен

$$V_{\text{п}} = V - 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot V_{\text{н}} = 9{,}52 V_1.$$

Значит,

$$l_0 = \frac{V_{\text{п}}}{S} = 0{,}238 \text{ м}.$$

В равновесии

$$\rho_{\text{в}} g S l_0 = (m + m_{\text{м}} + m_{\text{с}})g, \tag{6}$$

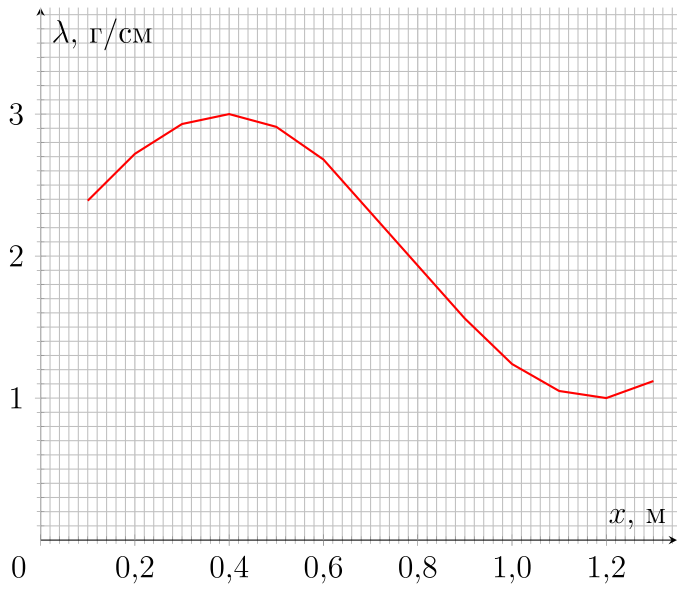
где S — площадь основания льдины. Условие равновесия, когда льдина поднялась на Δl:

$$F + \rho_{\text{в}} g S(l_0 - \Delta l) = (m + m_{\text{м}} + m_{\text{с}})g, \quad \Longrightarrow \quad F = \rho_{\text{в}} g S \Delta l,$$

где было использовано уравнение 6. Работа прикладываемой силы F пропорциональна площади под графиком $F(\Delta l)$ и равна

$$A = \frac{\rho_{\text{в}} g S \Delta l^2}{2} \approx 5{,}7 \text{ кДж}.$$

7.4. 1. Масса детали пропорциональна площади под графиком зависимости $\lambda(x)$. Построим приближенный график этой зависимости, соединив точки из таблицы отрезками.



Разобьем фигуру под графиком на трапеции, основания которых параллельны оси ординат. Вычислив площадь как сумму площадей этих трапеций, получим

$$m \approx 250{,}9 \text{ г}.$$

2. Объем детали равен объему вытесненной воды при погружении ее в воду. Значит,

$$\rho = \frac{m}{V} \approx 2{,}01 \text{ г/см}^3.$$

3. Рассмотрим маленький участок детали шириной Δx на расстоянии $x = 0{,}7$ м. Так как участок маленький, можно считать, что его линейная плотность одинакова по всей ширине. Тогда

$$\Delta m = \lambda \Delta x.$$

С другой стороны,

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x.$$

Отсюда получаем:

$$S = \frac{\lambda}{\rho}.$$

Из графика находим, что при $x = 0{,}7$ м линейная плотность равна $\lambda \approx 2{,}3$ г/см^3. Значит, $S \approx 1{,}15$ см^2.

Критерии 7 класс

Критерии 1 задача

Способ 1

1. Построен график зависимостей координат Коржика и Компота от времени — 3 балла.
2. Определены координаты точки пересечения графиков — 3 балла.
3. Найдено время старта Коржика и Компота — 1 балл.
4. Определено расстояние от фонтана до дома — 1 балл.
5. Найдено время прибытия Карамельки домой — 2 балла.

Способ 2.

1. Найдена скорость Коржика — 2 балла.
2. Найдена скорость Компота — 2 балла.
3. Составлена система, из которой можно определить координату фонтана и время старта — 2 балла.
4. Найдено время старта Коржика и Компота — 1 балла.
5. Определено расстояние от фонтана до дома — 1 балл.
6. Найдено время прибытия Карамельки домой — 2 балла.

Критерии 2 задача

1. Найдена максимальная сила трения — 2 балла.
2. Рассмотрены все случаи направлений сил для $F = 40$ Н и $F = 10$ Н — по 2 балла.
3. Найдены ограничения на Δl — по 1 баллу.
4. Получен ответ — по 1 баллу.

Критерии 3 задача

1. Записано условие равновесия льдины — 1 балл.
2. Записано условие равновесия льдины и медведицы — 1 балл.
3. Записано условие равновесия после того, как взобрался мишка-сын — 1 балл.
4. Получена масса мишки-сына — 2 балла.
5. Вычислена длина погружённой части — 2 балла.
6. Найдена сила, с которой нужно поднимать — 1 балл.
7. Вычислена работа — 2 балла.

Критерии 4 задача

1. Указано, что масса пропорциональна площади под графиком $\lambda(x)$ — 2 балла.
2. Определена масса детали — 2 балла.
3. Записана формула плотности — 1 балл.
4. Определена плотность детали — 1 балл.
5. Получена формула для площади сечения — 1 балл.
6. По графику определено значение λ — 2 балла.
7. Получен численный ответ для площади сечения — 1 балл.

Олимпиада 8 класс

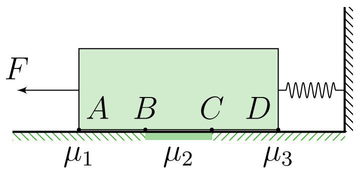
8.1. Коржик, Карамелька и Компот решили «нагулять» аппетит перед обедом. Для этого они вышли из дома, стоящего вдоль прямой дороги, и подошли по ней к фонтану. В какой-то момент Коржик и Компот побежали от фонтана по дороге с постоянными скоростями. Спустя некоторое время Карамелька взяла велосипед и стала двигаться между ними так, что сначала догнала Коржика, затем Компота, потом опять Коржика и потом снова Компота. Сразу после последней встречи Карамелька поехала домой со скоростью 8 м/с. Данные о встречах Карамельки с котиками приведены в таблице:

x, м	200	-100	300	-300
t, чч:мм:сс	13:03:40	13:03:50	13:04:20	13:04:40

Здесь x — координата котика относительно дома в момент встречи с Карамелькой, t — время, в которое произошла встреча.

1. Определите время старта Коржика и Компота.
2. Определите расстояние от фонтана до дома.
3. Определите время прибытия Карамельки домой.

8.2. Система состоит из однородного бруска длиной 90 см и массой 6 кг, прикреплённого к стене с помощью пружины жёсткостью 5 Н/см. Покрытие пола неоднородно и брусок взаимодействует с ним с коэффициентами трения 0,7, 0,6 и 0,2 соответственно. При действии на брусок горизонтальной силы F он может находиться в равновесии в положении, указанном на рисунке. Найдите возможные длины недеформированной пружины для случаев $F = 40$ Н и $F = 10$ Н. Известно, что отрезки AB, BC и CD равны.



8.3. В Северном Ледовитом океане недалеко от Новой земли, где впадают в Карское море Обь и Енисей, плавали льдины с плоскими основаниями и вертикальными стенками. После того как на льдину с площадью основания 20 м^2 взобралась белая медведица массой 200 кг, объём надводной части уменьшился на 40%. Когда к медведице на льдину взобрался белый мишка — сын, объём надводной части уменьшился еще на 20% от текущей величины.

1. Определите массу мишки-сына.
2. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы полностью вытащить льдину с мишками из воды?

Для второго пункта плотность воды и льда примите равными 1000 кг/м^3 и 900 кг/м^3 соответственно.

8.4. Кольцо, сделанное из однородной проволоки с сопротивлением $R = 100$ Ом, подсоединили к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 20$ В и внутренним сопротивлением $r = 24$ Ом.

1. Найдите в каком отношении надо поделить кольцо, чтобы его сопротивление было равно 9 Ом? В качестве ответа приведите отношение длин получившихся дуг окружностей.
2. Найдите в каком отношении должны делить кольцо контакты батарейки, чтобы мощность тепловых потерь на кольце была равна 4 Вт? В качестве ответа приведите отношение длин получившихся дуг окружностей.
3. Найдите в каком отношении должны делить кольцо контакты батарейки, чтобы мощность тепловых потерь на кольце была максимальной? В качестве ответа приведите отношение длин получившихся дуг окружностей.
4. Найдите чему равна максимальная мощность тепловых потерь на кольце?

Решение 8 класс

8.1. Смотрите решение 1 задачи 7 класса.

8.2. Смотрите решение 2 задачи 7 класса.

8.3. Смотрите решение 3 задачи 7 класса.

8.4. **1.** Пусть R_1, R_2 — сопротивления полученных дуг кольца. Так как суммарная длина этих дуг равна длине кольца, а сопротивление дуги пропорционально ее длине,

$$R_1 + R_2 = R.$$

Пусть R_0 — сопротивление кольца. Две дуги окружности соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_0}.$$

Из этих уравнений следует уравнение на R_1:

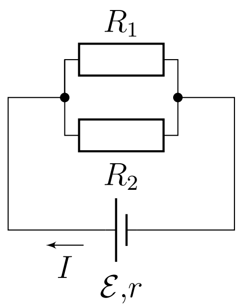
$$R_1^2 - RR_1 + RR_0 = 0.$$

Если подставить $R_0 = 9$ Ом, $R = 100$ Ом, получим

$$R_1 = 10\text{ Ом}, \quad R_2 = 90\text{ Ом}.$$

Значит, нужно делить кольцо в отношении $1:9$.

2. Запишем закон Ома:



$$IR_0 + Ir = \mathscr{E}, \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\mathscr{E}}{r + R_0}.$$

Мощность тепловых потерь в кольце равна

$$P = I^2 R_0 = \frac{\mathscr{E}^2 R_0}{(R_0 + r)^2}.$$

Решив это уравнение относительно R_0 с учетом того, что $P = 4$ Вт, $r = 24$ Ом, получим

$$R_0 = 16\text{ Ом}, \quad \text{или} \quad R_0 = 36\text{ Ом}.$$

Из первого пункта известно уравнение на R_1:

$$R_1^2 - RR_1 + RR_0 = 0.$$

Если $R = 16$ Ом, получаем $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 80$ Ом. В случае $R_0 = 36$ Ом решений нет. Значит, нужно делить кольцо в отношении $1:4$.

3. Мощность тепловых потерь на кольце равна

$$P = \frac{\mathscr{E}^2 R_0}{(R_0 + r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{r\left(\sqrt{\frac{R_0}{r}} + \sqrt{\frac{r}{R_0}}\right)^2}.$$

Из неравенства о средних следует, что

$$\sqrt{\frac{R_0}{r}} + \sqrt{\frac{r}{R_0}} \geqslant 2,$$

причем равенство достигается при $R_0 = r$. Отсюда получаем уравнение на R_1:

$$R_1^2 - RR_1 + Rr = 0, \quad \Longrightarrow \quad R_1 = 40 \text{ Ом}, \quad R_2 = 60 \text{ Ом}.$$

Значит, нужно делить кольцо в отношении $2:3$.

4. Из 3 пункта известно, что максимальная мощность достигается при $R = r$:

$$P_{\max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Критерии 8 класс

Критерии 1 задача

Смотрите критерии 2 задачи 7 класса.

Критерии 2 задача

Смотрите критерии 2 задачи 7 класса.

Критерии 3 задача

Смотрите критерии 3 задачи 7 класса.

Критерии 4 задача

1. Указано, что сумма сопротивлений дуг кольца равна сопротивлению проволоки — 1 балл.
2. Выписана формула для общего сопротивления кольца — 1 балл.
3. Найдено, в каком отношении нужно делить кольцо в пункте 1 — 1 балл.
4. Записан закон Ома — 1 балл.
5. Получена формула для мощности тепловых потерь в кольце — 1 балл.
6. Найдено, в каком отношении нужно делить кольцо в пункте 2 — 1 балл.
7. Найдено, при каком сопротивлении кольца мощность максимальна — 2 балла.
8. Найдено, в каком отношении нужно делить кольцо в пункте 3 — 1 балл.
9. Найдена максимальная мощность — 1 балл.

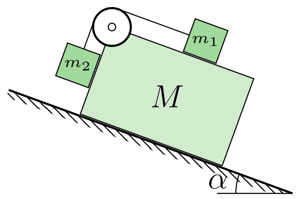
Олимпиада 9 класс

9.1. Снаряд бросили со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В верхней точке траектории он взрывается и образуется 2 осколка массами: $m/3$ и $2m/3$. Осколок меньшей массы полетел вертикально вниз и упал на землю через время τ. При этом второй осколок ещё находился в полёте.

1. По какой траектории двигается центр масс двух осколков после взрыва.
2. Где находится осколок бо́льшей массы в момент падения меньшего осколка. Начало координат расположено в точке броска снаряда.
3. Какое ограничение на τ следует из условия задачи?

Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g.

9.2. Брусок массой M лежит на плоскости с углом наклона α. Через него перекинута нить, к которой закреплены грузы массой m_1 и m_2 (см. рис.). Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ.



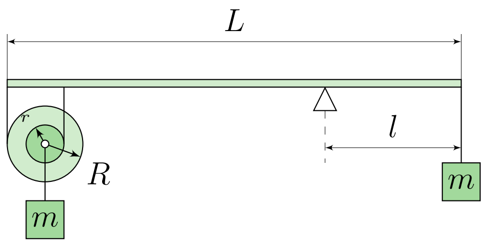
1. Найдите ускорения бруска и грузов, при условии что скольжение грузов вдоль бруска происходит без отрыва. Нити невесомые и нерастяжимые. Блок невесомый.

2 Каково условие на μ, чтобы было возможно движения без отрыва?

9.3. Кольцо, сделанное из однородной проволоки с сопротивлением $R = 100$ Ом, подсоединили к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 20$ В и внутренним сопротивлением $r = 24$ Ом.

1. Найдите в каком отношении надо поделить кольцо, чтобы его сопротивление было равно 9 Ом? В качестве ответа приведите отношение длин получившихся дуг окружностей.
2. Найдите в каком отношении должны делить кольцо контакты батарейки, чтобы мощность тепловых потерь на кольце была равна 4 Вт? В качестве ответа приведите отношение длин получившихся дуг окружностей.
3. Найдите в каком отношении должны делить кольцо контакты батарейки, чтобы мощность тепловых потерь на кольце была максимальной? В качестве ответа приведите отношение длин получившихся дуг окружностей.
4. Найдите чему равна максимальная мощность тепловых потерь на кольце?

9.4. Два груза одинаковой массы подвешены к невесомому рычагу — один за нить, прикреплённую к правому концу рычага, другой через блок-катушку с разными радиусами намотки нити (см. рис.).

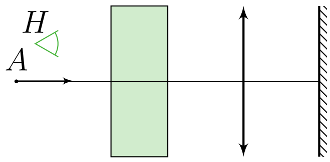


1. Найдите расстояние l от правого конца рычага до точки опоры, если известно что система находится в равновесии. Известно, что внешний радиус катушки — R, внутренний — $R/2$, длина рычага — $6R$.

Катушка невесомая, нити невесомые и нерастяжимые.

2. Как изменится ответ, если рычаг имеет массу, в 6 раз большую массы груза?

9.5. Плоскопараллельная пластина, собирающая линза и зеркало находятся параллельно друг другу и перпендикулярно главной оптической оси линзы. Толщина пластины $H = 5$ см, показатель преломления стекла $n = 5/3$. Фокусное расстояние линзы равно $F = 10$ см. Муравей начинает двигаться со скоростью V из точки A на расстоянии $a = 17$ см от линзы. Зеркало располагается на расстоянии $l = 2{,}5F$ от линзы. Наблюдатель H находится с той же стороны оптической системы, что и муравей. Найдите скорость изображения муравья для наблюдателя.



Решение 9 класс

9.1. 1. Суммарная сила, действующая на систему из двух осколков, равна

$$F = \frac{mg}{3} + \frac{2mg}{3} = mg.$$

Она равна силе, действовавшей на снаряд до взрыва, поэтому, пока ни один из грузов не упал на землю, центр масс двух осколков будет двигаться по той же параболе, по которой летел снаряд.

2. Взрыв произошел в верхней точке траектории снаряда, значит координаты центра масс осколков в момент взрыва равны

$$x_{\text{в}} = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}, \quad y_{\text{в}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Скорость центра масс в этот момент равна $v_0\cos\alpha$ и направлена горизонтально. За время τ падения меньшего осколка координаты центра масс изменятся на

$$\Delta x_{\text{ц. м.}} = v_0\cos\alpha\tau, \quad \Delta y_{\text{ц. м.}} = -\frac{g\tau^2}{2}.$$

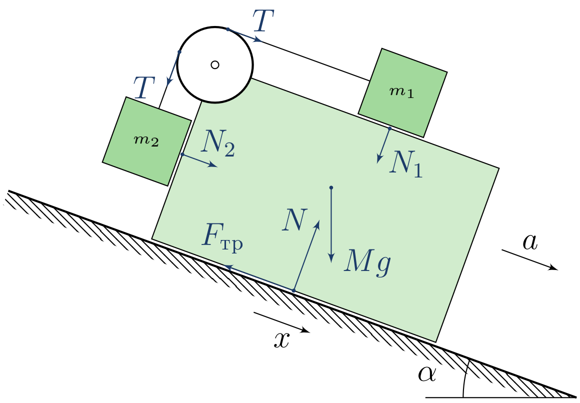
Пусть $x_{\text{б}}, y_{\text{б}}$ — координаты большего осколка в момент падения меньшего, тогда из определения центра масс получаем

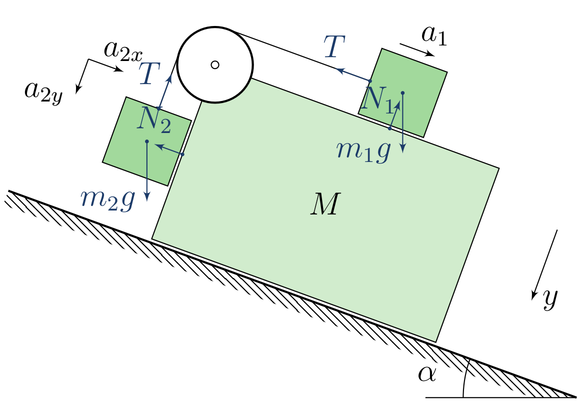
$$\begin{cases} x_{\text{в}} + \Delta x_{\text{ц. м.}} = \dfrac{2}{3}x_{\text{б}} + \dfrac{1}{3}x_{\text{в}}, \\ y_{\text{в}} + \Delta y_{\text{ц. м.}} = \dfrac{2}{3}y_{\text{б}}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{\text{б}} = x_{\text{в}} + \dfrac{3}{2}\Delta x_{\text{ц. м.}} = \dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} + \dfrac{3}{2}v_0\cos\alpha\tau, \\ y_{\text{б}} = \dfrac{3}{2}y_{\text{в}} + \dfrac{3}{2}\Delta y_{\text{ц. м.}} = \dfrac{3v_0^2\sin^2\alpha}{4g} - \dfrac{3g\tau^2}{4}. \end{cases}$$

3. Так как меньший груз после взрыва полетел вертикально вниз, время его падения меньше, чем время свободного падения с высоты $y_{\text{в}}$, поэтому

$$0 < \tau < \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

9.2. 1. Расставим силы, действующие на каждый груз и брусок (см. рис.).





Предположим, что брусок проскальзывает, тогда $F_{\text{тр}} = \mu N$. Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$\begin{aligned} Ox: &\quad Ma = Mg\sin\alpha + N_2 + T - \mu N, \\ Oy: &\quad 0 = Mg\cos\alpha + N_1 + T - N. \end{aligned}$$

Для груза 1:

$$\begin{aligned} Ox: &\quad m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - T, \\ Oy: &\quad 0 = m_1 g \cos\alpha - N_1. \end{aligned}$$

Для груза 2:

$$\begin{aligned} Ox: &\quad m_2 a_{2x} = m_2 g \sin\alpha - N_2, \\ Oy: &\quad m_2 a_{2y} = m_2 g \cos\alpha - T. \end{aligned}$$

В системе отсчета, связанной с бруском, нить скользит по неподвижному блоку. В этой системе отсчета ускорения грузов равны соответственно

$$\vec{a}_{1\ \text{отн}} = \vec{a}_1 - \vec{a}, \quad \text{и} \quad \vec{a}_{2\ \text{отн}} = \vec{a}_{2x} + \vec{a}_{2y} - \vec{a}.$$

Так как второй груз не отрывается от бруска, $\vec{a}_{2\ \text{отн}}$ направлено вдоль оси Oy. Значит,

$$\vec{a}_{2x} = \vec{a}.$$

Так как нить нерастяжима, $a_{1\ \text{отн}} = a_{2\ \text{отн}}$, значит

$$a_1 - a = -a_{2y}.$$

Подставив выражения для a_{2x} и a_{2y} в законы Ньютона, а также выразив N и N_1, получим

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\alpha + N_2 + T - \mu((M+m_1)g\cos\alpha + T), \\ m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - T, \\ m_2 a = m_2 g \sin\alpha - N_2, \\ m_2(a - a_1) = m_2 g \cos\alpha - T. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получаем

$$\begin{aligned} a &= g\sin\alpha + \frac{m_1 m_2 - \mu(M(m_1+m_2) + m_1^2 + 2m_1 m_2))}{M(m_1+m_2) + m_2^2 + (2-\mu)m_1 m_2} g\cos\alpha, \\ a_1 &= g\sin\alpha - \frac{(m_2 + M + \mu(M+m_1))m_2}{M(m_1+m_2) + m_2^2 + (2-\mu)m_1 m_2} g\cos\alpha. \end{aligned}$$

Используя связь a и a_1 с a_{2x}, a_{2y}, находим

$$a_{2x} = a, \quad a_{2y} = \frac{(m_2 - \mu m_1)(m_1 + m_2 + M)}{M(m_1+m_2) + m_2(m_2 + m_1(2-\mu))} g\cos\alpha, \quad a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2}.$$

2. Условие движения без отрыва: $N_2 > 0$. Выразив N_2 из системы уравнений выше, получим

$$N_2 = -\frac{\mu(M(m_1+m_2) + m_1^2 + 2m_1 m_2) - m_1 m_2}{\mu m_1 m_2 - (M(m_1+m_2) + m_2^2 + 2m_1 m_2)} m_2 g \cos\alpha.$$

Числитель и знаменатель обнуляются соответственно при

$$\mu = \mu_1 = \left(\frac{M}{m_{12}} + \frac{m_1}{m_2} + 2\right)^{-1}, \quad \text{и} \quad \mu = \mu_2 = \frac{M}{m_{12}} + \frac{m_2}{m_1} + 2,$$

где $m_{12} = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. При больших μ брусок перестанет проскальзывать. Граничное значение $\mu = \mu_{\text{crit}}$ определяется условием $a = 0$. Выразив из него μ_{crit}, получим

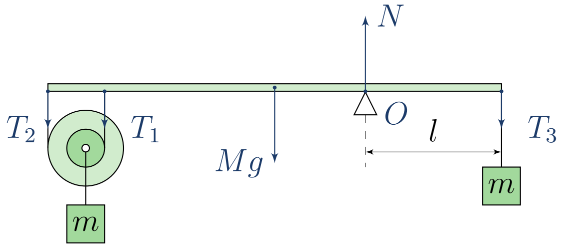
$$\mu_{\text{crit}} = \mu_1 \frac{1 + \mu_2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \mu_1 \operatorname{tg}\alpha}.$$

Видно, что $\mu_1 < \mu_{\text{crit}} < \mu_2$, значит μ_2 не достигается. Если брусок не проскальзывает, грузы не будут отрываться от него. Таким образом, условие движения без отрыва:

$$\mu > \mu_1 = \left(\frac{M}{m_{12}} + \frac{m_1}{m_2} + 2\right)^{-1}.$$

9.3. Смотрите решение 4 задачи 8 класса.

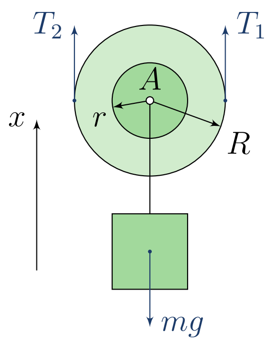
9.4. Расставим силы, действующие на рычаг (см. рис.).



Рассмотрим случай, когда рычаг имеет массу. Правило моментов относительно точки O:

$$mgl = Mg(3R - l) + T_2(6R - l) + T_1\left(6R - l - \frac{3}{2}R\right).$$

Расставим силы на систему «блок-груз» (см. рис.). Запишем правило моментов относительно точки A:



$$T_1 r - T_2 R = 0.$$

Запишем второй закон Ньютона для системы:

$$T_1 + T_2 - mg = 0.$$

Используя, что $r = R/2$, находим из последних двух уравнений

$$T_1 = \frac{2mg}{3}, \quad \frac{mg}{3}.$$

Подставив это в уравнение моментов, получим

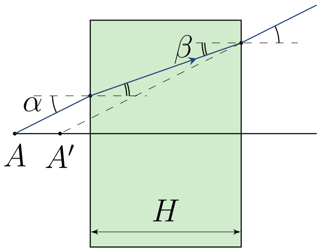
$$mgl = Mg(3R - l) + \frac{mg}{3}(6R - l) + \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}R - l\right)mg.$$

В случае $M = 0$ получаем

$$l = \frac{5}{2}R.$$

Для случая $M = 6m$ получаем

$$l = \frac{23}{8}R.$$



9.5. Рассмотрим ход луча при прохождении через пластину (см. рис.). Луч, вышедший из источника под углом α к главной оптической оси (ГОО) выйдет из пластины под таким же углом. Пусть изображением точки A является точка A', тогда

$$AA'\operatorname{tg}\alpha = H(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta), \quad \Longrightarrow \quad AA' = H\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

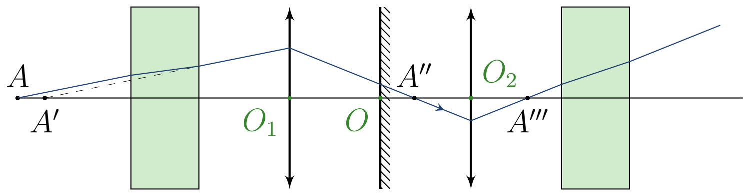
Из закона Снелла получаем

$$\sin\alpha = n\sin\beta.$$

Пользуясь тем, что углы малые, получаем

$$AA' = H\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Заметим, что при прохождении через пластину размер изображения не меняется.



Ход луча показан на рисунке выше. Из формулы тонкой линзы получаем

$$\frac{1}{A'O_1} + \frac{1}{A''O_1} = \frac{1}{F}, \quad \Longrightarrow \quad A''O_1 = \frac{F \cdot A'O_1}{A'O_1 - F} = 30 \text{ см}.$$

Увеличение равно

$$\Gamma_1 = \frac{A''O_1}{A'O_1} = 2.$$

Заметим, что $A''O_2 = O_1O_2 - A'O_1 = 20$ см. Из формулы тонкой линзы, примененной к отраженной линзе получаем

$$\frac{1}{A''O_2} + \frac{1}{A'''O_2} = \frac{1}{F}, \quad \Longrightarrow \quad A'''O_2 = \frac{F \cdot A''O_2}{A''O_2 - F} = 20 \text{ см}.$$

Увеличение равно

$$\Gamma_2 = \frac{A'''O_2}{A''O_2} = 1.$$

При прохождении через отраженную пластину размер изображения не изменяется.

Итоговое поперечное увеличение равно

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 2.$$

Продольное увеличение равно квадрату поперечного. Отсюда получаем связь малых перемещений изображения A''' и источника A:

$$\frac{\Delta x_{A'''}}{\Delta x_A} = \Gamma^2 = 4.$$

Значит, скорость муравья для наблюдателя u равна

$$u = 4V.$$

Критерии 9 класс

Критерии 1 задача

1. Найдена траектория центра масс осколков — 2 балла.
2. Определено положение осколка большей массы в момент падения меньшего осколка — 6 баллов.
3. Получено ограничение на τ — 2 балла.

Критерии 2 задача

1. Сделан рисунок и расставлены силы — 1 балл.
2. Записан второй закон Ньютона для бруска — 1,5 балла.
3. Записан второй закон Ньютона для грузов — по 1 баллу.
4. Записаны кинематические связи для ускорений — по 0,5 балла.
5. Найдены проекции ускорения второго груза — по 0,5 балла.
6. Найдены ускорения бруска и грузов — по 0,5 балла.
7. Записано условие движения без отрыва — 0,5 балла.
8. Показано, что условие движения без отрыва не выполняется — 0,5 балла.

Критерии 3 задача

Смотрите критерии 4 задачи 8 класса.

Критерии 4 задача

1. Сделан рисунок с силами — по 1 баллу за случаи $M = 0$ и $M = 6m$.
2. Записано правило моментов — по 2 балла.
3. Записан второй закон Ньютона для блока — по 0,5 балла.
4. Записано правило моментов для блока — по 0,5 балла.
5. Получен ответ — по 1 баллу.

Критерии 5 задача

1. Указано, что пластина «переносит» источник вправо — 1 балл.
2. Найдено расстояние от источника до изображения — 0,5 балла.
3. Получено увеличение пластины — 0,5 балла.
4. Показан ход луча — 1,5 балла.
5. Найдена точка пересечения луча с ГОО после прохождения линзы — 1,5 балла.
6. Найдено увеличение при прохождении через линзу — 0,5 балла.

7. Найдено расстояние от центра отраженной линзы до изображения источника в первой линзе — 0,5 балла.
8. Найдена точка пересечения луча с ГОО после прохождения отраженной линзы — 0,5 балла.
9. Найдено увеличение при прохождении через отраженную линзу — 0,5 балла.
10. Найдено итоговое поперечное увеличение — 0,5 балла.
11. Показано, что скорости относятся как квадрат поперечного увеличения — 1,5 балла.
12. Получен ответ — 1 балл.

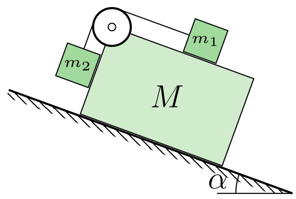
Олимпиада 10 класс

10.1. Снаряд бросили со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В верхней точке траектории он взрывается и образуется 2 осколка массами: $m/3$ и $2m/3$. Осколок меньшей массы полетел вертикально вниз и упал на землю через время τ. При этом второй осколок ещё находился в полёте.

1. По какой траектории двигается центр масс двух осколков после взрыва.
2. Где находится осколок бо́льшей массы в момент падения меньшего осколка. Начало координат расположено в точке броска снаряда.
3. Какое ограничение на τ следует из условия задачи?

Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g.

10.2. Брусок массой M лежит на плоскости с углом наклона α. Через него перекинута нить, к которой закреплены грузы массой m_1 и m_2 (см. рис.). Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ.

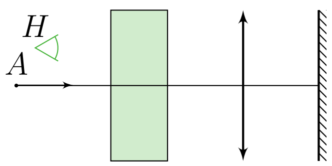


1. Найдите ускорения бруска и грузов, при условии что скольжение грузов вдоль бруска происходит без отрыва. Нити невесомые и нерастяжимые. Блок невесомый.

2 Каково условие на μ, чтобы было возможно движения без отрыва?

10.3. Тепловая машина, рабочим телом которой является одноатомный газ, совершает цикл $1-2-3-1$, состоящий из процесса $1-2$, в котором давление пропорционально объему, изохорного процесса $2-3$ и адиабатного процесса $3-1$. Максимальное давление газа в 8 раз больше давления в точке 1. Найдите КПД цикла.

10.4. Плоскопараллельная пластина, собирающая линза и зеркало находятся параллельно друг другу и перпендикулярно главной оптической оси линзы. Толщина пластины $H = 5$ см, показатель преломления стекла $n = 5/3$. Фокусное расстояние линзы равно $F = 10$ см. Муравей начинает двигаться со скоростью V из точки A на расстоянии $a = 17$ см от линзы. Зеркало располагается на расстоянии $l = 2{,}5F$ от линзы. Наблюдатель H находится с той же стороны оптической системы, что и муравей. Найдите скорость изображения муравья для наблюдателя.



10.5. Плоский конденсатор сделан из пластин с площадью S, начальное расстояние между которыми d. Конденсатор подключили к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ через резистор R.

1. После того как конденсатор зарядился, его отключают от батареи и увеличивают расстояние между пластинами в 4 раза. Найдите работу, которую необходимо совершить для этого.

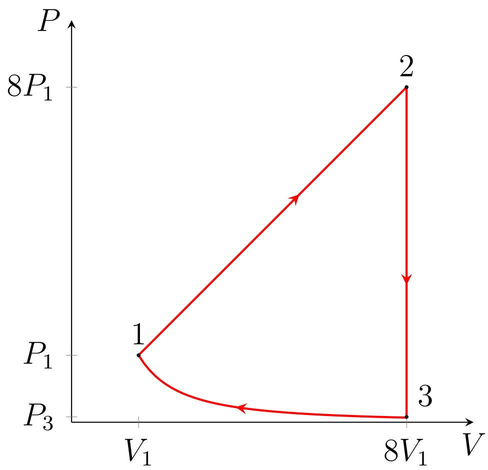
2. Каким станет ответ на предыдущий вопрос, если конденсатор не отключать от батареи, а расстояние между пластинами медленно увеличить в 4 раза?
3. Конденсатор не отключали от батареи, и когда он полностью зарядился — расстояние между пластинами резко увеличили в 4 раза. Какую работу при этом совершили? Сколько теплоты выделится после этого в цепи на резисторе?
4. Незаряженный конденсатор с начальным расстоянием между пластинами равным d подключили к той же батарее и резистору. В момент времени, когда напряжение на конденсаторе было равно $\mathscr{E}/2$ расстояние между пластинами начинают изменять так, что сила тока остается постоянной. Как зависит расстояние между пластинами от времени?
5. Для ситуации из предыдущего пункта найдите работу, которую надо совершить в данном процессе к моменту времени, когда заряд на конденсаторе увеличится вдвое.

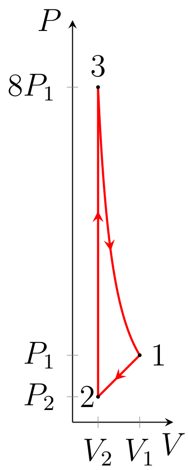
Решение 10 класс

10.1. Смотрите решение 1 задачи 9 класса.

10.2. Смотрите решение 2 задачи 9 класса.

10.3. Условию задачи удовлетворяют два цикла (см. рис.). Рассмотрим тот, в котором давление в процессе 1–2 увеличивается.





Из уравнения идеального газа для точек 1, 2, 3 получаем

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_3V_3}{T_3} = \nu R.$$

Т. к. в процессе 1–2 $P \propto V$,

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2}.$$

Максимальное давление в цикле достигается в точке 2, поэтому

$$P_{\max} = P_2 = 8P_1 \quad \Longrightarrow \quad V_2 = 8V_1.$$

Процесс 2–3 изохорный, значит:

$$V_2 = V_3 = 8V_1.$$

Т. к. процесс 3–1 адиабатический, а рабочее тело — одноатомный газ,

$$P_1V_1^\gamma = P_3V_3^\gamma, \text{ где } \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \quad \Longrightarrow \quad P_3 = P_1\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^\gamma = \frac{1}{32}P_1.$$

Газ совершает работу в процессах 1–2 и 3–1. Работа газа в процессе 1–2 равна

$$A_{12} = \frac{P_2V_2}{2} - \frac{P_1V_1}{2} = \frac{63}{2}P_1V_1.$$

Используя первое начало термодинамики найдем работу газа в процессе 3–1:

$$A_{31} = -\Delta U_{31} = -\frac{3}{2}(P_1V_1 - P_3V_3) = -\frac{9}{8}P_1V_1.$$

К газу подводят тепло только в процессе 1–2. Из первого начала термодинамики получаем

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 126P_1V_1.$$

Значит, КПД в этом случае равен

$$\eta_1 = \frac{|A|}{Q_+} = \frac{A_{12} + A_{23}}{Q_{12}} = \frac{27}{112} \approx 24\,\%.$$

Во втором случае аналогично можно получить $\eta_2 \approx 44\,\%$.

10.4. Смотрите решение 5 задачи 9 класса.

10.5. **1.** Так как конденсатор отключен от цепи, заряд на нем не изменяется. Пусть C_0 — начальная емкость конденсатора, C_1 — емкость после увеличения расстояния, тогда

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{4d}.$$

Заряд на конденсаторе равен

$$q = C_0 \mathscr{E}.$$

Начальная и конечная энергии конденсатора равны

$$W_0 = \frac{q^2}{2C_0} = \frac{C_0 \mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S \mathscr{E}^2}{2d}, \quad W_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{C_0^2 \mathscr{E}^2}{2C_1} = \frac{2\varepsilon_0 S \mathscr{E}^2}{d}.$$

Искомая работа равна

$$A = W_1 - W_0 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 S \mathscr{E}^2}{d}.$$

2. Если конденсатор не отключать от батареи, напряжение на нем будет сохраняться. Т. к. расстояние между пластинами увеличивается медленно, ток в цепи будет мал, значит теплом, выделившимся на резисторе, можно пренебречь. Начальная и конечная энергии конденсатора равны

$$W_0 = \frac{C_0 \mathscr{E}^2}{2}, \quad W_1 = \frac{C_1 \mathscr{E}^2}{2}.$$

Поскольку напряжение на конденсаторе постоянно, $q_0 = C_0 \mathscr{E}$, $q_1 = C_1 \mathscr{E} = C_0 \mathscr{E}/4$. Значит, заряд на конденсаторе изменился на

$$\Delta q = q_1 - q_0 = -\frac{3}{4} C_0 \mathscr{E}.$$

Следовательно, работа источника равна

$$A_{\text{ист}} = \mathscr{E} \Delta q = -\frac{3}{4} C_0 \mathscr{E}^2.$$

Тогда из закона изменения энергии (ЗИЭ) получаем искомую работу:

$$A + A_{\text{ист}} = W_1 - W_0, \quad \Longrightarrow \quad A = W_1 - W_0 - A_{\text{ист}} = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon_0 S \mathscr{E}^2}{d}.$$

3. Поскольку пластины раздвинули быстро, заряд на конденсаторе не успел измениться. Значит, как и в первом пункте,

$$A = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 S \mathscr{E}^2}{d}.$$

Начальный и конечный заряды конденсатора равны $q_0 = C_0\mathscr{E}$, $q_1 = C_1\mathscr{E}$. Изменение энергии конденсатора:

$$\Delta W = \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_0^2}{2C_0} = -\frac{15}{8}C_0\mathscr{E}.$$

Работа источника равна

$$A_{\text{ист}} = \mathscr{E}(q_1 - q_0) = -\frac{3}{4}C_0\mathscr{E}.$$

Теплоту, выделившуюся на резисторе находим из ЗИЭ:

$$Q = A_{\text{ист}} - \Delta W = \frac{9}{8}C_0\mathscr{E}.$$

4. Напряжение на резисторе с одной стороны равно IR, а с другой $\mathscr{E} - \mathscr{E}/2$, значит

$$I = \frac{\mathscr{E}}{2R}.$$

Так как ток постоянный, заряд на конденсаторе изменяется по закону

$$q(t) = q_0 + It.$$

Напряжение на конденсаторе постоянно, так как напряжение на резисторе постоянно. Значит,

$$\frac{q(t)}{C(t)} = \frac{\mathscr{E}}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\left(q_0 + \frac{\mathscr{E}}{2R}t\right)\frac{d(t)}{\varepsilon_0 S} = \frac{\mathscr{E}}{2}, \quad \Longrightarrow \quad d(t) = \frac{\varepsilon_0 S d_0 R}{\varepsilon_0 S R + d_0 t}.$$

5. Начальный и конечные заряды на конденсаторе равны

$$q_0 = \frac{C_0\mathscr{E}}{2}, \quad q_1 = 2q_0 = C_0\mathscr{E}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = \frac{q_1\mathscr{E}/2}{2} - \frac{q_0\mathscr{E}/2}{2} = \frac{1}{8}C_0\mathscr{E}^2.$$

Работа источника равна

$$A_{\text{ист}} = \mathscr{E}(q_1 - q_0) = \frac{C_0\mathscr{E}^2}{2}.$$

Тепло, выделившееся на резисторе, равно

$$Q_R = I^2 R\Delta t = IR \cdot \Delta q = \frac{C_0\mathscr{E}^2}{4}.$$

Из ЗИЭ получаем искомую работу:

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W + Q_R, \quad \Longrightarrow \quad A = \Delta W + Q_R - A_{\text{ист}} = -\frac{1}{8}\frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{d}.$$

Критерии 10 класс

Критерии 1 задача

Смотрите критерии 1 задачи 9 класса.

Критерии 2 задача

Смотрите критерии 2 задачи 9 класса.

Критерии 3 задача

1. Указано, что в задаче два случая — 2 балла.
2. Записаны уравнения состояния для точек 1, 2, 3 — по 0,5 балла.
3. Записано соотношение объемов 2 и 3 — 0,5 балла
4. Записано уравнение прямой для процесса 1–2 — 1 балл.
5. Записано уравнение адиабаты — 1 балл.
6. Найдено количество теплоты, подведенное к газу — 1 балл.
7. Найдена работа газа в цикле — 1 балл.
8. Получен ответ для первого случая — 1 балл.
9. Получен ответ для второго случая — 1 балл.

Критерии 4 задача

Смотрите критерии 5 задачи 9 класса.

Критерии 5 задача

1. Найдена работа для ситуации в пункте 1 — 2 балла.
2. Указано, как изменится ответ в пункте 2 — 2 балла.
3. Найдена работа в пункте 3 — 1 балл.
4. Найдено количество теплоты, выделившейся на резисторе — 1 балл.
5. Получена зависимость расстояния между пластинами от времени — 2 балла.
6. Найдена работа для ситуации в пункте 4 — 2 балла.