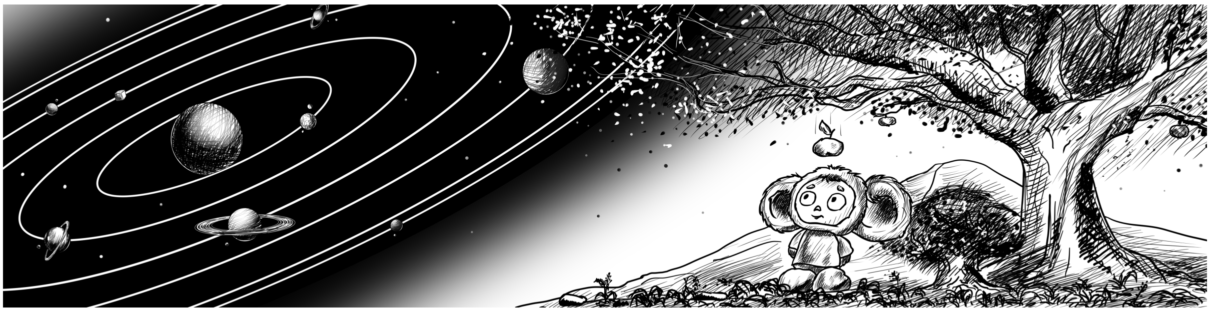


Олимпиадные школы МФТИ

Отделение физики
vk.com/4mipt

Условия и решения олимпиады ЛОШ-2022 1 смена

Авторы условий:

7 класс
1. Кухарев С.
2. Колдунов Л.
3. Вергунов А.
4. Вергунов А.

8 класс
1. Кухарев С.
2. Киреев А.
3. Вергунов А.
4. Бейлин Н.

9 класс
1. Корнева А.
2. Миронов С.
3. Бейлин Н.
4. Киреев А.
5. Курлович А.

10 класс
1. Корнева А.
2. Миронов С.
3. Колдунов Л.
4. Колдунов Л.
5. Курлович А.

Рисунки — Макс Еськин.

Набор и вёрстка — А. Свинцицкий, Д. Хромов.

Долгопрудный, 2022 г.

Содержание

Комментарий про сложность задач

Данный раздел сделан для преподавателей. Школьникам мы рекомендуем сначала прорешать задачи самостоятельно, а комментарий можно использовать в качестве подсказки.

7.1. и 8.1. Очень тяжёлая и красивая задача. Уровень — финал Максвелла 8 класс или регион (РЭ) 9 класс. Если бы мы вовремя осознали, что задача получится такой классной, то мы бы отправили её в ЦПМК. К сожалению, сейчас уже слишком поздно, но мы не можем ей не поделиться. Для седьмого класса задача очень тяжелая, но соответствует программе Максвелла.

7.2. РЭ 7 или 8 класс, или финал Максвелла 7й класс. Стандартная статика + 1 идея.

7.3. Простая и классическая задача на гидростатику. Утешительная, уровень МЭ 8 класса.

7.4. Переделанный в псевдопрак эксперимент с одного из этапов Всероссийской олимпиады по физике.

8.2. Задача, которую можно давать 8-11 классам, и она им будет одинаково сложной. Уровень в зависимости от класса меняется от МЭ до РЭ.

8.3. Гидростатика МЭ.

8.4. и 9.4. Электричество ШЭ.

9.1. и 10.1. Баллистика уровня МЭ-РЭ.

9.3. и 10.2. Несложная задача уровня МЭ. Школьники регулярно неправильно читают условие и считают, что на рисунке представлен весь график, хотя в условии написано несколько раз, что это фрагмент.

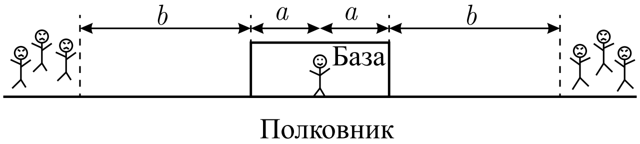
9.5. и 10.5. Оптика уровня МЭ. Несложная задача, но, как всегда, вызывает вопросы у школьников, т.к. это оптика.

10.3. Задача, которую давно хотелось оформить, чтобы разобрать все стандартные случаи, когда можно легко отгадать ответ в задачах про концентрические сферы. Нужна именно как методический материал. Уровень МЭ.

10.4. МЭ 11го класса. Часто встречается как составная часть в других задачах.

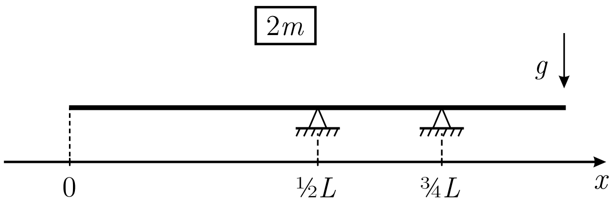
Олимпиада 7 класс

7.1. Однажды на почте. По долгу чести Кунг-фу Полковнику пришлось в одиночку защищать Подземную Базу от зомби-самураев. Попасть в Подземную Базу можно по одному из двух длинных и узких пещерных коридоров. Как только хотя бы один зомби-самурай попадёт на Базу, зомби-вирус мгновенно разнесётся по базе, превратив всех жителей в зомби-ронинов, что недопустимо. Скорость Полковника в k раз больше скорости Зомби-самураев. При контакте с зомби-самураем Полковник мгновенно убивает его при помощи своего кунг-фу. Внутри базы расстояние между входами равно $2a$. Изначально Полковник находится внутри базы на равном расстоянии от входов, а зомби — снаружи базы на расстоянии не меньше b от входов. При каком значении a Полковник может быть уверен, что ему удастся защитить Подземную Базу от любого количества зомби?

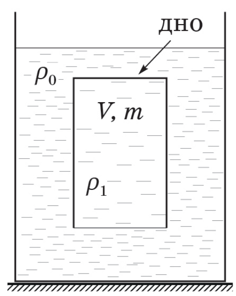


7.2. Неоднордный стержень. На двух опорах располагается стержень длиной L и массой m такой, что его линейная плотность изменяется по закону $\lambda_0 x/L$, где λ_0 постоянная величина, а x — его координата.

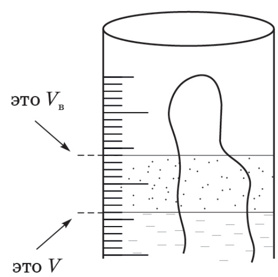
1. Чему равно λ_0?
2. В какую область надо поместить груз массой $2m$, чтобы система находилась в положении равновесия?
3. Как изменится ответ на предыдущий вопрос, если стержень повернуть так, что его концы поменяются местами?



7.3. Две жидкости. В сосуд с водой плотностью $\rho_0 = 1000$ кг/м^3 погружен вверх дном тонкостенный цилиндрический стакан массой $m = 100$ г (см. рис.). Внутренний объем V стакана равен 150 см^3, полностью заполнен маслом плотностью $\rho_1 = 800$ кг/м^3. Какую силу необходимо прикладывать ко дну стакана, чтобы он находился в равновесии? Жидкости не смешиваются, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



7.4. Китайский чай. В мерный цилиндр с неизвестной жидкостью и плавающим в ней телом равными порциями добавляют подкрашенную воду плотностью $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3. Таблица с экспериментальными данными содержит зависимость объема V неизвестной жидкости (измеренного по границе раздела жидко-



стей в мерном цилиндре) и объема $V_в$ подкрашенной воды (измеренного по верхней границе воды) от числа N добавленных шприцов. Постройте графики полученных зависимостей $V(N)$, $V_в(N)$ и определите:

1. объем $V_ш$ свободного хода шприца;
2. плотность ρ неизвестной жидкости;
3. массу m погруженного тела.

Замечание. Неизвестная жидкость не смешивается с водой.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$V_в$, мл	43	45	47	50	52	54	56	58	60	62
V, мл	43	41	40	38	37	35	33	32	30	29

N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$V_в$, мл	64	66	68	70	73	75	76	78	80	81
V, мл	27	26	25	23	22	20	19	19	18	18

N	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$V_в$, мл	83	84	85	86	87	88	90	91	92
V, мл	18	18	18	18	18	18	18	18	18

Решение 7 класс

7.1. В задаче не указано с какой плотностью зомби расположены в тоннеле, поэтому будем рассматривать «худший» случай, т. е. моделировать их непрерывным лучом, и рассматривать стратегию Полковника в общем виде.

Без ограничения общности будем считать, что сначала он выбегает из базы через правый выход, пробегает расстояние x_0, попутно убивая всех зомби, потом разворачивается и бежит налево. Там он отбегает от базы на x_1, затем разворачивается и так далее.

На x_0 есть очевидное условие: Полковник должен успеть вернуться к левой двери быстрее, чем туда доберутся зомби. Если обозначить скорость зомби как u, а скорость Полковника как v, получим:

$$\frac{3a + 2x_0}{v} \leqslant \frac{b}{u}.$$

Также есть аналогичное условие на x_1. Полковник должен успеть вернуться к правому выходу до того, как туда придут зомби:

$$\frac{4a + x_0 + 2x_1}{v} \leqslant \frac{x_0}{u}.$$

Таким образом можно получить бесконечную цепочку неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{3a + 2x_0}{v} \leqslant \dfrac{b}{u}; \\ \dfrac{4a + x_0 + 2x_1}{v} \leqslant \dfrac{x_0}{u}; \\ \dfrac{4a + x_1 + 2x_2}{v} \leqslant \dfrac{x_1}{u}; \\ \ldots \end{cases}$$

Учтем, что $x_i \geqslant 0$, и перепишем эти неравенства в более удобной форме:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_0 \leqslant \dfrac{1}{2}(kb - 3a); \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{1}{2}\left((k-1)x_0 - 4a\right); \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left((k-1)x_1 - 4a\right); \\ \ldots \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств следует, что:

$$kb \geqslant 3a; \qquad k > 1.$$

Поскольку x_{i-1} входят в неравенства для x_i со знаком «+», то чем больше x_{i-1}, тем мягче условие для x_i. Так как нас интересует существование хотя бы одной стратегии

Полковника, заменим неравенства на равенства:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_0 = \dfrac{1}{2}(kb - 3a); \\ 0 \leqslant x_1 = \dfrac{1}{2}\left((k-1)x_0 - 4a\right); \\ 0 \leqslant x_2 = \dfrac{1}{2}\left((k-1)x_1 - 4a\right); \\ \ldots \end{cases}$$

Так как x_i связано с x_{i-1} одинаково, можно проанализировать последовательность x_i на убывание. Если иксы убывают, то мы попадём в зону риска, при которой возможно отсутствие решения.

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{2}\left((k-3)x_i - 4a\right) \geqslant 0;$$

$$(k-3)x_i \geqslant 4a.$$

Видно, что последовательность не будет быстро убывать, только если выполнены два условия:

$$k > 3; \qquad x_i \geqslant \frac{4a}{k-3}.$$

Если последнее неравенство выполняется для x_0, то оно верно и для всех остальных x_i. Получаем:

$$\frac{1}{2}(kb - 3a) \geqslant \frac{4a}{k-3}.$$

Итого все условия:

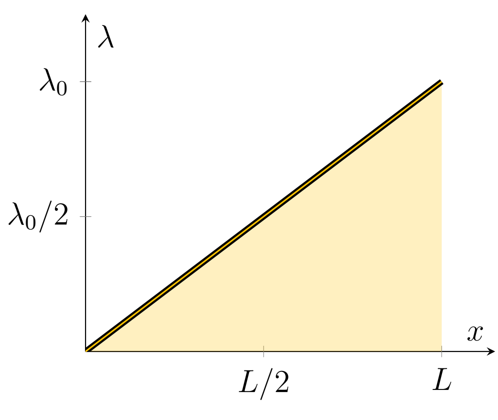
$$k > 3; \qquad kb \geqslant 3a; \qquad \frac{1}{2}(kb - 3a) \geqslant \frac{4a}{k-3}.$$

Окончательно находим:

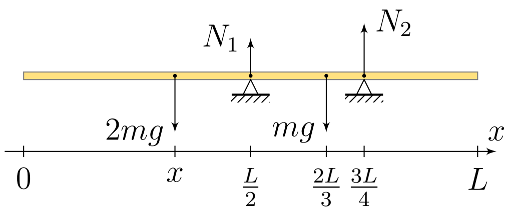
$$a \leqslant \frac{kb(k-3)}{8 + 3(k-3)}.$$

7.2. Построим график зависимости $\lambda(x)$. Массу стержня можно найти из площади под этим графиком. Тогда

$$m = \frac{1}{2}\lambda_0 L \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = \frac{2m}{L}.$$



Найдем центр масс стержня. Для этого рассмотрим однородную пластинку массой m в форме равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами длиной L, один из которых совпадает со стержнем. Заметим, что вдоль оси x масса обоих тел распределена одинаково, значит центр масс стержня имеет координату $x_{\text{цм}} = 2/3L$.



Граница области, в которую можно поместить груз массой $2m$ так, чтобы система оставалась в равновесии, определяется равенствами $N_1 = 0$ и $N_2 = 0$.

Пусть $N_2 = 0$, тогда из условия равенства нулю моментов сил относительно первой опоры получаем левую границу:

$$2mg\left(\frac{L}{2} - x\right) = \frac{1}{6}mgL; \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{6}L = 2x; \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{5}{12}L.$$

Пусть теперь $N_1 = 0$, тогда, записывая правило моментов относительно правой опоры, получаем правую границу:

$$2mg\left(x - \frac{3L}{4}\right) = mg\left(\frac{3L}{4} - \frac{2L}{3}\right); \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{19}{24}L.$$

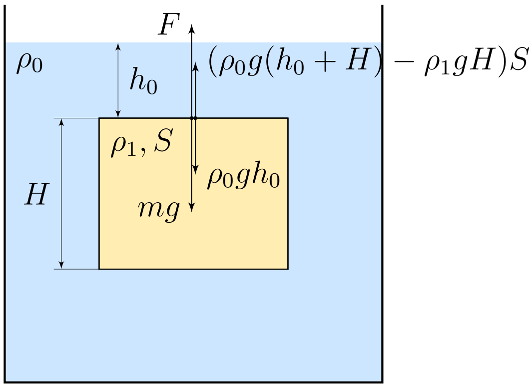
В случае, когда стержень повернули так, что его концы поменялись местами, поступим аналогично. Пусть $N_2 = 0$, тогда

$$2mg\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{6}mgL; \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{7}{12}L.$$

Пусть $N_1 = 0$, тогда

$$2mg\left(x - \frac{3L}{4}\right) = mg\left(\frac{3L}{4} - \frac{L}{3}\right); \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{23}{24}L.$$

7.3.



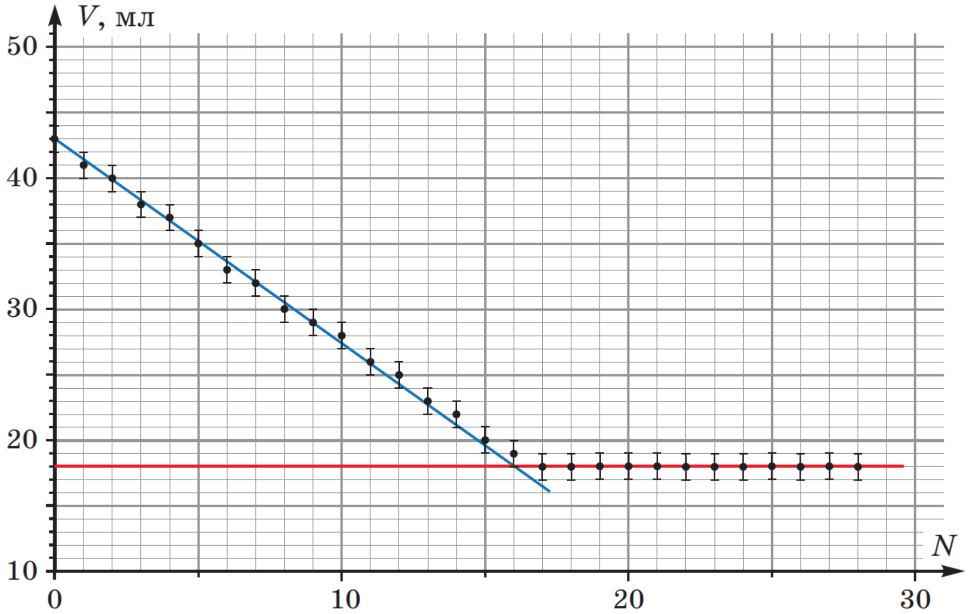
Расставим силы, действующие на стакан. Из условия равновесия получаем

$$F + (\rho_0 g(h_0 + H) - \rho_1 gH)S = mg + \rho_0 g h_0 S,$$

где $H = V/S$ — высота стакана. Тогда

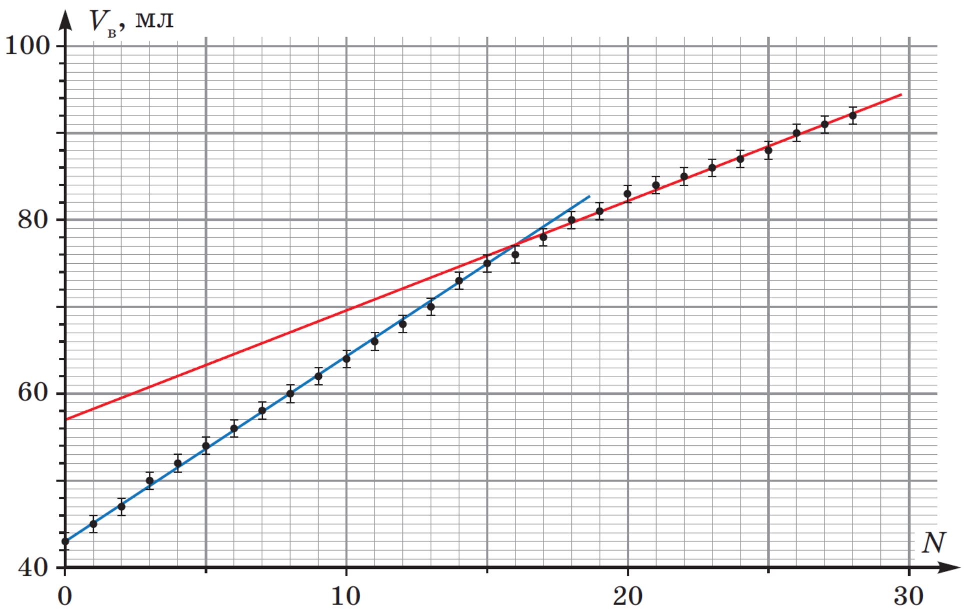
$$F = mg - gS\frac{V}{S}(\rho_0 - \rho_1) = 0{,}7\ \text{Н}.$$

7.4. Построим график $V(N)$ и проанализируем полученную зависимость. На графике заметны два линейных участка: на первом — тело частично погружено в неизвестную жидкость, а на втором уже полностью находится в воде. Проведя прямые, можно определить V_0 — первоначальный объём жидкости в мерном цилиндре.



Горизонтальная прямая соответствует $V_0 = 18$ мл. Следовательно, объём вытесняемой телом неизвестной жидкости при свободном плавании равен $\Delta V = 43 - 18 = 25$ мл. С помощью графика можно определить в какой момент тело полностью выходит из нижней жидкости. В данном случае это точка $N = 16$.

Построим график зависимости $V_в(N)$.



На графике виден излом — момент, когда тело полностью оказывается в воде.

Красная линия позволяет узнать какой истинный объём воды мы добавляли в ходе эксперимента (если бы в измерительный цилиндр не было погружено тело). Пересечению прямых соответствует значение $V_{в1} = 77$ мл. Точка пересечения с вертикальной осью позволяет найти $V_{в2} = 57$ мл. Разность этх двух значений равна объёму $V_{в0}$ налитой с помощью шприца воды:

$$V_{в0} = V_{в1} - V_{в2} = 20 \text{ мл}.$$

Для нахождения объёма шприца учтём, что за весь эксперимент было налито $92 - 57 = 35$ мл воды, что соответствует 28 шприцам, откуда $V_{ш} = 1{,}25$ мл.

Из графика зависимости $V_{в}(N)$ можно найти объём $\Delta V_{в}$ вытесненной телом воды

$$\Delta V_{в} = V_{в1} - (V_{в0} + V_0) = 39 \text{ мл}.$$

Условие плавания тела в неизвестной жидкости

$$\rho \Delta V g = mg.$$

Условие плавания в воде

$$\rho_{в} \Delta V_{в} g = mg.$$

Таким образом

$$\rho \Delta V = \rho_{в} \Delta V_{в}.$$

Окончательно находим

$$\rho = \rho_{в} \frac{\Delta V_{в}}{\Delta V} = (1{,}6 \pm 0{,}1) \ \text{г/см}^3; \quad m = (40 \pm 6) \ \text{г}.$$

Критерии 7 класс

Критерии 1 задача

1. Зомби смоделированы непрерывным потоком — 1 балл.
2. Записано уравнение на расстояние до места первой встречи — 1 балл.
3. Указано, что Полковник пробегает некоторое расстояние сквозь зомби — 2 балла.
4. Указано, что после первой встречи Полковник должен развернуться и успеть к другому выходу — 2 балла.
5. Условие из предыдущего пункта записано в виде неравенств — 1 балл.
6. Указано, что расстояния x_i не уменьшаются — 2 балла.
7. Получен ответ — 1 балл.

Критерии 2 задача

1. Построен график $\lambda(x)$ — 1 балл.
2. Найдена λ_0 — 1 балл.
3. Найдена левая граница области — 2 балла.
4. Найдена правая граница области — 2 балла.
5. Найдена левая граница области для второго положения стержня — 2 балла.
6. Найдена правая граница области для второго положения стержня — 2 балла.

Критерии 3 задача

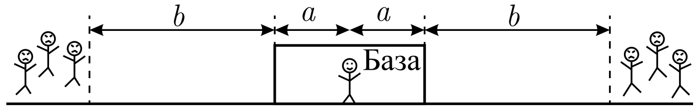
1. Получено выражение для силы Архимеда — 3 балла.
2. Записно выражение для силы тяжести — 2 балла.
3. Указано, что сумма сил равна нулю — 3 балла.
4. Получен ответ — 2 балла.

Критерии 4 задача

1. Построен график $V(N)$ — 2 балла.
2. Построен график $V_в(N)$ — 2 балла.
3. Найден объем шприца $V_ш \approx 1{,}2$ мл — 1 балл.
4. Найден объем $\Delta V = 25$ мл — 1 балл.
5. Найден объем $\Delta V_в = 39$ мл — 1 балл.
6. Найдена плотность из закона Архимеда $\rho \approx 1{,}6$ г/см^3 — 1 балл.
7. Найдена масса $m \approx 40$ г — 1 балл.

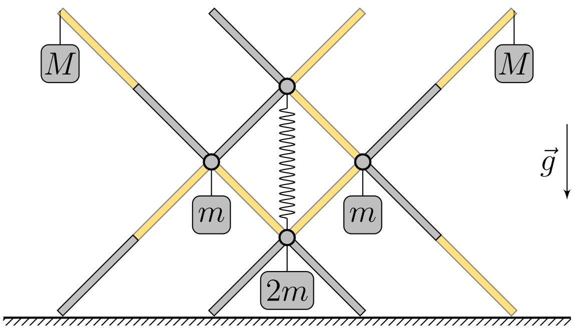
Олимпиада 8 класс

8.1. Однажды на почте. По долгу чести Кунг-фу Полковнику пришлось в одиночку защищать Подземную Базу от зомби-самураев. Попасть в Подземную Базу можно по одному из двух длинных и узких пещерных коридоров. Как только хотя бы один зомби-самурай попадёт на Базу, зомби-вирус мгновенно разнесётся по базе, превратив всех жителей в зомби-ронинов, что недопустимо. Скорость Полковника в k раз больше скорости Зомби-самураев. При контакте с зомби-самураем Полковник мгновенно убивает его при помощи своего кунг-фу. Внутри базы расстояние между входами равно $2a$. Изначально Полковник находится внутри базы на равном расстоянии от входов, а зомби — снаружи базы на расстоянии не меньше b от входов. При каком соотношении параметров a, b и k Полковник может быть уверен, что ему удастся защитить Подземную Базу от любого количества зомби?



Полковник

8.2. Не сложилось. На гладком горизонтальном столе стоит шарнирная конструкция, состоящая из двух грузов массой m, двух грузов массой M, одного груза массой $2m$, невесомых нитей, невесомой пружины неизвестной жёсткости и четырёх одинаковых невесомых стержней, соединенных шарнирно в точках, как показано на рисунке. Штрихами стержни делятся на участки равной длины. Трение в осях шарниров пренебрежимо мало. Для устойчивости конструкция зажата между двумя вертикальными гладкими стенками. Определите силу упругости пружины F_1. Если поменять местами грузы массами m и M, то нижний шарнир опустится вниз на Δl. Найдите деформацию пружины l_0 до перевешивания грузов.



8.3. Заземление. Тело, состоящее из соосных цилиндров, плавает на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей с плотностями $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3 и $\rho_2 = 1{,}0$ г/см^3. В первом случае над границей раздела двух жидкостей находится 2/3 объема цилиндра с меньшим диаметром (см. рис. а). Во втором — половина объема цилиндра с большим диаметром (см. рис. б). Найдите среднюю плотность плавающего тела.

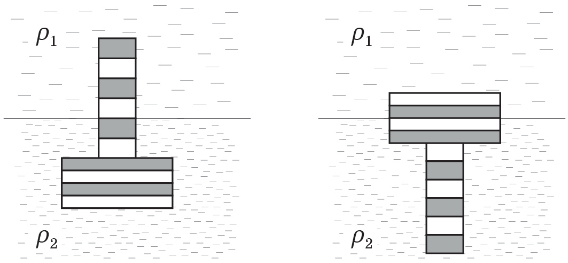
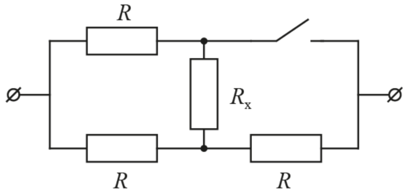


Рис. а Рис. б

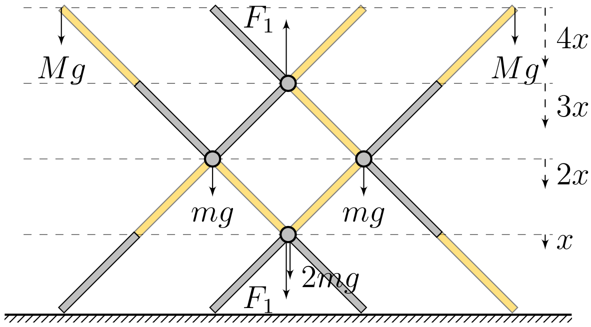
8.4. Классика. В собранной схеме оказалось, что ток через резистор R_x при замкнутом ключе в 1,4 раза больше, чем при разомкнутом. Выразите величину R_x через R.



Решение 8 класс

8.1. Смотрите решение 1 задачи 7 класса.

8.2.



Рассмотрим малое виртуальное перемещение

$$2mgx + mg \cdot 2x + mg \cdot 2x + Mg \cdot 4x + Mg \cdot 4x + F_1 \cdot x - F_1 \cdot 3x = 0.$$

Откуда находим

$$6mg + 8Mg = 2F_1; \quad \Longrightarrow \quad F_1 = (3m + 4M)\, g.$$

Во втором случае (после перевешивания) получаем аналогично

$$F_2 = (2M + 5m)g.$$

С учётом закона Гука

$$F_1 = kl_0; \qquad F_2 = kl.$$

Из записанных соотношений получим

$$k(l - l_0) = 2(m - M)g.$$

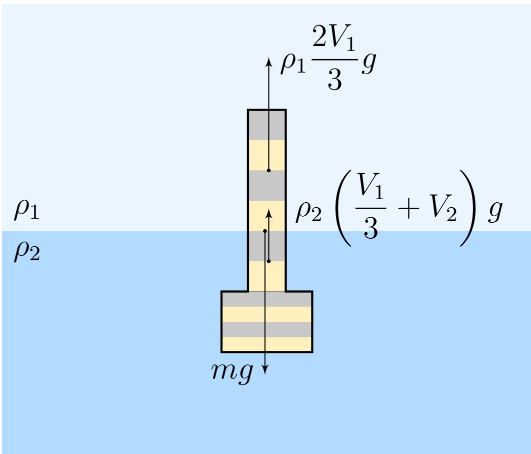
С учётом кинематических связей

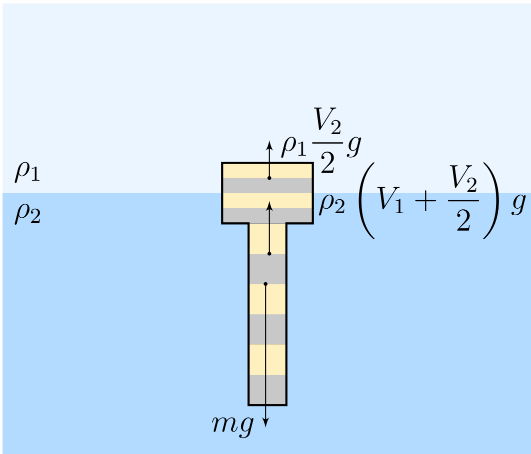
$$l - l_0 = 2\Delta l; \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{2(m-M)g}{2\Delta l} = \frac{(m-M)g}{\Delta l}.$$

Окончательно получаем

$$l_0 = \frac{3m + 4M}{m - M}\Delta l.$$

8.3.





Расставим силы давления и запишем условия плавания для двух случаев.

$$\begin{cases} mg = \rho_1 \dfrac{2}{3} V_1 g + \rho_2 \left(\dfrac{1}{3} V_1 + V_2\right) g; \\ mg = \rho_1 \dfrac{V_2}{2} g + \rho_2 \left(V_1 + \dfrac{V_2}{2}\right) g. \end{cases}$$

Решая эти два уравнения, находим:

$$\rho_1 \frac{2}{3} V_1 g + \rho_2 \left(\frac{1}{3} V_1 + V_2\right) = \rho_1 \frac{V_2}{2} g + \rho_2 g \left(V_1 + \frac{V_2}{2}\right);$$

$$(\rho_1 - \rho_2) \frac{2}{3} V_1 = (\rho_1 - \rho_2) \frac{V_2}{2};$$

$$\frac{2}{3} V_1 = \frac{V_2}{2},$$

т.е. объем тела в жидкости ρ_1 сохраняется.

$$V_1 = \frac{3}{4} V_2; \quad \Longrightarrow \quad m = \rho_1 \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} V_2 + \rho_2 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} V_2 + V_2\right) = \rho_1 \frac{V_2}{2} + \rho_2 \frac{5}{4} V_2.$$

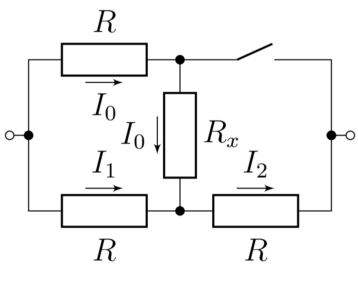
Объем тела равен

$$V_0 = V_1 + V_2 = \frac{3}{4} V_2 + V_2 = \frac{7}{4} V_2.$$

Тогда средняя плотность тела:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\rho_1 + \frac{5}{4}\rho_2\right) V_2}{\frac{7}{4} V_2} = \frac{2\rho_1 + 5\rho_2}{7} \approx 0{,}9\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

8.4. Расставим токи в случае разомкнутого ключа.



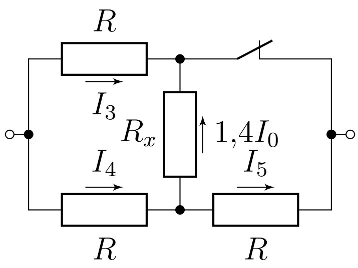
Заметим, что

$$I_2 = I_1 + I_0 \quad \text{и} \quad I_1 = I_0 \left(1 + \frac{R_x}{R}\right).$$

Тогда

$$U_{\text{общ}} = I_0 \cdot (R + R_x) + (I_1 + I_0) \cdot R = 3 I_0 R + 2 I_0 R_x.$$

Расставим токи в случае замкнутого ключа.



Заметим, что

$$I_4 = I_5 + 1{,}4I_0 \quad \text{и} \quad I_5 = 1{,}4I_0\left(\frac{R_x}{R}\right).$$

Тогда

$$U_{\text{общ}} = R\left(1{,}4I_0 + 1{,}4I_0\left(\frac{R_x}{R}\right)\right) + 1{,}4I_0R_x = 1{,}4I_0R + 2{,}8I_0R_x.$$

Приравнивая выражения для общего напряжения, получаем

$$R_x = 2R.$$

Критерии 8 класс

Критерии 1 задача

Смотрите критерии 1 задачи 7 класса.

Критерии 2 задача

1. Геометрически найдено соотношение перемещений — 2 балла.
2. Упомянут метод виртуальных перемещений — 1 балл.
3. Применен метод виртуальных перемещений — 2 балла.
4. Найдена сила упругости пружины F_1 — 1 балл.
5. Применен метод виртуальных перемещений во втором случае — 2 балла.
6. Получена связь координат пружин с геометрическим смещением конструкции — 1 балл.
7. Найдена деформация пружины l_0 до перевешивания грузов — 1 балл.

Критерии 3 задача

1. Упомянуто выражение для средней плотности $\rho = m/V$ — 1 балл.
2. Указано, что сумма сил равна нулю — 1 балл.
3. Выписано равенство сил для первого случая — 3 балла.
4. Выписано равенство сил для второго случая — 3 балла.
5. Получен ответ — 2 балла.

Критерии 4 задача

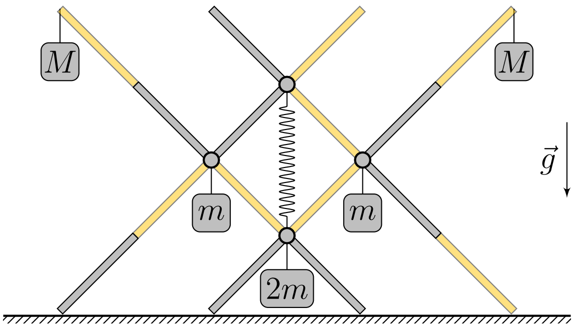
1. Нарисованы две схемы, указано направление токов. Учтено что через закрытый ключ ток не идет — 1 балл.
2. Записана система уравнений (1+2 правила Кирхгофа или метод узловых потенциалов или аналог) для случая с разомкнутым ключом — 2 балла.
3. Получена связь между током через резистор R_x и иными параметрами схемы (решена система уравнений из п. 2) — 2 балла.
4. Записана система уравнений (1+2 правила Кирхгофа или метод узловых потенциалов или аналог) для случая с замкнутым ключом — 3 балла.
5. Получена связь между током через резистор R_x и иными параметрами схемы (решена система уравнений из п. 4) — 1 балл.
6. Получена связь между R_x и R — 1 балл.

Олимпиада 9 класс

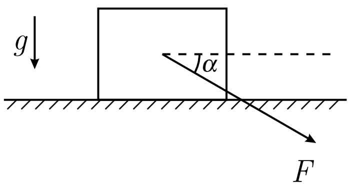
9.1. Липкая полусфера. С вершины полусферы радиусом R запускают камешки с одинаковой скоростью. Ударяясь о сферу, камешки не отскакивают. Оказалось, что наибольшее удаление камешков от центра полусферы равно $2R$.

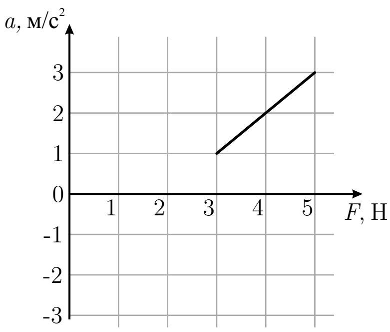
1. Найдите начальную скорость камешка.
2. Найдите угол, под которым был брошен камешек, упавший на расстоянии $2R$ от центра полусферы.
3. Во сколько раз отличаются радиусы кривизны в точке броска и в точке падения камешка?

9.2. Не сложилось. На гладком горизонтальном столе стоит шарнирная конструкция, состоящая из двух грузов массой m, двух грузов массой M, одного груза массой $2m$, невесомых нитей, невесомой пружины неизвестной жёсткости и четырёх одинаковых невесомых стержней, соединенных шарнирно в точках, как показано на рисунке. Штрихами стержни делятся на участки равной длины. Трение в осях шарниров пренебрежимо мало. Для устойчивости конструкция зажата между двумя вертикальными гладкими стенками. Определите силу упругости пружины F_1. Если поменять местами грузы массами m и M, то нижний шарнир опустится вниз на Δl. Найдите деформацию пружины l_0 до перевешивания грузов.

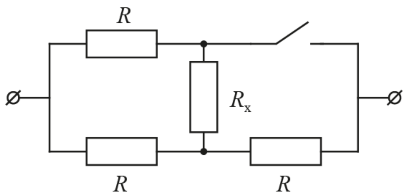


9.3. Фрагмент графика. Небольшое тело находится на горизонтальном шероховатом столе. К телу прикладывают силу F под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали так, что вертикальная компонента силы направлена вниз. На рисунке показан фрагмент графика зависимости ускорения тела от модуля силы F. Используя данный фрагмент графика, найдите массу тела и коэффициент трения тела о плоскость. Чему будет равно ускорение тела, если величина силы составляет $F = 1$ Н? Какую минимальную силу нужно приложить под углом $\beta = 80°$ к горизонтали (по направлению вправо и вниз), чтобы сдвинуть тело с места, если изначально оно находилось в покое? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.





9.4. Классика. В собранной схеме оказалось, что ток через резистор R_x при замкнутом ключе в 1,4 раза больше, чем при разомкнутом. Выразите величину R_x через R.



9.5. Билинза Бийе. Точечный источник света находится в фокусе собирающей линзы размером $2b + a$. Из линзы симметрично вырезали центральную часть размером a и сдвинули две половинки вплотную друг к другу. На какое минимальное расстояние нужно удалиться от линзы вдоль ее исходной оптической оси, чтобы попасть в область, куда не попадает свет от точечного источника? Фокусное расстояние линзы F.

Решение 9 класс

9.1. Для решения задачи нам понадобятся два утверждения.

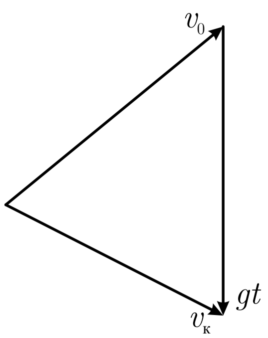
Утверждение 1. Медиана в треугольнике скоростей является средней скоростью перемещения.

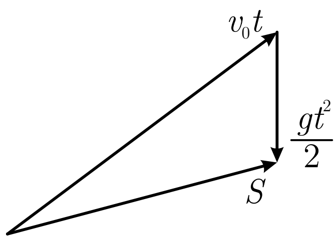
Утверждение 2. Дальность полёта по горизонтали максимальна тогда и только тогда, когда вектора начальной и конечной скорости перпендикулярны.

Доказательство утверждения 1. Движение в однородном поле тяжести описывается уравнениями

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}; \qquad \vec{v}_к = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Построим треугольники скоростей и перемещений.





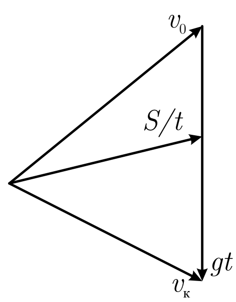
Заметим, что если все стороны треугольника перемещений разделить на время движения t, то получим равенство

$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}.$$

Это равенство, по сути, является доказательством утверждения.

Доказательство утверждения 2. Найдём площадь треугольника скоростей. Для этого найдём высоту, проведённую к стороне $\vec{g}t$. Заметим, что проекция вектора $\vec{S}/t$ на ось, перпендикулярную $\vec{g}t$, является дальностью полёта, делённой на время движения t. Тогда получаем

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\frac{L}{t}gt = \frac{1}{2}gL.$$

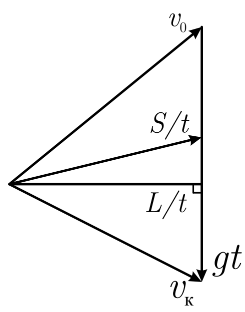


С другой стороны, площадь треугольника скоростей равна

$$S_\triangle = \frac{1}{2}v_0 v_к \sin\alpha.$$

Здесь α — угол между начальной и конечной скоростями. Тогда получаем

$$L = \frac{v_0 v_к \sin\alpha}{g}.$$



Заметим, что модуль конечной скорости $v_к$ не зависит от угла вылета α, а определяется лишь модулем начальной скорости и разностью высот между начальной и конечной точкой (следствие закона сохранения энергии). Поэтому дальность полёта максимальна при условии

$$L \to \max; \quad \iff \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgR; \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gR}.$$

Подставим конечную скорость в выражение для максимальной дальности полёта

$$v_0\sqrt{v_0^2 + 2gR} = 2gR.$$

Возведём полученное выражение в квадрат

$$v_0^4 + 2gRv_0^2 - 4R^2g^2 = 0.$$

Решая биквадратное уравнение относительно v_0, находим

$$D = 4g^2R^2 + 16R^2g^2 = 20g^2R^2; \qquad v_0^2 = \frac{-2gR + gR\sqrt{20}}{2}.$$

Окончательно

$$v_0^2 = gR\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 1{,}236gR; \quad \Longrightarrow \quad v_0 \approx 1{,}11\sqrt{gR}.$$

Угол найдём по теореме синусов (см. рис.)

$$\frac{v_0}{\sin\alpha} = \frac{v}{\cos\alpha}; \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gR}} \approx 0{,}6.$$

Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Здесь V — скорость тела, a_n — проекция ускорения на ось, перпендикулярную скорости. Тогда радиусы кривизны в начальной и конечной точках соответственно равны

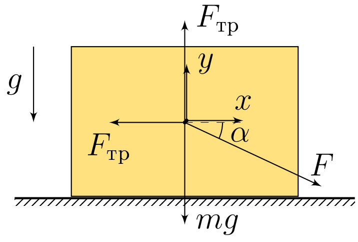
$$\rho_1 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}; \quad \rho_2 = \frac{v^2}{g\sin\alpha}.$$

Отношение радиусов кривизны равно

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

9.2. Смотрите решение 2 задачи 8 класса.

9.3. Тело либо покоится, либо скользит по поверхности стола.



Случай 1: покой.

$$\begin{cases} F\cos\alpha = F_{тр}; \\ mg + F\sin\alpha = N; \\ F_{тр} \leqslant \mu N. \end{cases}$$

Подставляем $F_{тр}$ и N:

$$F\cos\alpha \leqslant \mu mg + \mu F\sin\alpha; \quad \Longrightarrow \quad F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \leqslant \mu mg.$$

При $\operatorname{ctg}\alpha < \mu$ происходит заклинивание и тело не начнёт скользить ни при каких значениях силы F. Но из графика $a_x(F)$ видно, что при некоторых значениях F тело скользит. Значит, $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant \mu$. Тогда при

$$F \leqslant \frac{\mu mg}{cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

тело находится в покое, а при

$$F \geqslant \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

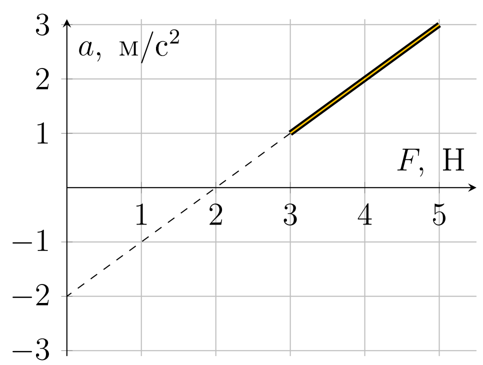
скользит.

Случай 2: скольжение. Запишем II закон Ньютона.

$$\begin{cases} ma_x = F\cos\alpha - F_{тр}; \\ mg + F\sin\alpha = N; \\ F_{тр} = \mu N. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g.$$



Продолжая прямую на графике до пересечения с осью ординат, видим, что

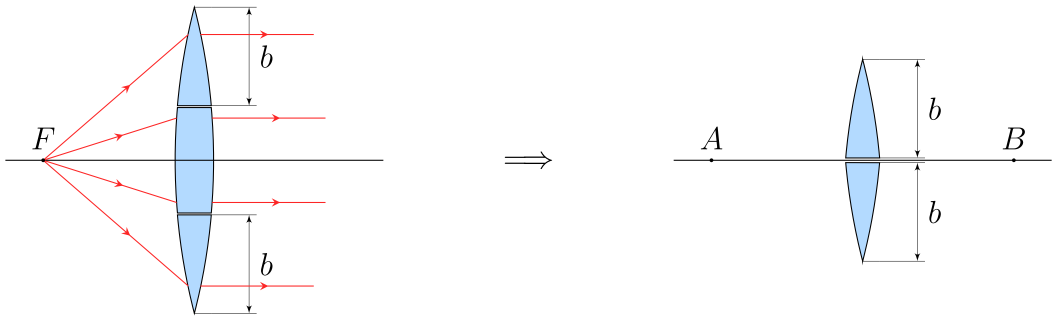
$$-\mu g = -2 \text{ м/с}^2; \quad \Longrightarrow \quad \mu = 0{,}2.$$

Угловой коэффициент прямой $\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{m} = 1$ кг$^{-1}$, откуда $m = \frac{\sqrt{3} - 0{,}2}{2\cdot 1} \approx 0{,}8$ кг.

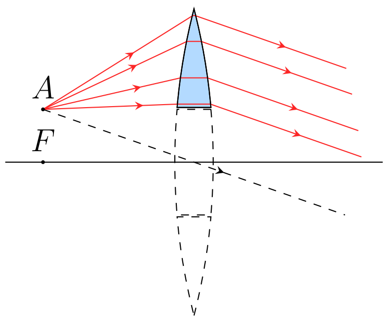
Скольжение начинается, если $F \geqslant 2$ Н, значит при $F = 1$ Н тело покоится, и $a_x = 0$. При $\beta = 80^\circ$ $\operatorname{ctg}\beta \approx 0{,}18 < \mu$. Следовательно, тело не начнёт скользить ни при каком значении силы F.

9.4. Смотрите решение 4 задачи 8 класса.

9.5.



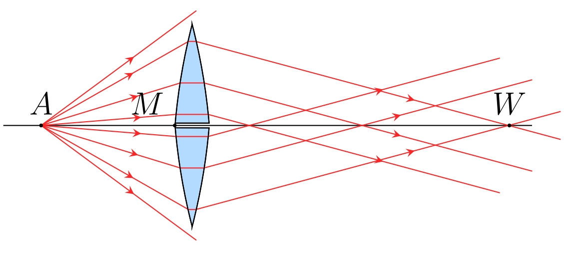
Ситуация, изображенная на правом рисунке, симметрична относительно оси AB, поэтому рассмотрим области видимости от верхнего кусочка линзы, а потом отразим относительно оси AB.



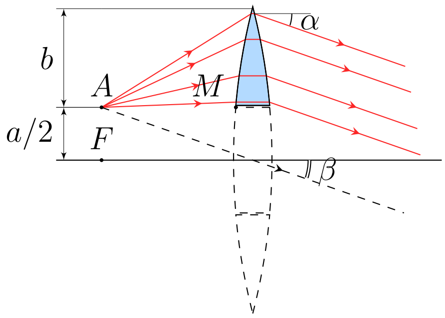
Источник, находящийся в фокальной плоскости, испускает лучи, которые, проходя через линзу, преобразуются в параллельные. Это следует из рисунка выше или из формулы линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = \frac{1}{F} + \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x \longrightarrow \infty.$$

Луч, проходящий через оптический центр линзы, проходит через него не преломляясь, значит мы получили направление параллельных лучей. С учетом отражения ситуации и лучей, которые не попадают в линзу, имеем следующие области видимости:



Точка W искомая, так как это ближайшая точка на оси AB, куда не попадает свет. Найдем MW из геометрии по ходу крайних лучей (т.к. W — их пересечение).



Лучи параллельны, следовательно

$$\alpha = \beta; \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2F}.$$

Тогда верхний луч пересечет ось AB на расстоянии

$$L = \frac{b}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2bF}{a}.$$

Значит

$$\mathrm{MW} = \frac{2bF}{a}.$$

Критерии 9 класс

Критерии 1 задача

1. Найдена оптимальная траектория (треугольник скоростей или уравнение скоростей) — 2 балла.
2. Записано отдельное уравнение на скорость — 1 балл.
3. Получен ответ для скорости — 1 балл.
4. Записано уравнение для поиска угла — 1 балл.
5. Получено значение угла (или его тригонометрической функции) — 1 балл.
6. Записано выражение для радиуса кривизны в общем виде — 1 балл.
7. Получено выражение для случая старта и падения — по 1 баллу.
8. Получено отношение радиусов кривизны — 1 балл.

Критерии 2 задача

Смотрите критерии 2 задачи 8 класса.

Критерии 3 задача

1. Записаны все уравнения, необходимые для нахождения зависимости ускорения от силы в случае движения тела — 2 балла.
2. Предложен способ нахождения массы тела и коэффициента трения по графику — 2 балла.
3. Найдено численное значение массы тела — 1 балл.
4. Найдено численное значение коэффициента трения — 1 балл.
5. Найдено ускорение тела при силе 1 Н — 2 балла.
6. Показано, что при угле 80° тело не будет двигаться ни при каком значении силы — 2 балла.

Критерии 4 задача

Смотрите критерии 4 задачи 8 класса.

Критерии 5 задача

1. Сказано, что часть линзы работает так же, как и цельная линза — 2 балла.
2. Указано, что будем рассматривать 2 лизы по отдельности — 1 балл.
3. Изображено, где после смещения будут находиться оптические центры линз — 2 балла.
4. Лучи выходят из линзы параллельным пучком — 2 балла.

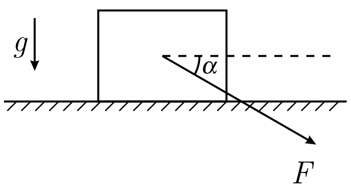
5. Записаны уравнения, достаточные для получения ответа — 2 балла.
6. Получен ответ — 1 балл.

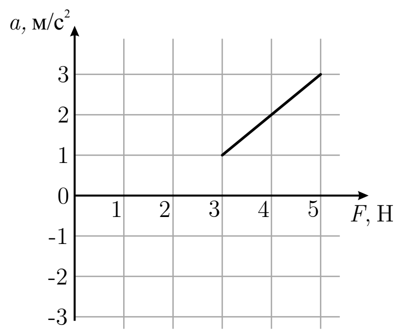
Олимпиада 10 класс

10.1. Липкая полусфера. С вершины полусферы радиусом R запускают камешки с одинаковой скоростью. Ударяясь о сферу, камешки не отскакивают. Оказалось, что наибольшее удаление камешков от центра полусферы равно $2R$.

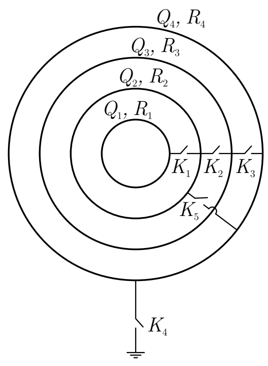
1. Найдите начальную скорость камешка.
2. Найдите угол, под которым был брошен камешек, упавший на расстоянии $2R$ от центра полусферы.
3. Во сколько раз отличаются радиусы кривизны в точке броска и в точке падения камешка?

10.2. Фрагмент графика. Небольшое тело находится на горизонтальном шероховатом столе. К телу прикладывают силу F под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали так, что вертикальная компонента силы направлена вниз. На рисунке показан фрагмент графика зависимости ускорения тела от модуля силы F. Используя данный фрагмент графика, найдите массу тела и коэффициент трения тела о плоскость. Чему будет равно ускорение тела, если величина силы составляет $F = 1$ Н? Какую минимальную силу нужно приложить под углом $\beta = 80°$ к горизонтали (по направлению вправо и вниз), чтобы сдвинуть тело с места, если изначально оно находилось в покое? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.





10.3. Ключ на двадцать. Четыре концентрические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ имеют заряды Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 соответственно. Все ключи разомкнуты. Считайте, что во всех вопросах задачи, прежде чем замкнуть определённые ключи, система возвращается в исходное состояние, т. е. все ключи разомкнуты, а сферы заряжены так же, как и до того, как были замкнуты те или иные ключи.



1. Какой заряд протечёт через ключ K_1 при его замыкании?
2. Какой заряд протечёт через ключ K_2 при его замыкании?
3. Какой заряд протечёт через ключ K_3 при его замыкании?
4. Какой заряд протечёт через ключ K_4 при его замыкании?
5. Какой заряд протечёт через ключ K_5 при его замыкании?

10.4. Необычный процесс. Воздух находится в горизонтальном теплоизолированном цилиндре. Правая крышка цилиндра представляет собой подвижный поршень массой M. Крышку удерживают, а начальное давление воздуха внутри цилиндра больше атмосферного. Поршень отпускают. Когда он остановился в первый раз, то оказалось, что объем, занимаемый газом, увеличивается на 10%. Определите:

1. Отношение минимального и максимального давлений газа.
2. Значение начального давления газа.

Считайте, что поршень может двигаться без трения. Процесс квазистатический. Уравнение адиабаты имеет вид $PV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = C_p/C_v$, а атмосферное давление равно 10^5 Па.

10.5. Билинза Бийе. Точечный источник света находится в фокусе собирающей линзы размером $2b+a$. Из линзы симметрично вырезали центральную часть размером a и сдвинули две половинки вплотную друг к другу. На какое минимальное расстояние нужно удалиться от линзы вдоль ее исходной оптической оси, чтобы попасть в область, куда не попадает свет от точечного источника? Фокусное расстояние линзы F.

Решение 10 класс

10.1. Смотрите решение 1 задачи 9 класса.

10.2. Смотрите решение 3 задачи 9 класса.

10.3. Заряд на сферах перераспределяется до тех пор, пока их потенциалы не сравняются. В каждом пункте Q_i, q_i обозначают заряд i-ой сферы до и после соединения соответственно.

1. После замыкания первого ключа:

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad \Longrightarrow \quad k\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} + \frac{Q_4}{R_4}\right) = k\left(\frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} + \frac{Q_4}{R_4}\right).$$

Тогда

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_1}{R_2}; \quad \Longrightarrow \quad q_1 = 0.$$

Значит

$$q_2 = Q_1 + Q_2,$$

и перетек заряд Q_1.

2. После замыкания второго ключа:

$$\frac{\varphi_2}{k} = \frac{\varphi_3}{k}; \quad \Longrightarrow \quad \frac{Q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} + \frac{Q_4}{R_4} = \frac{Q_1}{R_3} + \frac{q_2}{R_3} + \frac{q_3}{R_3} + \frac{Q_4}{R_4}.$$

Значит

$$\frac{Q_1 + q_2}{R_3} = \frac{Q_1 + q_2}{R_2}; \quad \Longrightarrow \quad Q_1 + q_2 = 0; \quad \Longrightarrow \quad q_2 = -Q_1,$$

следовательно перетек заряд $Q_2 - q_2 = Q_1 + Q_2$.

3. Аналогично пунктам **1** и **2**, перетек заряд $Q_1 + Q_2 + Q_3$.

4. Так как сферу заземлили, то ее потенциал равен 0. Т.е.

$$\frac{\varphi_4}{k} = \frac{Q_1}{R_4} + \frac{Q_2}{R_4} + \frac{Q_3}{R_4} + \frac{q_4}{R_4} = 0; \quad \Longrightarrow \quad = q_4 = -Q_1 - Q_2 - Q_3,$$

следовательно перетек заряд $Q_4 - q_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$.

Заметим, что решения всех четырех пунктов легко можно отгадать. При этом других решений нет, т.к. у задачи электростатики решение всегда существует и единственно.

5. Потенциалы 2-й и 4-й сферы равны:

$$\frac{\varphi_2}{k} = \frac{Q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} + \frac{q_4}{R_4} = \frac{\varphi_4}{k} = \frac{Q_1}{R_4} + \frac{q_2}{R_4} + \frac{Q_3}{R_4} + \frac{q_4}{R_4};$$

$$q_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}\right) = Q_1\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2}\right) + Q_3\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right);$$

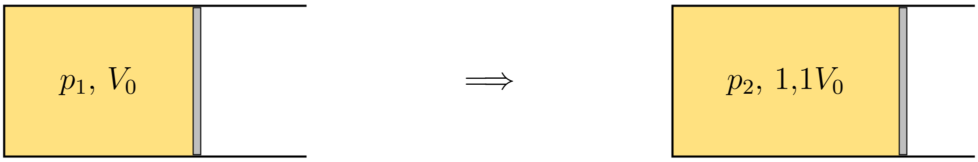
$$q_2 = -Q_1 + Q_3\frac{\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}},$$

значит перетек заряд

$$Q_2 - q_2 = Q_1 + Q_2 - Q_3 \frac{\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}}.$$

10.4. Так как нет трения и других потерь энергии, то поршень будет колебаться около своего положения равновесия, при этом максимальное и минимальное давления газа будут достигаться в точках максимального отклонения от положения равновесия.

Обозначим p_0 — атмосферное давление, p_1 — давление перед тем, как убрали перегородку (оно же максимальное), p_2 — давление во время первой остановки (оно же минимальное).



Из уравнения адиабаты имеем

$$p_1 V_0^j = p_2 (1{,}1)^j V_0^j.$$

Тогда, учитывая, что $j = 7/5$, получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = (1{,}1)^{-j} \approx 0{,}88.$$

Пусть в произвольный момент времени скорость поршня v, объем сосуда V. Тогда закон сохранения энергии запишется в виде

$$U_2 - U_1 + \frac{Mv^2}{2} + p_0(V - V_0) = 0.$$

Тогда для момента первой остановки поршня

$$v = 0; \quad U_1 = \frac{5}{2} p_1 V_0; \quad U_2 = \frac{5}{2} p_2 (1{,}1 V_0).$$

Тогда для этого момента получаем

$$\frac{5}{2} p_2 \cdot (1{,}1 V_0) - \frac{5}{2} p_1 V_0 + p_0 (1{,}1 V_0 - V_0) = 0;$$

$$\frac{5}{2} p_1 (1{,}1)^{1-j} - \frac{5}{2} p_1 + 0{,}1 p_0 = 0;$$

$$p_1 = \frac{0{,}2 p_0}{5(1 - 1{,}1^{1-j})} \approx 1,07 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

10.5. Смотрите решение 5 задачи 9 класса.

Критерии 10 класс

Критерии 1 задача

Смотрите критерии 1 задачи 9 класса.

Критерии 2 задача

Смотрите критерии 3 задачи 9 класса.

Критерии 3 задача

1. Найден заряд, протекший через ключ K_1 — 1 балл.
2. Найден заряд, протекший через ключ K_2 — 1 балл.
3. Найден заряд, протекший через ключ K_3 — 1 балл.
4. Найден заряд, протекший через ключ K_4 — 3 балла.
5. Найден заряд, протекший через ключ K_5 — 4 балла.

Критерии 4 задача

1. Найдено отношение p_2/p_1 — 3 балла.
2. Записан закон сохранения энергии — 5 баллов.
3. Найдено начальное давление газа — 2 балла.

Критерии 5 задача

Смотрите критерии 5 задачи 9 класса.