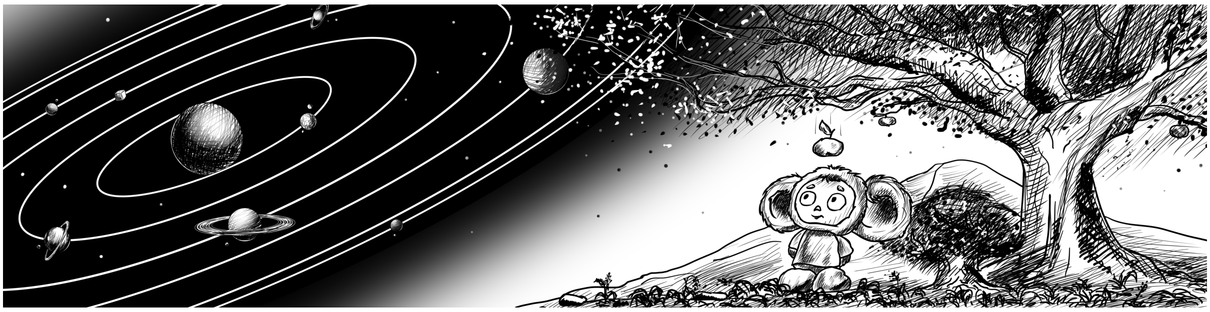


Олимпиадные школы МФТИ

Отделение физики

vk.com/4mipt

Условия и решения олимпиады ЛОШ-2021 2 смена

Авторы условий:

7 класс

1. Колдунов Л.
2. Киреев А.
3. Кухарев С.
4. Свинцицкий А.

8 класс

1. Колдунов Л.
2. Киреев А.
3. Киреев А.
4. Жакенов А.

9 класс

1. Колдунов Л.
2. Миронов С.
3. Киреев А.
4. Шадыкул Д.

10 класс

1. Колдунов Л.
2. Миронов С.
3. Колдунов Л.
4. Шадыкул Д.

Рисунки и иллюстрации — Макс Еськин, Р. Валиев.

Набор и вёрстка — А. Свинцицкий.

Долгопрудный, 2021 г.

Содержание

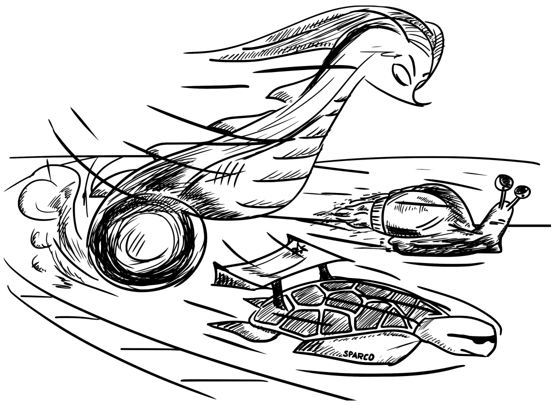
Олимпиада 7 класс

7.1. Три марафонца начинают бег по кругу из одной и той же точки. Скорость первого спортсмена равна 4 км/ч, второго — 7 км/ч, а третьего — 13 км/ч. Марафонцы бегут в одну и ту же сторону.

1. Через некоторое время спортсмены встретились 10 раз. Сколько к этому моменту времени было встреч, в которых участвовало **только** два спортсмена?

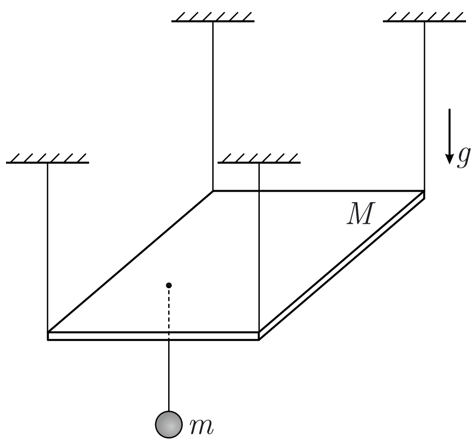
   Примечание. «Тройная» встреча марафонцев считается за одну.

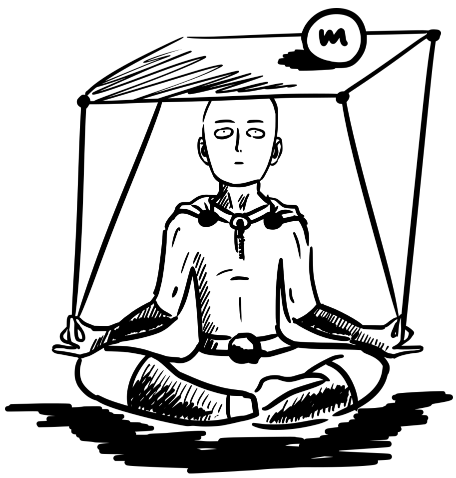
2. В некоторый момент времени все три спортсмена снова встретились на старте. На сколько кругов второй и третий марафонец могли обойти первого?



7.2. Однородная тонкая квадратная пластина массой M имеет постоянную толщину. Её подвешивают на четырех одинаковых легких вертикальных нитях к горизонтальному потолку, а затем к некоторой точке квадрата подвешивают на невесомой нити груз массой m. Ускорение свободного падения g. Определите:

1. силы натяжения нитей при подвешивании груза к точке пересечения диагоналей квадрата;
2. силы натяжения нитей при подвешивании груза к середине ребра квадрата;
3. к какой точке на диагонали квадрата нужно подвесить груз, чтобы получить максимально возможное значение силы натяжения одной из нитей? Чему равно это максимальное значение $T_{\max}$?





7.3. В сообщающиеся сосуды налита вода. Горизонтальные сечения колен обоих сосудов представляют собой квадраты со стороной $a = 4$ см. В правое колено положили десять одинаковых ледяных шариков радиуса $r = 2$ см. Оказалось, что вода ровно покрывает пятый шарик. Определите высоту уровня воды в сосудах к моменту, когда лёд растает. Объёмом соединительных трубок можно пренебречь. Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара, $\pi = 3{,}14$.

7.4. Невесомый сосуд, имеющий площадь $S = 0{,}5$ м^2, подвешен на весах. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости. В верхний слой жидкости погружено тело так, что его высота равна толщине слоя. *Любое* горизонтальное сечение тела в 2 раза меньше горизонтального сечения сосуда. Известно, что слой нижней жидкости имеет толщину $h_1 = 50$ см. В дне сосуда сделали малое отверстие, через которое стало выливаться содержимое сосуда с постоянной *объёмной* скоростью. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. По данным показания весов в зависимости от времени определите:

1. плотность нижнего слоя жидкости ρ_1;
2. толщину верхнего слоя жидкости h_2;
3. плотность верхнего слоя жидкости ρ_2;
4. массу содержимого сосуда в момент $t = 120$ с.

P, кН	7,40	6,95	6,60	6,38	6,13	5,69	4,85	3,89	2,90	2,36	2,30	2,21
t, с	0	20	30	40	50	70	100	140	180	200	210	220

P, кН	2,14	1,86	1,71	1,51	1,41	1,28	1,05	0,99	0,83	0,72	0,60	0,60
t, с	230	250	270	290	300	310	330	340	360	370	390	410

Примечание. Считайте, что вся жидкость вытекла из сосуда.

Решения 7 класс

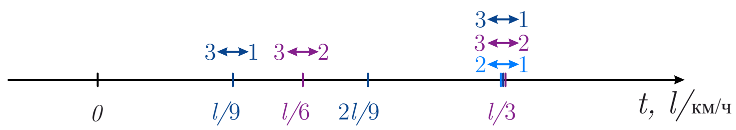
7.1 Найдем сколько времени проходит между встречами каждой пары спортсменов. Для этого выразим относительные скорости спортсменов

$$v_{31} = 9 \text{ км/ч}; \quad v_{32} = 6 \text{ км/ч}; \quad v_{21} = 3 \text{ км/ч}.$$

Здесь v_{ij} — скорость i-го спортсмена относительно j-го. Пусть длина всего круга l, тогда времена между встречами спортсменов равны

$$t_{31} = \frac{l}{v_{31}} = \frac{l}{9 \text{ км/ч}}; \quad t_{32} = \frac{l}{v_{32}} = \frac{l}{6 \text{ км/ч}}; \quad t_{21} = \frac{l}{v_{21}} = \frac{l}{3 \text{ км/ч}}.$$

Для наглядности отметим встречи спортсменов на временной шкале.



Из рисунка видно, что на каждую «тройную» встречу приходится 3 «двойных». Тогда, если через некоторое время спортсмены встретились 10 раз, то

$$3 \text{ дв. встр.} + 1 \text{ тр. встр.} + 3 \text{ дв. встр.} + 1 \text{ тр. встр.} + 2 \text{ дв. встр.} = 10 \text{ встреч.}$$

Откуда следует, что «двойных» встреч произошло ровно 8.

На второй вопрос задачи можно ответить разными способами.
Способ 1. Время между «тройными» встречами равно

$$T = \frac{l}{3 \text{ км/ч}}.$$

Пусть время, через которое все спортсмены снова вместе окажутся на старте, равно t. Понятно, что время t должно быть кратно T, так как произошла «тройная» встреча, то есть

$$t = Tk, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как все спортсмены пробежали целое число кругов, то

$$\begin{cases} v_1 t = l n_1; \\ v_2 t = l n_2; \\ v_3 t = l n_3; \end{cases} \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}.$$

Подставив время t и скорости v_1, v_2, v_3 в эту систему уравнений, получим

$$\begin{cases} v_1 \dfrac{l}{3 \text{ км/ч}} k = l n_1; \\ v_2 \dfrac{l}{3 \text{ км/ч}} k = l n_2; \\ v_3 \dfrac{l}{3 \text{ км/ч}} k = l n_3; \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{4}{3} k = n_1; \\ \dfrac{7}{3} k = n_2; \\ \dfrac{13}{3} k = n_3; \end{cases} \quad k, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}.$$

Здесь n_1, n_2, n_3 — количество кругов, которое пробежали первый, второй и третий спортсмены соответственно. Заметим, чтобы все числа n_1, n_2, n_3 были целыми, необходимо чтобы k было кратно 3. То есть $k \in 3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Тогда второй и третий спортсмены обогнали первого на

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = k; \\ n_3 - n_1 = 3k; \end{cases} \implies k \in 3 \cdot \mathbb{N} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}.$$

Способ 2. Пусть первый спортсмен пробежал x кругов, тогда второй пробежал

$$\frac{v_2}{v_1}x = \frac{7}{4}x \text{ кругов,}$$

а третий

$$\frac{v_3}{v_1}x = \frac{13}{4}x \text{ кругов.}$$

Заметим, что число кругов x должно быть кратно 4, так как все спортсмены встретились на старте и пробежали целое число кругов. Отсюда получаем те же самые ответы.

7.2 **1.** Запишем условие равновесия пластины

$$4T = (M + m)g; \implies T = \frac{(M + m)g}{4}.$$

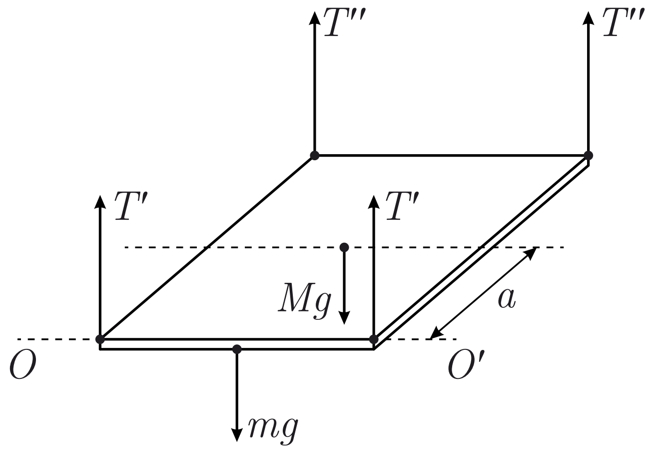
Силы натяжения всех нитей одинаковы в силу симметрии.

2. Запишем уравнение моментов относительно оси OO'

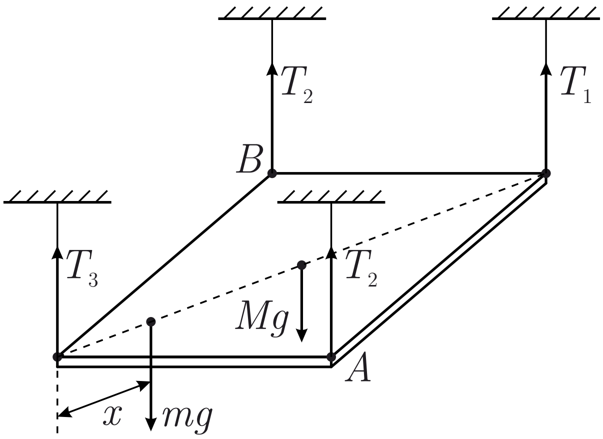
$$Mga = 2T'' \cdot 2a; \implies T'' = \frac{Mg}{4}.$$

Силу натяжения T' найдём из условия равновесия

$$2T' + 2T'' = (m + M)g; \implies T' = \frac{(M + m)g}{2} - \frac{Mg}{4}; \implies T' = \frac{2m + M}{4}g.$$



3. Расставим силы, действующие на пластину.



Запишем условие равновесия

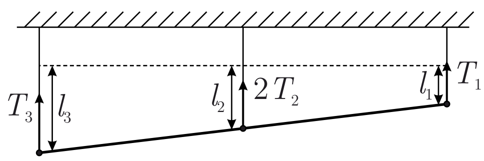
$$T_1 + 2T_2 + T_3 = Mg + mg.$$

Запишем уравнение моментов относительно оси AB

$$T_3 l = T_1 l + mg(l - x),$$

где l — половина длины диагонали, $x \in [0; l]$.

Предположим, что все нити натянуты ($T_1 > 0, T_2 > 0$, $T_3 > 0$). Вид системы сбоку показан на рисунке. Пусть l_1, l_2, l_3 — малые удлинения нитей. Заметим, что l_2 является средней линией в трапеции, тогда



$$2l_2 = l_1 + l_3.$$

С учётом закона Гука имеем

$$2\frac{T_2}{k} = \frac{T_1}{k} + \frac{T_3}{k}; \quad \Longrightarrow \quad 2T_2 = T_1 + T_3.$$

В результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} T_1 + 2T_2 + T_3 = (M+m)g; \\ T_3 l = T_1 l + mg(l - x); \\ 2T_2 = T_1 + T_3. \end{cases}$$

Подставив третье уравнение системы в первое и разделив второе уравнение на l, получим

$$\begin{cases} 4T_2 = (M+m)g; \\ T_3 l = T_1 l + mg(l - x); \\ 2T_2 = T_1 + T_3. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} T_2 = \dfrac{(M+m)g}{4}; \\ T_3 = T_1 + mg\left(1 - \dfrac{x}{l}\right); \\ T_1 + T_3 = \dfrac{(M+m)g}{2}. \end{cases}$$

Подставив второе уравнение в третье, выразим T_1

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{(M+m)g}{4}; \\ T_3 = T_1 + mg\left(1 - \dfrac{x}{l}\right); \\ 2T_1 + mg\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) = \dfrac{(M+m)g}{2}; \end{cases} \implies \begin{cases} T_2 = \dfrac{(M+m)g}{4}; \\ T_3 = T_1 + mg\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)); \\ T_1 = \left(M + m\left(\dfrac{2x}{l} - 1\right)\right)\dfrac{g}{4}. \end{cases}$$

Окончательно находим

$$\begin{cases} T_1 = \left(M + m\left(\dfrac{2x}{l} - 1\right)\right)\dfrac{g}{4}; \\ T_2 = \dfrac{(M+m)g}{4}; \\ T_3 = \left(M + m\left(3 - \dfrac{2x}{l}\right)\right)\dfrac{g}{4}. \end{cases}$$

При $x \in [0; l]$ $T_3 \geqslant T_2 \geqslant T_1$. При $x = 0$ имеем

$$T_{\max} = T_{3\max}.$$

Тогда

$$T_{\max} = \frac{M + 3m}{4}g.$$

Однако есть ограничение на массу груза m, если $m \geqslant M$, то сила натяжения $T_1 \leqslant 0$, а мы предполагали что все нити натянуты.

Предположим, что одна из нитей не натянута, например, $T_1 = 0$, $T_2 > 0$, $T_3 > 0$. Тогда условие равновесия и уравнение моментов имеют вид

$$\begin{cases} 2T_2 + T_3 = Mg + mg; \\ T_3 l = mg(l - x). \end{cases}$$

Здесь $x \in [0; l]$. После несложных преобразований получаем

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{g}{2}\left(M + m\dfrac{x}{l}\right); \\ T_3 = mg\left(1 - \dfrac{x}{l}\right). \end{cases} \implies \begin{cases} T_2 \in \left[\dfrac{Mg}{2}; \dfrac{(M+m)g}{2}\right]; \\ T_3 \in [0; mg]. \end{cases}$$

То есть

$$T_{3\max} = mg; \quad T_{2\max} = \frac{(M+m)g}{2}.$$

С учётом $m \geqslant M$ имеем $T_{3\max} \geqslant T_{2\max}$. Окончательно, при $x = 0$ получаем

$$T_{\max} = T_{3\max} = mg; \quad (m \geqslant M).$$

Ответ

$$\text{при } m < M \quad T_{\max} = \frac{M+3m}{4}g \quad (x = 0);$$

$$\text{при } m \geqslant M \qquad T_{\max} = mg \qquad (x = 0).$$

7.3 Изначальный объём воды в левом колене равен

$$V_{0л} = a^2 \cdot 2r \cdot 5.$$

Изначальный объём воды в правом колене (тот же самый за вычетом объёма льда в воде)

$$V_{0п} = a^2 \cdot 2r \cdot 5 - 5 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Объём воды, которая образуется при таянии льда

$$V_т = 10 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho_л}{\rho_в}.$$

Суммарный объём воды в вертикальных коленях после таяния льда

$$V = V_{0л} + V_{0п} + V_т = 10a^2 r + \left(10a^2 r - \frac{20}{3}\pi r^3\right) + \frac{20}{3}\pi r^2 \frac{\rho_л}{\rho_в}.$$

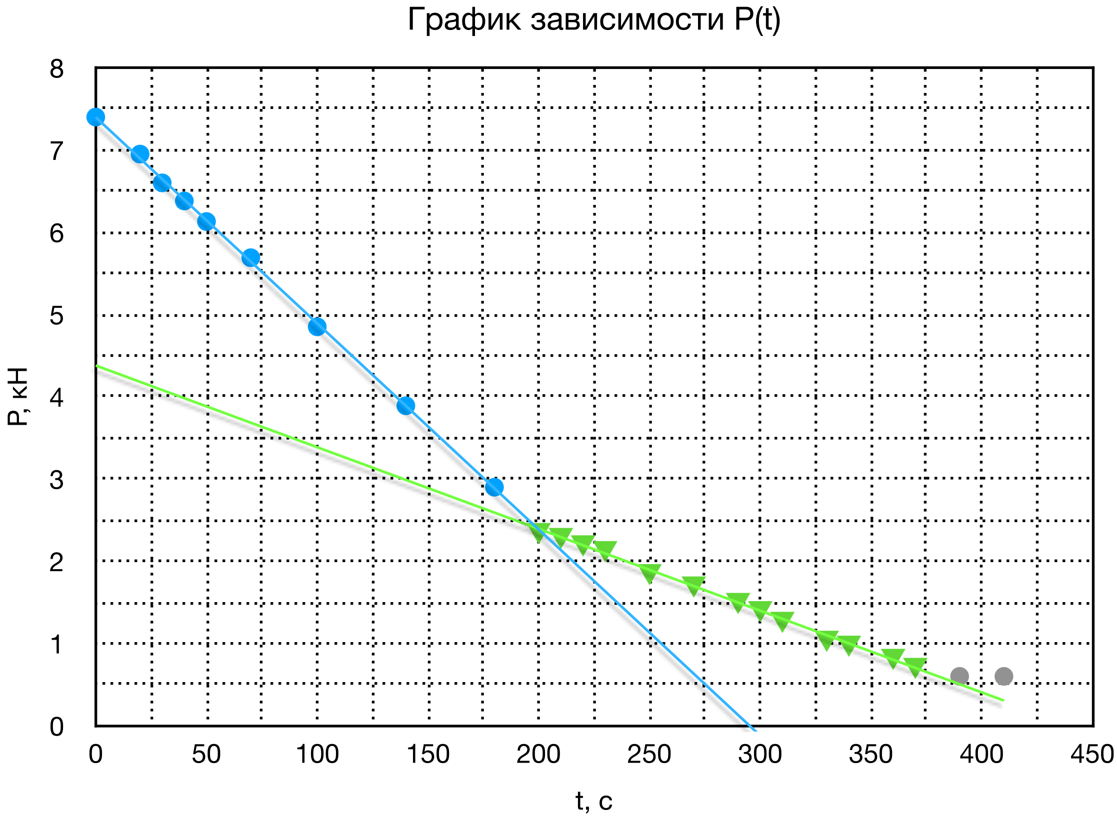
Уровни воды после таяния льда будут иметь одинаковую высоту, которую найдём из конечного объёма воды

$$h = \frac{V}{2a^2}.$$

После всех расчётов, получаем

$$h = 24{,}2 \text{ см}.$$

7.4 Построим график зависимости показаний весов P от времени t.



На графике явно выделяются три группы точек, лежащих на прямых. Точки, лежащие в интервале $t \in [0; 180\text{ с}]$, соответствуют вытеканию нижнего слоя жидкости плотности ρ_1. Изменение показания весов определяются выражением

$$\Delta P_1 = S_{\text{сос}}\rho_1 g\Delta h_1.$$

Из графика определяем, что к моменту вытекания нижнего слоя жидкости $t_1 = 200$ с изменения показания весов равны $\Delta P = 7{,}4$ кН $- 2{,}4$ кН $= 5{,}0$ кН. Тогда плотность нижнего слоя жидкости равна

$$\rho_1 = \frac{\Delta P_1}{S_{\text{сос}} g h_1} = \frac{5{,}0\text{ кН}}{0{,}5\text{ м}^2 \cdot 10\text{ Н/кг} \cdot 0{,}5\text{ м}} = 2000\text{ кг/м}^3.$$

Рассмотрим промежуток времени $t \in [180\text{ с}; 370\text{ с}]$, он соответствует вытеканию второго слоя жидкости. Рассмотрим систему «тело-вторая жидкость», на неё действуют три силы: сила тяжести второй жидкости, сила тяжести тела и сила реакции, со стороны сосуда. Сила тяжести тела не изменяется, сила тяжести второй жидкости линейно убывает со временем (так как жидкость вытекает из сосуда с постоянной объёмной скоростью), следовательно, показания весов также должны линейно зависеть от времени, что мы и видим на графике. Заметим, что наличие тела в сосуде приводит к уменьшению площади соприкосновения жидкости и сосуда в два раза, поэтому

$$\Delta P_2 = \frac{S_{\text{сос}}}{2}\rho_2 g\Delta h_2.$$

Для определения ρ_2 осталось определить только толщину слоя h_2. Для этого воспользуемся условием постоянства объёмной скорости вытекания

$$\frac{V_1}{t_1} = \frac{V_2}{t_2}.$$

Здесь V_1 и V_2 — объём нижнего и верхнего слоёв жидкости соответственно, t_1 и t_2 — времена их вытекания. Нижний слой жидкости имеет площадь $S_{\text{сос}}$, а второй слой жидкости — $(S_{\text{сос}} - S_{\text{тела}} = S_{\text{сос}}/2)$. Тогда получаем

$$\frac{S_{\text{сос}} h_1}{t_1} = \frac{S_{\text{сос}} h_2}{2t_2}; \quad \Longrightarrow \quad h_2 = 2\frac{t_2}{t_1}h_1.$$

Время вытекания второй жидкости t_2 определим из графика: вытекание началось в момент времени 200 с, закончилось в 390 с; откуда $t_2 = 190$ с. Подставляя значение t_2 в выражение для h_2, получим

$$h_2 = 2 \cdot \frac{190\text{ с}}{200\text{ с}} \cdot 0{,}5\text{ м} = 95\text{ см}.$$

Изменение показаний весов за время вытекания второй жидкости равно

$$\Delta P_2 = 2{,}36\text{ кН} - 0{,}6\text{ кН} = 1{,}76\text{ кН}.$$

Тогда плотность второй жидкости ρ_2 равна

$$\rho_2 = \frac{2\Delta P_2}{S_{\text{сос}} g h_2} = \frac{2 \cdot 1{,}76\text{ кН}}{0{,}5\text{ м}^2 \cdot 10\text{ м/с}^2 \cdot 0{,}95\text{ м}} \approx 740\text{ кг/м}^3.$$

По графику определяем, что показания весов в момент $t = 120$ с равны $P_0 = 4{,}4$ кН, поэтому масса всего содержимого в сосуде в этот момент равна

$$m = \frac{P_0}{g} = 440\text{ кг}.$$

Критерии 7 класс

Критерии 1 задача.

1. Выполнена пересадка в систему отсчёта первого спортсмена — 2 балла.
2. Определено, что на каждую тройную встречу приходится 3 двойных — 1 балл.
3. Определено количество двойных встреч — 1 балл.
4. Записано выражение для смещения второго спортсмена за круг — 1 балл.
5. Записано выражение для смещения третьего спортсмена за круг — 1 балл.
6. Указано, что первый спортсмен прошёл $4k$ кругов — 2 балла.
7. Указано, что второй спортсмен обогнал первого на $3k$ кругов — 1 балл.
8. Указано, что третий спортсмен обогнал первого на $9k$ кругов — 1 балл.

Замечание. Если ответ был получен не в общем виде, отнимается балл.

Критерии 2 задача.

1. Записано верное условие равновесия, найден правильный ответ — 1 балл.
2. Верно записано уравнение моментов — 1 балл.
3. Верно записано условие равновесия — 1 балл.
4. Решена система уравнений и получен правильный ответ — 1 балл.
5. Верно записано уравнение моментов и условия равновесия — по 1 баллу за каждый случай.
6. Указаны все геометрические соотношения, необходимые для решения — по 1 баллу за каждый случай.
7. Получет верный ответ — по 1 баллу за каждый случай.

Критерии 3 задача.

1. Указано, что будет одинаковый уровень воды в правом и левом колене после погружения льда и найдена начальная высота воды после погружения льда — 2 балла.
2. Рассчитан объем воды в левом колене — 1 балл.
3. Рассчитан объем льда, погруженного в воду — 1 балл.
4. Рассчитан объем воды в правом колене за вычетом льда — 2 балла.
5. Найден объем воды в левом и правом колене после таяния льда — 2 балла.
6. Найден объем воды в одном колене сосуда — 1 балл.
7. Найдена высота воды в этом колене — 1 балл.

Критерии 4 задача.

1. Записано выражение для изменения показания весов при вытекании нижнего слоя жидкости — 1 балл.
2. Верно определена плотность ρ_1 — 1 балл.
3. Записано постоянство объёмной скорости вытекания жидкости — 1 балл.
4. Учтена площадь плавающего тела в выражении для объёмной скорости вытекания — 1 балл.
5. Определена толщина h_2 верхнего слоя жидкости — 1 балл.
6. Записано выражение для изменения показания весов при вытекании верхнего слоя жидкости — 1 балл.
7. Учтена площадь плавающего тела в выражении для изменения показания весов — 2 балла.
8. Определена масса содержимого в момент времени 120 с — 2 балла.

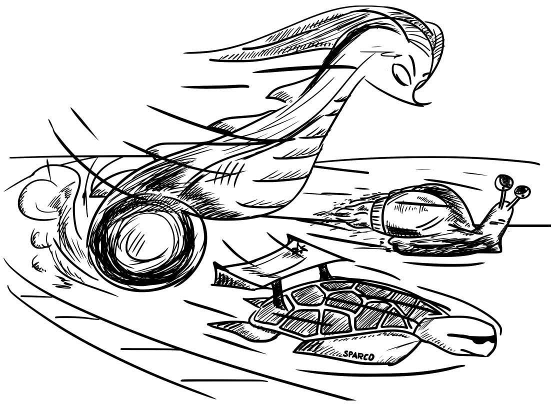
Олимпиада 8 класс

8.1. Три марафонца начинают бег по кругу из одной и той же точки. Скорость первого спортсмена равна 4 км/ч, второго — 7 км/ч, а третьего — 13 км/ч. Марафонцы бегут в одну и ту же сторону.

1. Через некоторое время спортсмены встретились 10 раз. Сколько к этому моменту времени было встреч, в которых участвовало **только** два спортсмена?

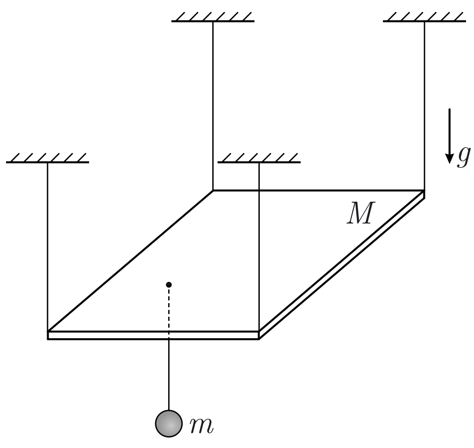
   Примечание. «Тройная» встреча марафонцев считается за одну.

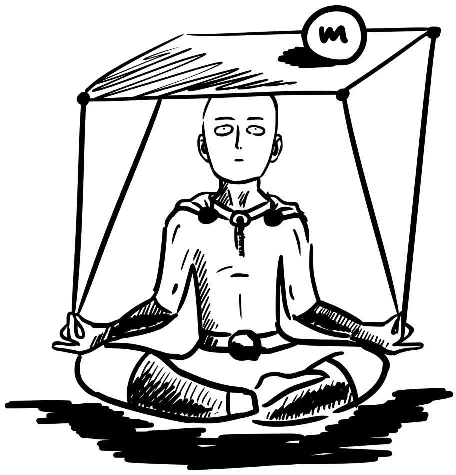
2. В некоторый момент времени все три спортсмена снова встретились на старте. На сколько кругов второй и третий марафонец могли обойти первого?



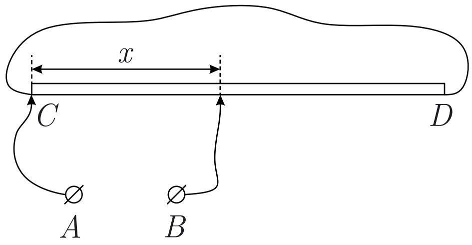
8.2. Однородная тонкая квадратная пластина массой M имеет постоянную толщину. Её подвешивают на четырех одинаковых легких вертикальных нитях к горизонтальному потолку, а затем к некоторой точке квадрата подвешивают на невесомой нити груз массой m. Ускорение свободного падения g. Определите:

1. силы натяжения нитей при подвешивании груза к точке пересечения диагоналей квадрата;
2. силы натяжения нитей при подвешивании груза к середине ребра квадрата;
3. к какой точке на диагонали квадрата нужно подвесить груз, чтобы получить максимально возможное значение силы натяжения одной из нитей? Чему равно это максимальное значение $T_{\max}$?

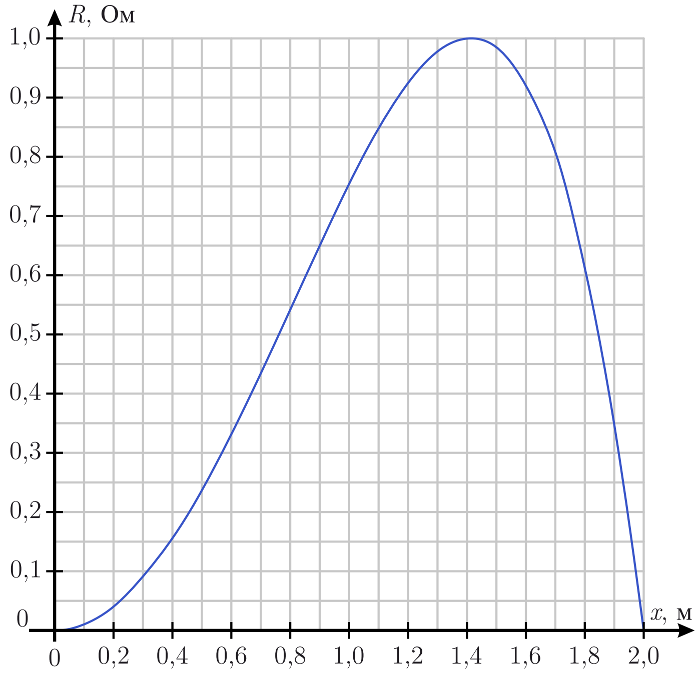


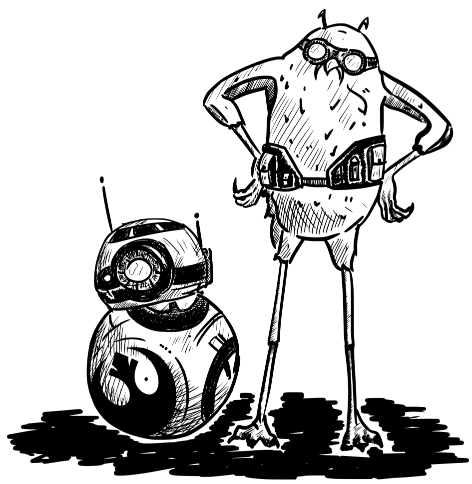


8.3. Концы неоднородного цилиндрического провода CD некоторой длины L постоянного сечения $S = 0{,}25$ мм^2 соединили перемычкой. Затем сняли зависимость сопротивления R между выводами AB от расстояния подвижного контакта до неподвижного контакта C. Сопротивление проводящих проводов и контактное сопротивление пренебрежимо малы.



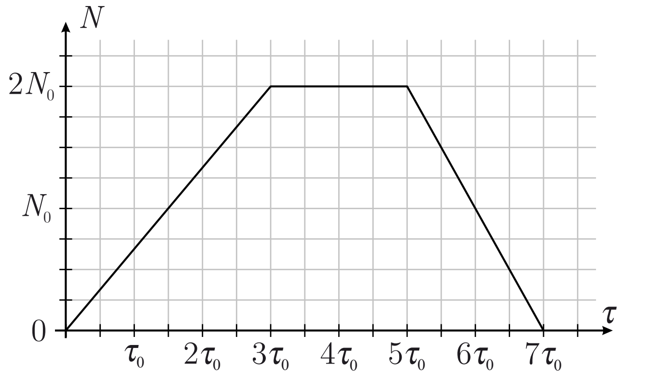
1. Определите длину провода L.
2. Определите общее сопротивление стержня R_0 между концами стержня без перемычки.
3. Чему равны удельные сопротивления ρ_0, ρ_1 и ρ_2 провода в точках с координатами $x_0 = 0$ м, $x_1 = 0{,}9$ м и $x_2 = 1{,}7$ м соответственно?

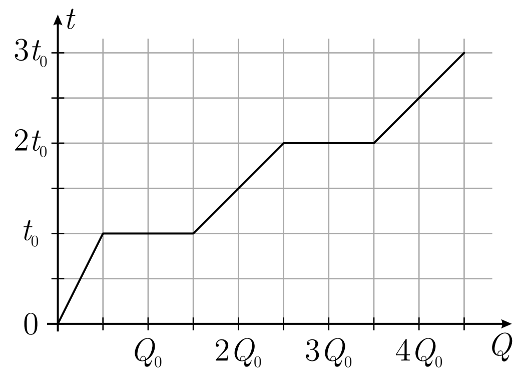




8.4. Некоторое вещество поместили в калориметр с встроенным нагревателем. Графики зависимости мощности N нагревателя от времени τ его работы и температуры t вещества от переданного ему количества теплоты Q указаны на рисунке.

1. Чему равно отношение теплоёмкостей вещества в твёрдом, жидком и газообразном состояниях?
2. Найдите отношение удельной теплоты плавления и парообразования вещества.
3. Найдите моменты времени, в которые начиналось и заканчивалось плавление и испарение.





Решения 8 класс

8.1 Смотрите решение 1 задачи 7 класса.

8.2 Смотрите решение 2 задачи 7 класса.

8.3 **1.** По графику понятно, что при достижении подвижным контактом точки D измеряемое сопротивление будет равно нулю. До точки с координатой $x = 2$ м сопротивление нигде не обнуляется, значит $L \geqslant 2$ м. Следует отметить, что длина провода может быть и больше, например, если все участки с координатами $x \geqslant 2$ м имеют нулевое удельное сопротивление.

2. Обозначим сопротивление участка длиной x за R_x. Тогда

$$R = \frac{R_x(R_0 - R_x)}{R_0}; \quad \Longrightarrow \quad R = R_x - \frac{1}{R_0}R_x^2. \tag{1}$$

Заметим, что

$$R = R_{\max} = \frac{R_0}{4},$$

при $R_x = R_0/2$. Из графика определяем $R_{\max} = 1$ Ом, тогда

$$R_0 = 4R_{\max} = 4 \text{ Ом}.$$

3. При смещении подвижного контакта на малую величину $\Delta x \ll L$ сопротивление R_x изменится на

$$\Delta R_x = \rho(x)\frac{\Delta x}{S}.$$

Найдём изменение общего сопротивления

$$\begin{cases} R = R_x - \dfrac{1}{R_0}R_x^2; \\ R + \Delta R = R_x + \Delta R_x - \dfrac{1}{R_0}\left(R_x + \Delta R_x\right)^2; \end{cases}$$

$$\Delta R = \Delta R_x - \frac{1}{R_0}\left(2R_x\Delta R_x + (\Delta R_x)^2\right) \approx \Delta R_x - 2\frac{R_x}{R_0}\Delta R_x.$$

Здесь мы учли, что $(\Delta R_x)^2 \ll 2R_x\Delta R_x$ (т. е. пренебрегли величиной второго порядка малости). Получаем, что

$$\rho(x) = \frac{S}{1 - 2\frac{R_x}{R_0}}\frac{\Delta R}{\Delta x},$$

где $\frac{\Delta R}{\Delta x} \approx k$ — угловой коэффициент касательной к графику ($\Delta x \to 0$). Сопротивление R_x находится как решение квадратного уравнения (1).

В результате получаем ответы

$$\rho_0 = 0; \quad \rho_1 \approx 0{,}45\ \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}; \quad \rho_2 \approx 0{,}85\ \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}.$$

8.4 **1.** Рассмотрим график зависимости $t(Q)$. Из него мы видим, что в твёрдом состоянии веществу было передано $0{,}5Q_0$ тепла и его температура изменилась на t_0. В жидком и газообразном состоянии веществу было передано тепло Q_0 и температура в обоих случаях изменилась также на t_0. Отсюда найдём отношение теплоёмкостей

$$C_{\text{тв}} : C_x : C_2 = \frac{0{,}5Q_0}{t_0} : \frac{Q_0}{t_0} : \frac{Q_0}{t_0} = 1 : 2 : 2.$$

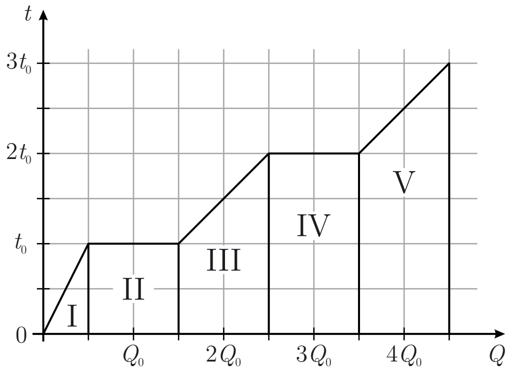
2. Для того, чтобы расплавить вещество, потребовалось тепло Q_0. Такое же тепло Q_0 потребовалось чтобы испарить вещество. Так как масса вещества не изменилась, то удельные теплоты соотносятся как

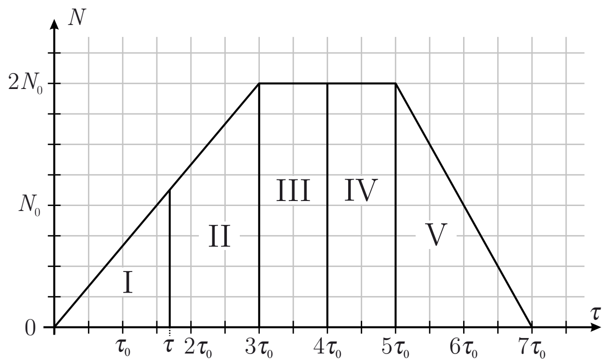
$$\lambda : r = \frac{Q_0}{m} : \frac{Q_0}{m} = 1 : 1.$$

3. Общее тепло за весь процесс по графике $t(Q)$ равно $Q_{\text{общ}} = 4{,}5Q_0$. Через площадь под графиком $N(\tau)$ найдём, что это тепло также равно

$$Q_{\text{общ}} = 9\tau_0 N_0 = 4{,}5Q_0.$$

Тогда $Q_0 = 2\tau_0 N_0$. Разделим график $t(Q)$ на 5 участков и отметим эти участки на графике $N(\tau)$.





Заметим, что для участков V, IV и III можно записать $2N_0\tau_0 = Q_0$. Найдём момент времени соответствующий началу плавления — граница между I и II. Пусть этот момент времени τ. На этом участке графика $N(\tau) = \frac{2}{3}\frac{\tau}{\tau_0}N_0$. Тепло, полученное веществом на участке I, равно

$$Q_{\text{I}} = 0{,}5Q_0 = N_0\tau_0,$$

соответствует площади под графиком $N(\tau)$ на участке $[0, \tau]$

$$A = \frac{N(\tau)\tau}{2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{\tau}{\tau_0}N_0\tau}{2} = \frac{1}{3}\frac{N_0\tau^2}{\tau_0}.$$

Так как $A = Q_{\text{I}}$, то

$$\frac{1}{3}N_0\frac{\tau^2}{\tau_0} = N_0\tau_0; \quad \Longrightarrow \quad \tau^2 = 3\tau_0^2; \quad \Longrightarrow \tau = \tau_0\sqrt{3}.$$

Таким образом плавление началось в момент $\tau = \tau_0\sqrt{3}$.

Критерии 8 класс

Критерии 1 задача.

Смотрите критерии 1 задачи 7 класса.

Критерии 2 задача.

Смотрите критерии 2 задачи 7 класса.

Критерии 3 задача.

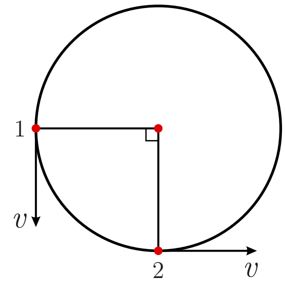
1. Объяснено, почему L не может быть меньше 2 м — 1 балл.
2. Сказано, почему длина провода может быть больше 2 м — 1 балл.
3. Верно записано общее сопротивление при параллельном соединении — 1 балл.
4. Отмечена идея как найти R_0 из графика и полученной зависимости — 1 балл.
5. Верно проанализирован график и получен правильный ответ — 1 балл.
6. Указана идея нахождения $\rho(x)$ и записана формула изменения участка сопротивления длиной x при сдвиге клеммы на dx — 1 балл.
7. Получена зависимость $\rho(x)$ и описан алгоритм нахождения ответов — 2 балла.
8. Верно подсчитаны ответы
   - за ответ для ρ_0 — 0,5 балла;
   - за ответ для ρ_1 — 0,75 балла;
   - за ответ для ρ_2 — 0,75 балла.

Критерии 4 задача.

1. Описана идея нахождения соотношения теплоёмкостей — 1 балл.
2. Правильно проанализированы графики и найден верный ответ — 1 балл.
3. Описана идея нахождения соотношения теплоты плавления и парообразования вещества — 1 балл.
4. Правильно проанализированы графики и найден верный ответ — 1 балл.
5. Найдена связь между Q_0, τ_0 и N_0 — 2 балла.
6. Верное нахождение моментов начала и конца процессов плавления и парообразования — по 1 баллу за каждое найденное время (всего 4 балла).

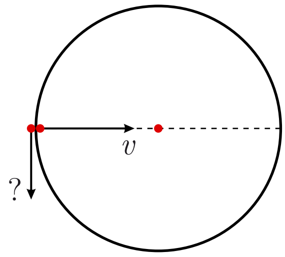
Олимпиада 9 класс

9.1. **1.** Два автомобиля расположены на окружности радиуса R так, что угол между радиусами проведёнными к ним равен $90°$. Автомобили начинают двигаться по окружности против часовой стрелки с постоянной по модулю скоростью v. Чему равна скорость первого автомобиля относительно второго в момент начала движения? Как изменится ответ, если первый автомобиль будет двигаться по часовой стрелке?

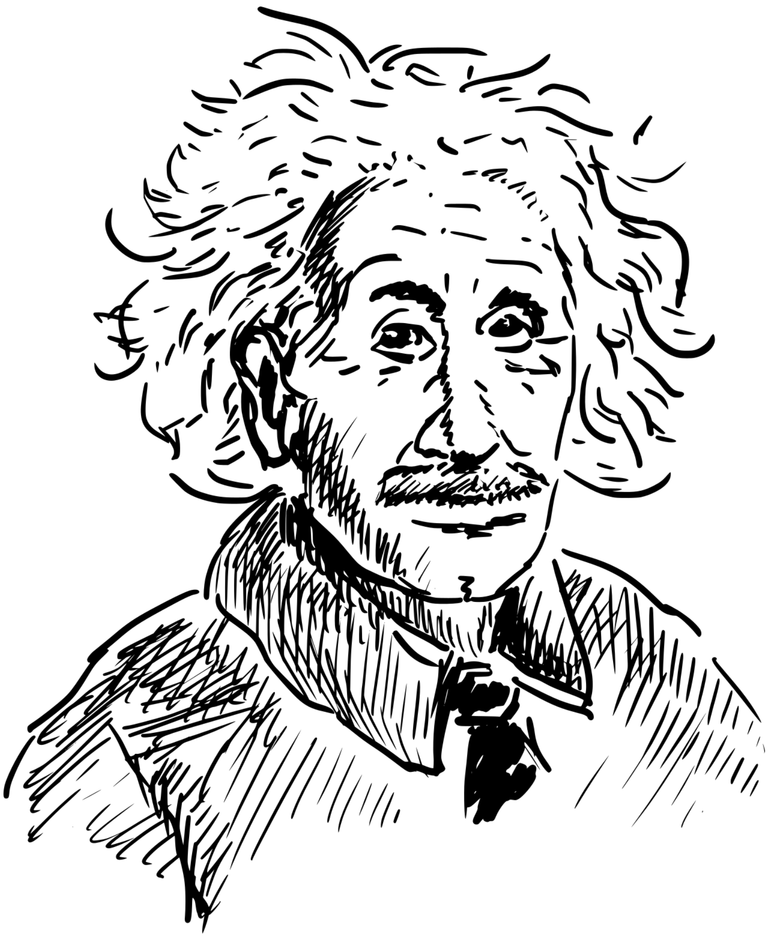


2. Два автомобиля в нулевой момент времени располагаются так же, как и в предыдущем пункте и начинают движение против часовой стрелки с постоянной по модулю скоростью. Скорость первого автомобиля равна v, скорость второго автомобиля $2v$. Как зависит от времени модуль скорости второго автомобиля относительно первого?

3. Два автомобиля находятся в одной точке на окружности радиуса R. Первое тело начинает двигаться с постоянной скоростью v вдоль диаметра окружности. С какой скоростью должно двигаться второе тело по окружности, чтобы они встретились? Как зависит модуль скорости первого автомобиля относительно второго от времени? Как зависит модуль скорости второго тела относительно первого от времени?



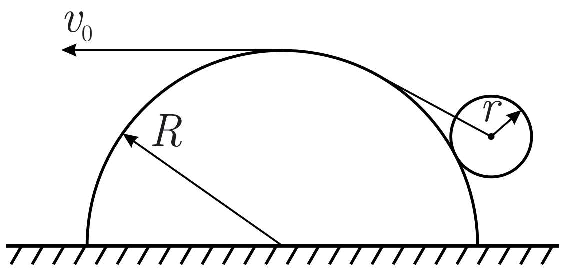
Замечание. Все автомобили имеют малый размер!



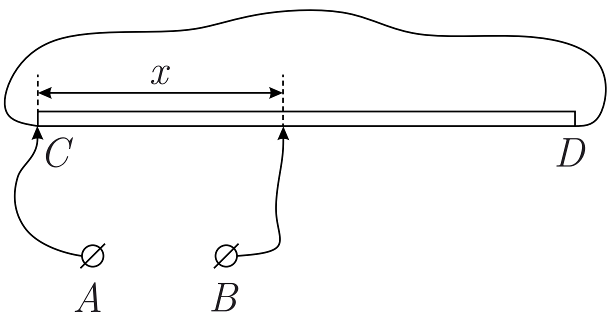
9.2. По гладкой цилиндрической поверхности радиуса R скользит шарик радиуса r под действием нити, перекинутой через цилиндр и жестко прикрепленной к центру шарика (см. рис.). Нерастяжимую нить вытягивают в горизонтальном направлении с постоянной скоростью v_0. В начальный момент времени шарик находится на земле, нить натянута.

1. Найдите силу, с которой шарик давит на цилиндр сразу после отрыва от земли в случае, когда скорость $v_0^2 \ll gR$.
2. Найдите зависимость скорости шарика от времени для произвольных значений v_0, ограничившись рассмотрением части процесса, когда шарик и нить касаются цилиндра.
3. Чему равен угол между горизонтом и линией, соединяющей центры шарика и цилиндра, в момент отрыва шарика от цилиндра? Считайте, что отрыв шарика происходит раньше, чем нить перестает касаться цилиндра.

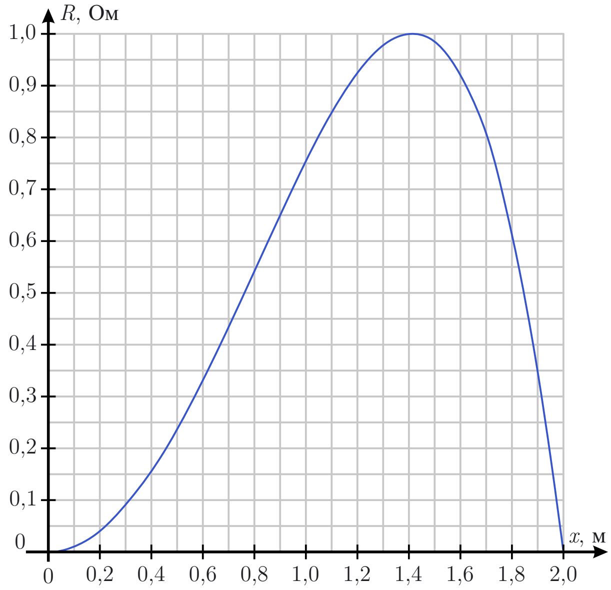
Считайте, что шарик движется в плоскости рисунка. Ускорение свободного падения g.

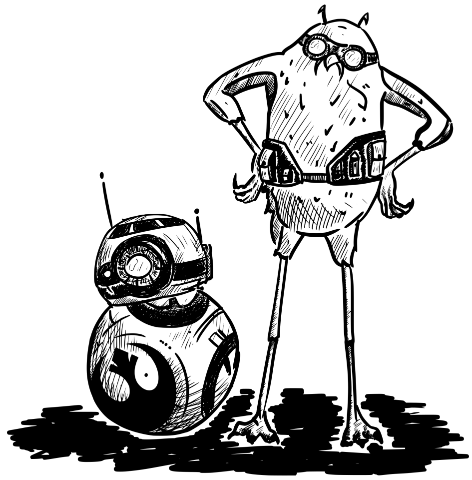


9.3. Концы неоднородного цилиндрического провода CD некоторой длины L постоянного сечения $S = 0{,}25$ мм^2 соединили перемычкой. Затем сняли зависимость сопротивления R между выводами AB от расстояния подвижного контакта до неподвижного контакта C. Сопротивление проводящих проводов и контактное сопротивление пренебрежимо малы.



1. Определите длину провода L.
2. Определите общее сопротивление стержня R_0 между концами стержня без перемычки.
3. Чему равны удельные сопротивления ρ_0, ρ_1 и ρ_2 провода в точках с координатами $x_0 = 0$ м, $x_1 = 0{,}9$ м и $x_2 = 1{,}7$ м соответственно?





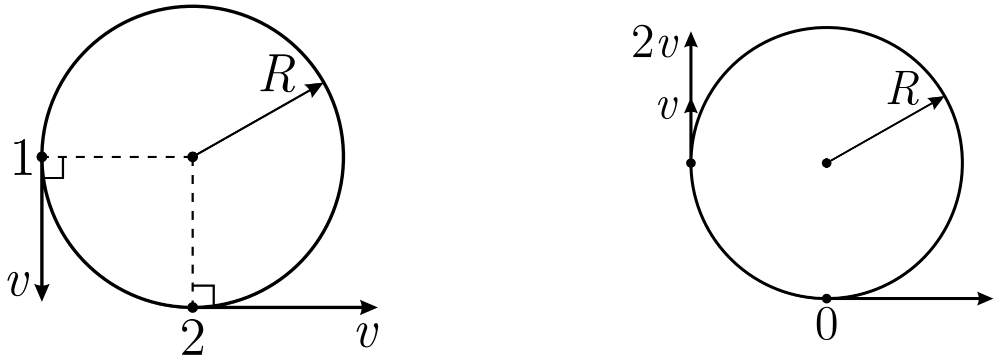
9.4. Наверняка вам приходилось разглядывать мир через стеклянный шар или шарик и видеть картину как на приведённой фотографии. В данной задаче вам необходимо дать объяснение наблюдаемым фактам. Для простоты, считайте, что расстояние от глаза до шара намного больше радиуса шара.

1. С помощью геометрических построений покажите, что изображение далёких объектов будет перевёрнутым.
2. При каком показателе преломления стекла угол обзора будет равен 180°?
3. Чему равен угол обзора, если показатель преломления стекла равен 1,5?

Примечание. Угол обзора — это угол между крайними наблюдаемыми точками с центром в точке нахождения шара, которой можно считать очень маленьким.

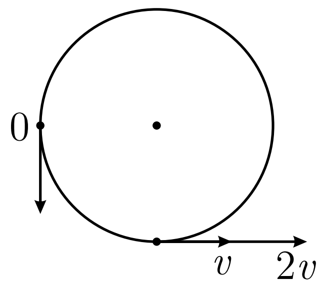
Решения 9 класс

9.1 **1.** Перейдём в систему отсчёта K', вращающуюся с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{R}$ против часовой стрелки. В этой системе отсчёта скорости автомобилей равны нулю, значит $v_{1\text{отн}2} = 0$. Если первый автомобиль в лабораторной системе отсчёта (ЛСО) двигался по часовой стрелке, то в этой системе отсчёта его скорость будет равна $v_1' = v + \omega R = 2v$. Так как автомобиль 2 по-прежнему покоится, то $v_{1\text{отн}2} = v_1' = 2v$.



2. В системе отсчёта K' первый автомобиль покоится, а скорость второго по модулю равна

$$v_2' = 2v - \omega R = v.$$



3. Условие встречи автомобилей

$$\begin{cases} vt = 2R; \\ v_2 t = \pi R + 2\pi k R, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{v_2}{v} = \frac{\pi + 2\pi k}{2}; \quad \Longrightarrow \quad v_2 = v\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся против часовой стрелки вокруг центра окружности со скоростью $\omega = \frac{v_2}{R}$. В этой системе отсчёта второй автомобиль покоится, а скорость первого равна

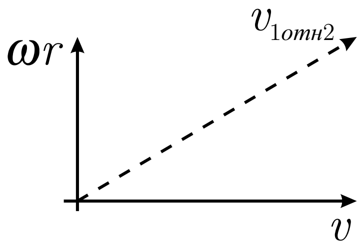
$$v_{1\text{отн}2} = \sqrt{v^2 + (\omega r)^2},$$

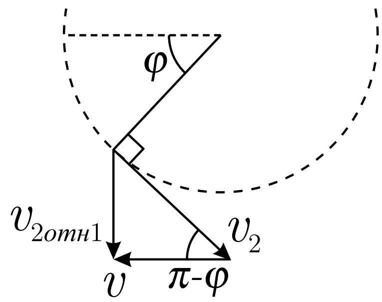
где r — расстояние от первого автамобиля до центра. Расстояние r равно

$$r = |R - vt|.$$

Тогда

$$v_{1\text{отн}2} = \sqrt{v^2 + v_2^2\left(1 - \frac{vt}{R}\right)^2} = v\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2\left(1 - \frac{vt}{R}\right)^2}.$$





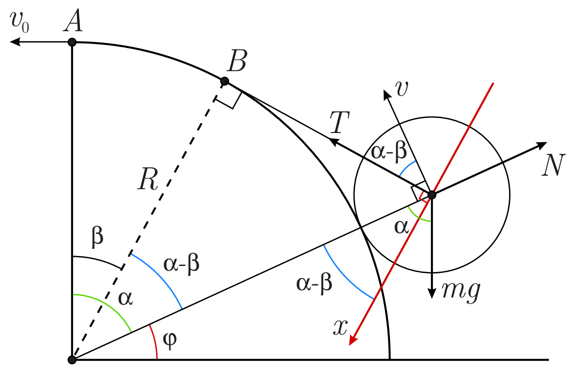
Перейдём в систему отсчёта первого автомобиля. Скорость второго равна

$$v_{2\text{отн}1} = \sqrt{v^2 + v_2^2 - 2vv_2 \sin\varphi},$$

где $\varphi = \frac{v^2}{R}t$. Преобразуем выражения для относительной скорости

$$v_{2\text{отн}1} = v\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2 - 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\sin\left(\frac{v}{R}t\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right)}.$$

9.2 Расставим силы, действующие на цилиндр. В точке B нить «отрывается» от цилиндра.



Из треугольника OBC имеем

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{R}{R + r}.$$

Запишем условие нерастяжимости нити

$$v_0 = v\cos(\alpha - \beta).$$

Из записанных уравнений получим

$$v = v_0 \frac{R + r}{R}.$$

Заметим, что эта скорость направлена по касательной к цилиндру и остаётся постоянной по величине! Следовательно, у шарика есть только центростремительное ускорение. Запишем теорему о движении центра масс на ось перпендикулярную нити

$$m\frac{v^2}{R + r}\cos(\alpha - \beta) = mg\cos\beta - N\cos(\alpha - \beta).$$

В момент отрыва $N = 0$, тогда

$$\cos\beta_0 = \frac{v^2}{g}\frac{\cos(\alpha-\beta)}{R+r} = \frac{v_0^2}{gR}.$$

Однако это выражение требует осмысления. В начальный момент времени, когда шарик стоит на земле

$$\beta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{r}{R+r} - \arccos\frac{R}{R+r}.$$

В процессе движения

$$\cos\beta \in [\cos\beta_{\max}; 1]$$

Выразим зависимость силы реакции опоры N от угла β

$$N(\beta) = mg\frac{R+r}{R}\left(\cos\beta - \frac{v_0^2}{gR}\right).$$

Если $\frac{v_0^2}{gR} > \cos\beta_{\max}$, то отрыв произойдёт сразу, а если $\frac{v_0^2}{gR} < \cos\beta_{\max}$, то пока нить касается цилиндра, отрыва не будет.

Окончательный ответ:

$$\text{при } \frac{v_0^2}{gR} > \sin\left[\arcsin\frac{r}{R+r} + \arccos\frac{R}{R+r}\right] \text{ отрыв происходит при } \varphi = \arcsin\frac{r}{R+r};$$

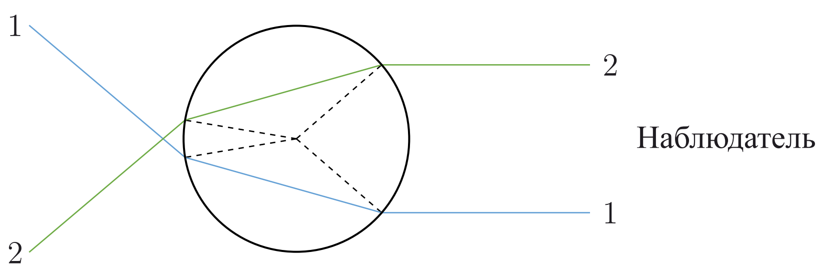
$$\text{при } \frac{v_0^2}{gR} < \sin\left[\arcsin\frac{r}{R+r} + \arccos\frac{R}{R+r}\right] \text{ отрыв не произойдёт.}$$

Замечание. Проведём нетрудные преобразования

$$\sin\left[\arcsin\frac{r}{R+r} + \arccos\frac{R}{R+r}\right] = \frac{r}{R+r}\frac{R}{R+r} + \sqrt{1-\frac{r^2}{(R+r)^2}}\sqrt{1-\frac{R^2}{(R+r)^2}} =$$
$$= \frac{rR + \sqrt{\left((R+r)^2-r^2\right)\left((R+r)^2-R^2\right)}}{(R+r)^2} = \frac{rR+\sqrt{rR(R+2r)(2R+r)}}{(R+r)^2}.$$

9.3 Смотрите решение 3 задачи 8 класса.

9.4 **1.** На рисунке приведён ход лучей от двух точек к глазу наблюдателя сквозь шар.



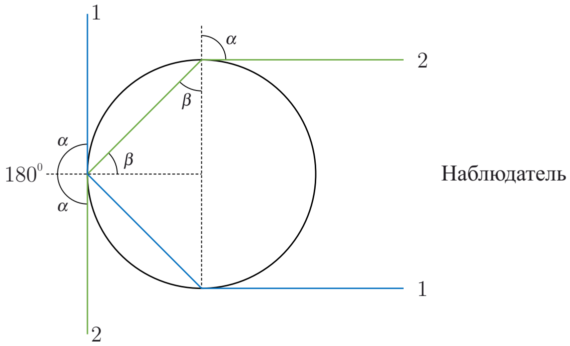
Так как расстояние между шаром и глазом наблюдателя гораздо больше радиуса шара, то лучи, идущие из шара к наблюдателю нарисованы параллельными.

Как видно из рисунка, лучи, идущие от точек (источников) 1 и 2 после прохождения сквозь шар меняются положениями, что объясняет перевёрнутое изображение.

При подготовке чертежа удобно пользоваться принципом обратимости лучей и рисовать их справа налево. Можно также вместо двух симметричных лучей нарисовать только один, а в качестве второго луча взять луч, проходящий через центр шара, который не преломляется.

Примечание. В данном пункте нет необходимости локализовать источники, рисуя два луча от каждого источника. Так как мы рассматриваем удалённые объекты, можно считать все лучи, идущие от них, параллельными. Тогда каждый из лучей можно заменить парой близко идущих параллельных лучей, что не меняет решения.

2. Рассмотрим два крайних луча, идущих к наблюдателю.



Они исходят от крайних точек на поверхности шара. Для того, чтобы угол обзора был равен 180°, они должны проходить через шар так, как показано на рисунке. Углы падения таких лучей составляют 90° с нормалью к поверхности шара.

По закону Снеллиуса

$$\sin\alpha = n\sin\beta; \quad \sin\alpha = \sin 90^\circ = 1.$$

Из рисунка видно, что $\beta = 45^\circ$. Тогда

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{2}.$$

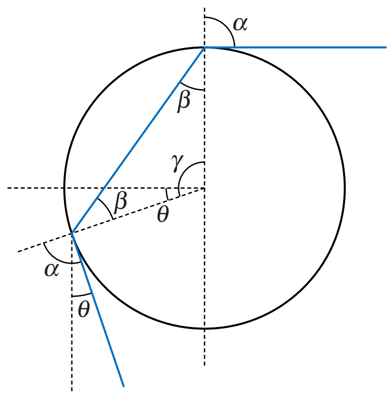
3. Рассмотрим ход луча. Запишем закон Снеллиуса

$$\sin\alpha = n\sin\beta; \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{2}{3}.$$

Откуда находим $\beta = \arcsin(2/3) = 41{,}8^\circ$. Тогда $\gamma = 180^\circ - 2\cdot 41{,}8^\circ = 96{,}4^\circ$. Из рисунка

$$\theta = \gamma - 90^\circ = 6{,}4^\circ.$$

А угол обзора равен $180^\circ + 2\theta = 192{,}8^\circ$.



Критерии 9 класс

Критерии 1 задача.

1. Получен верный ответ в пункте 1 — 2 балла (по 1 за каждый ответ).
2. Получен верный ответ в пункте 2 — 1 балл.
3. Записано условие встречи автомобилей — 0,5 балла.
4. В условии встречи учтено, что второй автомобиль может сделать несколько оборотов по окружности — 0,5 балла.
5. Получена хотя бы одна скорость — 0,5 балла.
6. Получена множество значений скорости — 0,5 балла.
7. Записан закон сложения скоростей — 2 балла.
8. Получена зависимость модуля скорости первого, относительно второго — 1 балл.
9. Записан закон сложения скоростей — 1 балл.
10. Получен ответ — 1 балл.

Критерии 2 задача.

1. Записано верное условие равновесия, найден правильный ответ — 1 балл.
2. Верно записано уравнение моментов — 1 балл.
3. Верно записано условие равновесия — 1 балл.
4. Решена система уравнений и получен правильный ответ — 1 балл.
5. Верно записано уравнение моментов и условия равновесия — по 1 баллу за каждый случай.
6. Указаны все геометрические соотношения, необходимые для решения — по 1 баллу за каждый случай.
7. Получен верный ответ — по 1 баллу за каждый случай.

Критерии 3 задача.

Смотрите критерии 3 задачи 8 класса.

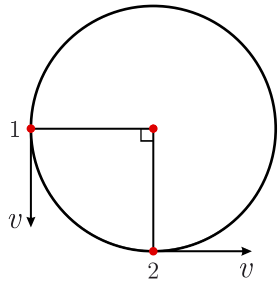
Критерии 4 задача.

Способ 1.

1. Верный ответ на 1 вопрос — 3 балла.
2. Верный ответ на 2 вопрос — 3 балла.
3. Верный ответ на 3 вопрос — 4 балла

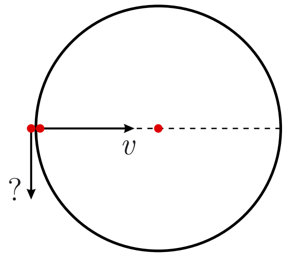
Олимпиада 10 класс

10.1. 1. Два автомобиля расположены на окружности радиуса R так, что угол между радиусами проведёнными к ним равен $90°$. Автомобили начинают двигаться по окружности против часовой стрелки с постоянной по модулю скоростью v. Чему равна скорость первого автомобиля относительно второго в момент начала движения? Как изменится ответ, если первый автомобиль будет двигаться по часовой стрелке?

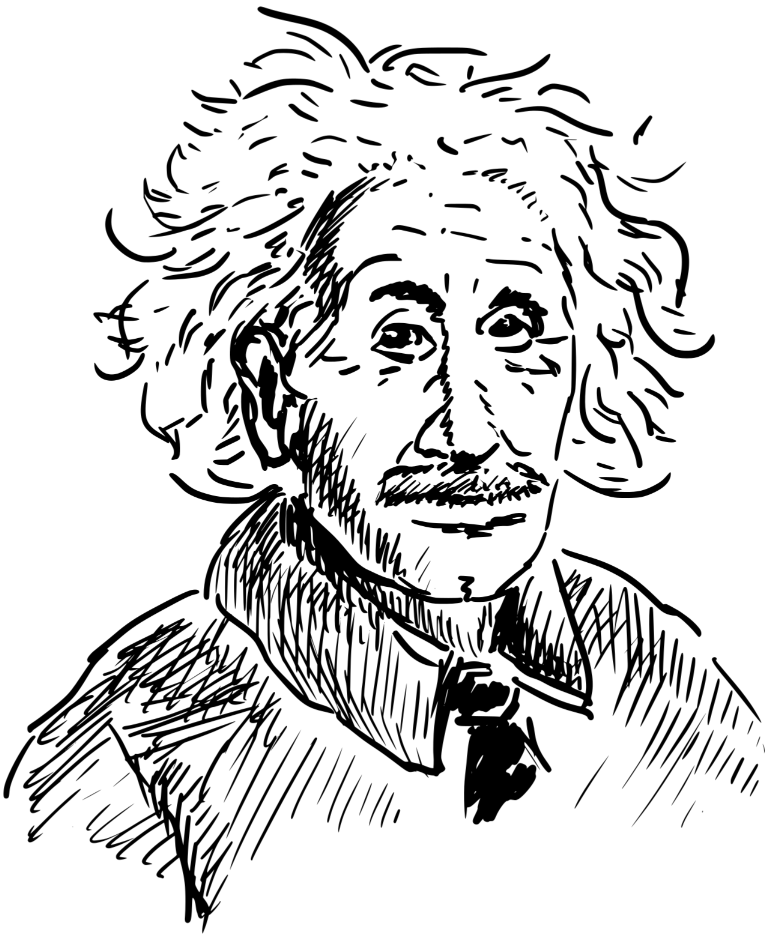


2. Два автомобиля в нулевой момент времени располагаются так же, как и в предыдущем пункте и начинают движение против часовой стрелки с постоянной по модулю скоростью. Скорость первого автомобиля равна v, скорость второго автомобиля $2v$. Как зависит от времени модуль скорости второго автомобиля относительно первого?

3. Два автомобиля находятся в одной точке на окружности радиуса R. Первое тело начинает двигаться с постоянной скоростью v вдоль диаметра окружности. С какой скоростью должно двигаться второе тело по окружности, чтобы они встретились? Как зависит модуль скорости первого автомобиля относительно второго от времени? Как зависит модуль скорости второго тела относительно первого от времени?



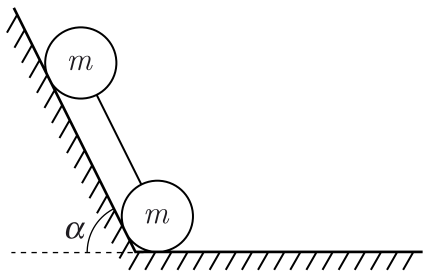
Замечание. Все автомобили имеют малый размер!



10.2. Гантель, состоящую из двух маленьких шариков одинаковой массы m, соединенных невесомым абсолютно твердым стержнем длины L, удерживают в соприкосновении с наклонной стеной, составляющий угол α с горизонтальным полом. Нижний шарик гантели при этом касается пола. Стена и пол гладкие. В некоторый момент времени гантель отпускают, и нижний шарик начинает скользить по полу, а верхний — вдоль стены.

1. Чему равна скорость верхнего шарика в момент времени, когда угол между стержнем и горизонтом равен φ?
2. Как зависит от φ сила упругости стержня в случае, когда стена вертикальна?
3. Существуют ли значения α в интервале от 30 до 60 градусов, при которых в процессе соскальзывания гантели стержень будет испытывать сжатие во все моменты времени вплоть до касания верхним шариком пола?
4. Существуют ли такие значения α в интервале от 60 до 90 градусов?

Ответы обоснуйте. Стержень считается сжатым, если силы, действующие на него со стороны шариков, направлены в сторону центра стержня, и растянутым при противоположном направлении сил. Ускорение свободного падения g.



10.3. Два кольца находятся на гладкой горизонтальной поверхности так, что их центры совпадают. Радиусы колец R и r ($R \gg r$), заряды колец Q и q.

1. Найдите напряжённость и потенциал поля на вертикальной оси, проходящей через центры колец.
2. На сколько изменится сила натяжения маленького кольца, если заряд большого кольца уменьшить в два раза?

10.4. Наверняка вам приходилось разглядывать мир через стеклянный шар или шарик и видеть картину как на приведённой фотографии. В данной задаче вам необходимо дать объяснение наблюдаемым фактам. Для простоты, считайте, что расстояние от глаза до шара намного больше радиуса шара.

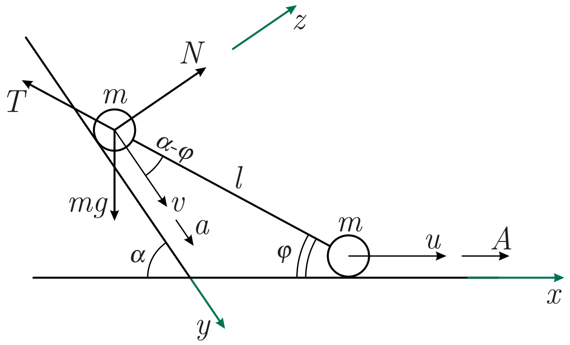
1. С помощью геометрических построений покажите, что изображение далёких объектов будет перевёрнутым.
2. При каком показателе преломления стекла угол обзора будет равен $180°$?
3. Чему равен угол обзора, если показатель преломления стекла равен 1,5?

Примечание. Угол обзора — это угол между крайними наблюдаемыми точками с центром в точке нахождения шара, которой можно считать очень маленьким.

Решения 10 класс

10.1 Смотрите решение 1 задачи 9 класса.

10.2 **1.** Расставим силы, действующую на верхний шар гантельки.



Запишем закон сохранения энергии

$$mgl(\sin\alpha - \sin\varphi) = \frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2}.$$

Кинематическая связь для скоростей имеет вид

$$v\cos(\alpha-\varphi) = u\cos\varphi; \quad \Longrightarrow \quad u = v\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Запишем теорему о движении центра масс для шариков на оси x, y и z соответственно

$$\begin{cases} mA = T\cos\varphi; \\ ma = mg\sin\alpha - T\cos(\alpha-\varphi); \\ N = mg\cos\alpha + T\sin(\alpha-\varphi). \end{cases}$$

Кинематические связи для ускорения шариков имеет вид

$$a\cos(\alpha-\varphi) - A\cos\varphi = \frac{(u\sin\varphi + v\sin(\alpha-\varphi))^2}{l}.$$

Подставляя кинематическую связь для скоростей в ЗСЭ, получим

$$2gl(\sin\alpha - \sin\varphi) = v^2\left(1 + \frac{\cos^2(\alpha-\varphi)}{\cos^2\varphi}\right); \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{2gl\cos^2\varphi(\sin\alpha-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha-\varphi)}.$$

Выразив ускорения из теоремы о движении центра масс и подставив их в кинематическую связь, получим уравнение

$$g\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \frac{T}{m}\cos^2(\alpha-\varphi) - \frac{T}{m}\cos^2\varphi = \frac{v^2}{l}\left(\sin(\alpha-\varphi) + \cos(\alpha-\varphi)\operatorname{tg}\varphi\right]^2.$$

Упростим тригонометрическое выражение, стоящее в правой части равенства,

$$(\sin(\alpha-\varphi) + \cos(\alpha-\varphi)\operatorname{tg}\varphi)^2 = (\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(\cos\alpha\cos\varphi +$$

$$+ \sin\alpha\sin\varphi))^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}.$$

Выражаем T с учётом выполненных преобразований

$$T = \frac{mg\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \frac{mv^2}{l}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha-\varphi)}.$$

Подставив сюда найденное значение v^2, получим

$$T = \frac{mg\sin\alpha}{\left(\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha-\varphi)\right)^2}\left[\cos(\alpha-\varphi)\left(\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)\right) - 2\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\varphi)\right].$$

Нас интересует знак функции

$$f(\varphi) = \cos(\alpha-\varphi)\cos^2\varphi + \cos^3(\alpha-\varphi) - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\varphi$$

при фиксированном значении угла α.

Пусть $\alpha = \frac{\pi}{6}$, тогда

$$f(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cos^2\varphi + \cos^3\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) - \frac{1}{2} + \sin\varphi.$$

При $0 < \varphi < \pi/6$ значение $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $\cos^2\varphi \geqslant 3/4$. Тогда

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cos^2\varphi + \cos^3\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \geqslant 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{2}.$$

То есть $f(\varphi) > 0$ при любых $\varphi \in [0;\pi/6]$. Следовательно, в интервале $\alpha \in [\pi/6;\pi/3]$ есть такое $\alpha = \pi/6$, при котором $T > 0$, так что стержень сжат. Заметим также, что при этом $N > 0$ и отрыва не происходит, так что наше решение законно.

Рассмотрим интервал $\alpha \in [\pi/3;\pi/2]$, для каждого α рассмотрим положение стержня $\varphi = 0$. Тогда

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\sin^2\alpha.$$

Это монотонно убывающая функция

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 2\cdot\frac{3}{4} = -\frac{7}{8} < 0.$$

Следовательно, при всех значения $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ существует положение стержня $\varphi \to 0$, при котором стержень не сжат.

10.3 **1.** Разобьём кольцо на маленькие участки зарядом dq, тогда потенциал, создаваемый каждым кусочком, равен

$$d\varphi = \frac{kdq}{\sqrt{R^2+x^2}}; \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Потенциал от двух колец находится по принципу суперпозиции

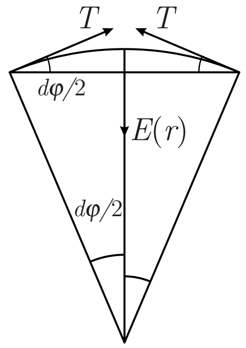
$$\varphi = \varphi_R + \varphi_r = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}} + \frac{kq}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Аналогичные рассуждения проведём с напряжённостью. Заметим, что напряжённость будет направлена вдоль оси кольца в силу симметрии (кольцо заряжено равномерно). Поэтому суммировать будем проекции напряжённостей кусочков на ось кольца. Напряжённость поля участка зарядом dq равна

$$dE = \frac{kdq}{R^2+x^2}\cos\alpha; \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{kQx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}.$$

Напряжённость поля двух колец по принципу суперпозиции равна

$$E = E_R + E_r = \frac{kQx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}} + \frac{kqx}{\left(t^2+x^2\right)^{3/2}}.$$



2. Рассмотрим маленький участок кольца радиусом r. Из условия равновесия выделенного участка

$$2T\sin\frac{d\varphi}{2} = E(r)dq = E(r)\lambda r d\varphi,$$

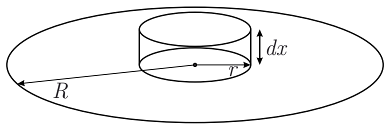
где $\lambda = \frac{q}{2\pi r}$ — линейная плотность заряда кольца, $E(r) = E_R(r) + E_r(r)$ — суммарное радиальное поле от двух колец. Понятно, что напряжённость поля пропорциональна заряду $E \propto q$, поэтому после уменьшения заряда большого кольца

$$E'_R = \frac{E_R}{2}; \quad E'_r = E_r.$$

Тогда, учитывая что $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$, получим

$$\Delta T = T' - T = \left(E'_R + E'_r\right)\frac{q}{2\pi} - \left(E_R + E_r\right)\frac{q}{2\pi} = -\frac{E_R q}{4\pi}.$$

Осталось найти поле большого кольца на расстоянии r от центра.



Способ 1. Воспользуемся теоремой Гаусса. Возьмём в качестве поверхности цилиндр, нижнее основание которого — маленькое кольцо, а высота равна dx так, что $dx \ll r$.

Так как поле в каждой точке плоскости кольца лежит в плоскости этого кольца (в силу симметрии), то поток через нижнее основание равен нулю. Поток через боковую поверхность равен

$$\Phi_1 = E_R(r) 2\pi r dx.$$

Так как $r \ll R$, то в точках на верхнем основании цилиндра перпендикулярную составляющую поля можно считать равной полю на оси кольца, тогда

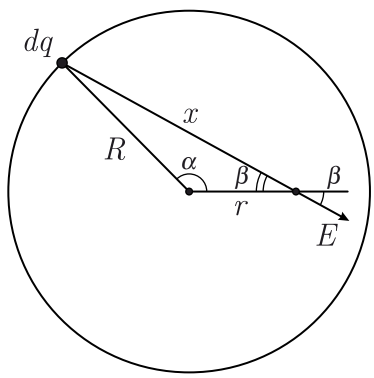
$$\Phi_2 = \frac{kQdx}{\left(R^2+(dx)^2\right)^{3/2}}\pi r^2 \approx \frac{kQdx}{R^3}\pi r^2.$$

Заряд внутри выбранной поверхности равен нулю, следовательно, по теореме Гаусса

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0; \quad \Longrightarrow \quad E_R(r)2\pi r dx = -\frac{kQdx}{R^3}\pi r^2; \quad \Longrightarrow \quad E_R(r) = -\frac{kQ}{2R^3}r.$$

Знак «$-$» означает, что поле направлено к центру кольца. Подставив найденное значение поля в выражение для ΔT, находим

$$\Delta T = -\frac{kQ}{2R^3}r\frac{q}{4\pi} = -\frac{kQq}{8\pi}\frac{r}{R^3}.$$



Способ 2. Из симметрии следует, что поле будет направлено вдоль радиуса. Разобьём кольцо на маленькие участки зарядом dq. Проекция напряжённости поля участка на радиальное направление равна

$$dE = \frac{kdq}{x^2}\cos\beta.$$

По теореме косинусов получаем

$$\begin{cases} x^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha; \\ R^2 = x^2 + r^2 - 2rx\cos\beta; \end{cases}$$

Откуда выражаем

$$\cos\beta = \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2rx} = \frac{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha) + r^2 - R^2}{2rx} = \frac{r - R\cos\alpha}{x}.$$

Тогда, напряжённость поля участка равна

$$dE = \frac{kdq}{x^2}\cos\beta = \frac{kdq}{x^2}\frac{r - R\cos\alpha}{x} = \frac{kdq\,(r - R\cos\alpha)}{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha)^{3/2}}.$$

Заметим, что $r \ll R$, поэтому мы можем пренебрегать малыми величинами второго порядка малости. Следовательно,

$$dE \approx \frac{kdq(r - R\cos\alpha)}{(R^2 - 2rR\cos\alpha)^{3/2}} = \frac{kdq}{R^3}\frac{r - R\cos\alpha}{\left(1 - 2\frac{r}{R}\cos\alpha\right)^{3/2}} = \frac{kdq}{R^3}(r - R\cos\alpha)\left(1 - 2\frac{r}{R}\cos\alpha\right)^{-3/2}.$$

Воспользуемся следующим приближением $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, справедливых для малых x. Получим

$$dE \approx \frac{kdq}{R^3}(r - R\cos\alpha)\left(1 + 2\cdot\frac{3}{2}\frac{r}{R}\cos\alpha\right) = \frac{kdq}{E^3}\left(r + 3\frac{r^2}{R^2}\cos\alpha - R\cos\alpha - 3r\cos^2\alpha\right).$$

Снова пренебрегая слагаемым второго порядка малости ($\propto r^2$), получим

$$dE \approx \frac{kdq}{R^3}\left(r - R\cos\alpha - \frac{3r(\cos 2\alpha + 1)}{2}\right).$$

Теперь, чтобы найти напряжённость всего кольца на расстоянии r от него, необходимо проинтегрировать напряжённость по всем участкам кольца. Учитывая, что $dq = \frac{Q}{2\pi R}Rd\alpha$, получим следующий интеграл

$$E = \int\limits_0^{2\pi}\frac{k}{R^3}\left(r - R\cos\alpha - 3r\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}\right)\frac{Q}{2\pi R}Rd\alpha = \frac{kQ}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left(r - R\cos\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}r\cos 2\alpha - \frac{3r}{2}\right)d\alpha.$$

Заметим, что интеграл косинусов будет равен нулю, так как мы считаем интеграл за период. Тогда

$$E = \frac{kQ}{2\pi R^3}\left(2\pi r - R\cdot 0 - \frac{3}{2}r\cdot 0 - \frac{3r}{2}2\pi\right) = -\frac{kQr}{2R^3}.$$

Получился тот же результат, что и в методе 1. Подставив найденное значение поля в выражение для ΔT, находим

$$\Delta T = -\frac{kQ}{2R^3}r\frac{q}{4\pi} = -\frac{kQq}{8\pi}\frac{r}{R^3}.$$

10.4 Смотрите решение 4 задачи 9 класса.

Критерии 10 класс

Критерии 1 задача.

Смотрите критерии 1 задачи 9 класса.

Критерии 2 задача.

1. Правильное решение пункта 1 — 1 балл.
2. Правильное решение пункта 2 — 2 балла.
3. Получена зависимость $T(\alpha, \varphi)$ — 1 балл.
4. Правильное и обоснованное решение пункта 3 — 3 балла.
5. Правильное и обоснованное решение пункта 4 — 4 балла.

Критерии 3 задача.

1. Получено значение потенциала колец на оси — 1 балл.
2. Получено значение напряжённости поля колец на оси — 1 балл.
3. Записано условие равновесия малого участка кольца — 1 балл.
4. Указано, что поле от большого кольца уменьшится в два раза — 1 балл.
5. Изменение силы натяжения выражено через поле большого кольца — 1 балл.

Способ 1 (Теорема Гаусса).

6. Поток через нижнее основание цилиндра равен нулю — 1 балл.
7. Найден поток через боковую поверхность — 1 балл.
8. Найден поток через верхнее основание — 1 балл.
9. Найдена напряжённость поля большого кольца на расстоянии r от центра — 1 балл.
10. Найдено изменение силы натяжения — 1 балл.

Способ 2 (интеграл).

6. Записана проекция напряжённости поля заряда dq на радиус — 1 балл.
7. Записан интеграл для поля E, в котором выражены все неизвестные величины — 1 балл.
8. Интеграл верно упрощён с помощью приближений — 1 балл.
9. Найдена напряжённость поля большого кольца на расстоянии r от центра — 1 балл.
10. Найдено изменение силы натяжения — 1 балл.

Критерии 4 задача.

Смотрите критерии 4 задачи 9 класса.