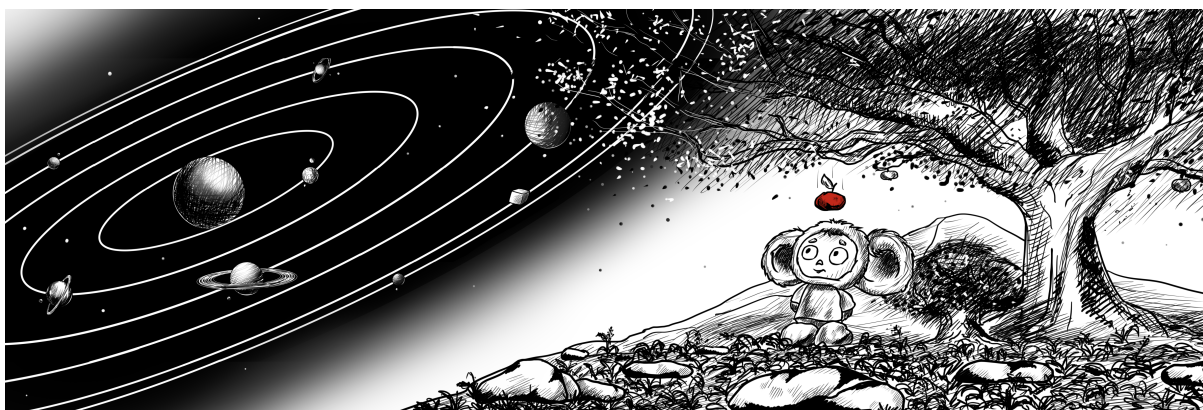




Условия и решения олимпиады Всерос+ старшая лига

Авторы условий:

1. Уймин А.
2. Уймин А.
3. Уймин А.
4. Уймин А.
5. Уймин А.
6. Уймин А.
7. Киреев А.

Рисунки — Я. Поздняк, А. Уймин.

Набор и вёрстка — А. Уймин, Д. Хромов.

Долгопрудный, 2023 г.

Содержание

Условия	2
Два треугольника в линзе	2
Гибкий шестиугольник	4
Заряженный математический маятник	4
Движение с теплотерями	4
Где провод?	5
Вращение слабопроводящего шара	9
Магнитостатика	9
Решения	11
Два треугольника в линзе	11
Гибкий шестиугольник	12
Заряженный математический маятник	16
Движение с теплотерями	17
Где провод?	22
Вращение слабопроводящего шара	23
Магнитостатика	27

Условия

Два треугольника в линзе

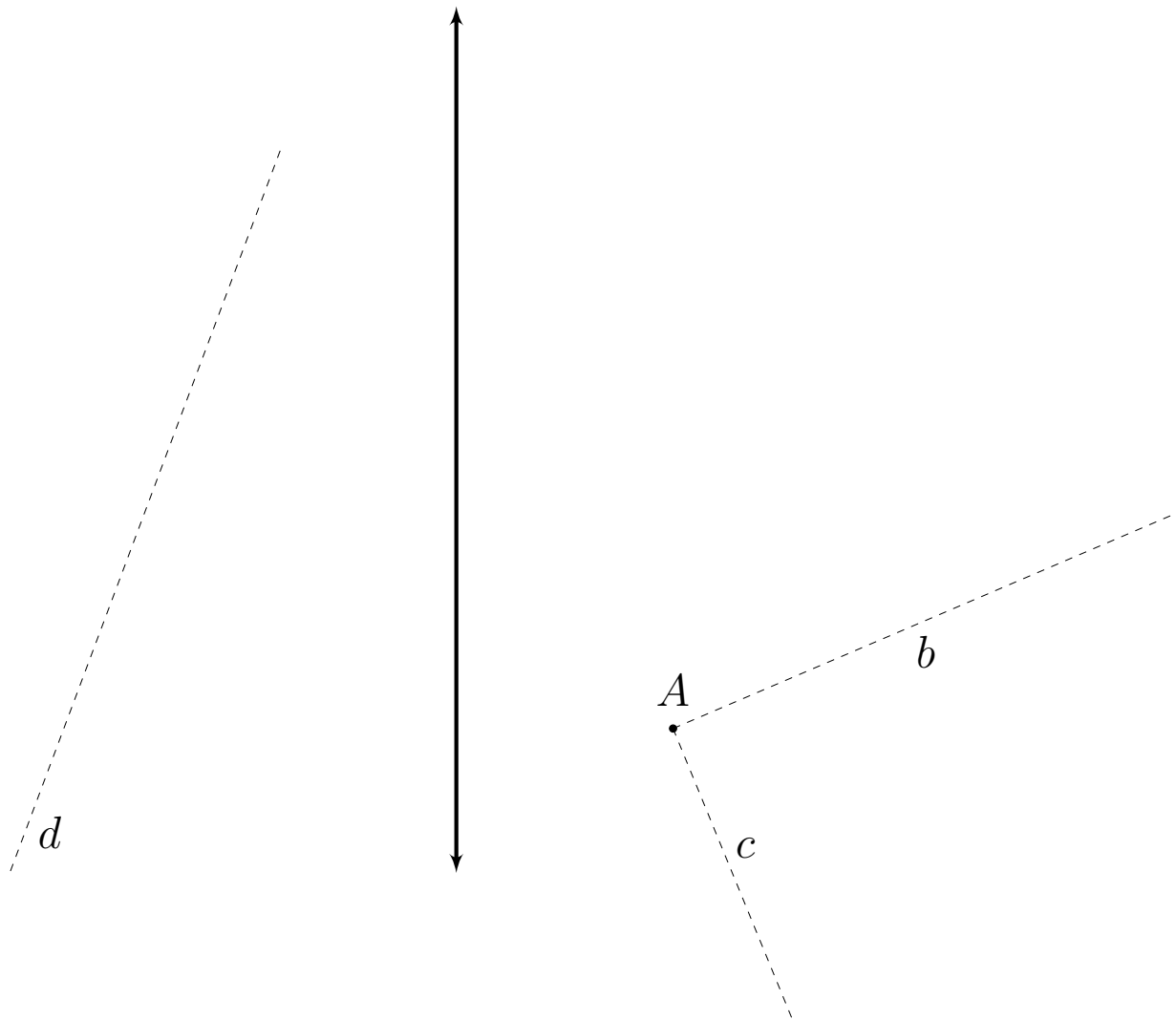
В архиве Снеллиуса была обнаружена оптическая схема, состоявшая из равностороннего треугольника $\triangle A'B'C'$, идеальной собирающей линзы и изображения этого треугольника в линзе, являвшегося прямоугольным треугольником $\triangle ABC$.

От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны лишь плоскости линзы и вершина A прямоугольного треугольника. Из пояснений к чертежу следовало, что вершины B' и C' равностороннего треугольника располагались на прямой d , а вершины B и C прямоугольного треугольника — на лучах Ab и Ac соответственно.

Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

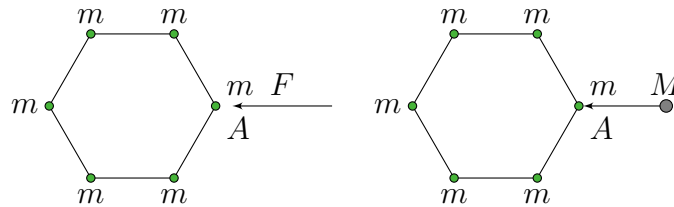
1. вершин равностороннего треугольника;
2. фокусов линзы.

Построения проведите на выданном вам отдельном листе А4.

Архив Снеллиуса

Гибкий шестиугольник

Система, состоящая из шести одинаковых жёстких невесомых стержней, образует правильный шестиугольник. Стержни соединены маленькими сферическими шарнирами без трения массой m каждый. Изначально система покоится на гладкой горизонтальной поверхности.



1. К шарниру A шестиугольника приложили силу F , направленную к центру последнего (рис.1). Определите величину ускорения шарнира A шестиугольника в начальный момент времени.
2. Пусть по поверхности, на которой находится система, движется маленький шарик. Шарик сталкивается с шарниром A шестиугольника, причём скорость шарика прямо перед соударением направлена к центру шестиугольника, а последний находится на прямой, проходящей через центры шарика и шарнира A (рис.2). При каком значении массы M налетающего шарика его скорость сразу после упругого соударения с шарниром A равна нулю?

Заряженный математический маятник

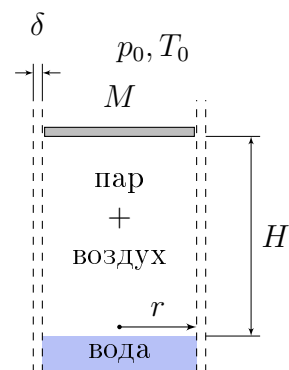
Невесомая нерастяжимая нить одним концом прикреплена к потолку, а на другом её конце закреплён тяжёлый груз малых размеров. Период малых колебаний математического маятника оказался равным T_0 .

Систему помещают в однородное электростатическое поле, направленное вертикально вверх, и заряжают нить равномерно по длине таким положительным зарядом, что нить в точке крепления оказывается ненатянутой. Заряд по нити не перераспределяется.

Каким будет период малых колебаний груза T_1 , если направление электростатического поля изменить на противоположное?

Движение с теплотерями

Цилиндрический сосуд радиусом R с гладкими стенками толщиной $\delta \ll R$ герметично закрыт поршнем массой M . Под поршнем находится воздух, вода и её насыщенный пар при температуре T . Снаружи сосуда находится атмосферный воздух при давлении p_0 и температуре T_0 . Изначально поршень расположен на высоте H от дна сосуда. Масса жидкой фазы воды при этом равна m , а её объёмом можно пренебречь. Высота цилиндра является достаточно малой для того, чтобы плотности пара и воздуха можно было считать постоянными по всему их объёму.



Молярные массы воздуха и воды равны μ_1 и μ_2 соответственно, давление насыщенного пара воды при температуре T равно p_1 . Удельная теплота парообразования воды равна L . Ускорение свободного падения равно g .

Считайте, что поршень и дно сосуда не проводят тепло, а коэффициент теплопроводности материала стенок сосуда равен κ .

Из-за теплопроводности стенок сосуда поршень квазистатически перемещается. С какой скоростью v и в каком направлении это происходит в указанном положении?

Примечание 1. мощность N переноса тепла между двумя параллельными пластинами площадью S , находящимися на расстоянии d друг от друга при температурах T_1 и $T_2 > T_1$, определяется выражением:

$$N = \frac{\kappa S(T_2 - T_1)}{d},$$

где κ — коэффициент теплопроводности вещества между пластинами.

Примечание 2. Состояние равновесия двух фаз 1 и 2 характеризуется кривой фазового равновесия $p(T)$. Считайте известным, что кривая фазового равновесия описывается уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(1/\rho_2 - 1/\rho_1)},$$

где λ — удельная теплота фазового перехода из фазы 1 в фазу 2, а ρ_1 и ρ_2 — плотности вещества в фазах 1 и 2 соответственно. Считайте, что в данной задаче можно пренебречь удельным объёмом воды по сравнению с удельным объёмом её насыщенного пара.

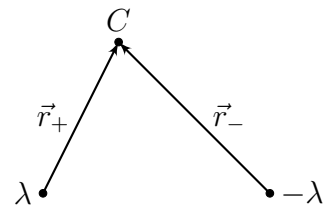
Где провод?

Двумерные материалы являются одними из наиболее исследуемых физических объектов в 21 – ом веке. Протекание тока в двумерных материалах в установившемся режиме позволяет моделировать двумерное электростатическое поле, а для измерения их удельного сопротивления придумано множество различных методов, таких как, например, четырёхзондовый метод Ван–дер–Пау.

В рамках данной задачи вам предлагается изучить распределение потенциала электростатического поля в бесконечной тонкой пластине, к которой подключены два тонких провода с током. Расстояние между точками подключения проводов к пластине во много раз больше радиусов проводов и толщины пластины.

Часть А. Электростатическая аналогия

В данной задаче мы отойдём от рассмотрения электрического поля в двумерных материалах и рассмотрим его электростатический аналог. Пусть два параллельных бесконечных тонких провода расположены в вакууме на большом удалении от других тел и заряжены с постоянными линейными плотностями заряда $\pm\lambda$. Радиус векторы $\vec{r}_+$ и $\vec{r}_-$ некоторой точки C далее обозначают

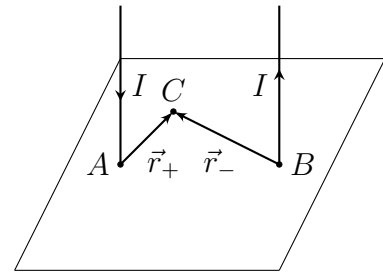


радиус–векторы, проведённые в некоторую точку пространства от проводов с линейными плотностями заряда λ и $-\lambda$ соответственно. Введём также параметр $k = r_-/r_+$. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

1. Определите напряжённость электростатического поля проводов в точке C .
2. Принимая потенциал бесконечно удалённой точки за нулевой, определите потенциал φ_C электростатического поля проводов в точке C . Покажите, что φ_C зависит только от параметра k .

Часть В. Распределение потенциала в двумерных материалах

Вернёмся к вопросу об изучении распределения потенциала электростатического поля в двумерных материалах. Толщина рассматриваемой пластины равна t , а её удельное сопротивление — ρ . Во всех последующих пунктах задачи считайте, что расстояния от точек пластины до проводов с током во много раз превышают радиусы проводов и толщину пластины.



1. Рассмотрим одиночный провод с током силой I , втекающим в пластину. Определите плотность тока $\vec{j}$ и напряжённость $\vec{E}$ электрического поля внутри пластины в точке с радиус–вектором $\vec{r}$ относительно провода.

Пусть в точку A пластины втекает ток силой I , а из точки B ток той же силы вытекает. Примем обозначения, аналогичные части А: $\vec{AC} = \vec{r}_+$, $\vec{BC} = \vec{r}_-$, $k = r_-/r_+$.

2. Определите напряжённость электрического поля в точке C пластины.
3. Принимая потенциал бесконечно удалённой точки за нулевой, определите потенциал φ_C электрического поля в точке C пластины. Покажите, что φ_C зависит только от параметра k .

Часть С. Поиск провода и удельного сопротивления

В части В задачи вам было предложено показать, что потенциал φ внутри пластины определяется только отношением расстояний до двух проводов, т.е. линии постоянного потенциала соответствует постоянное значение данного отношения.

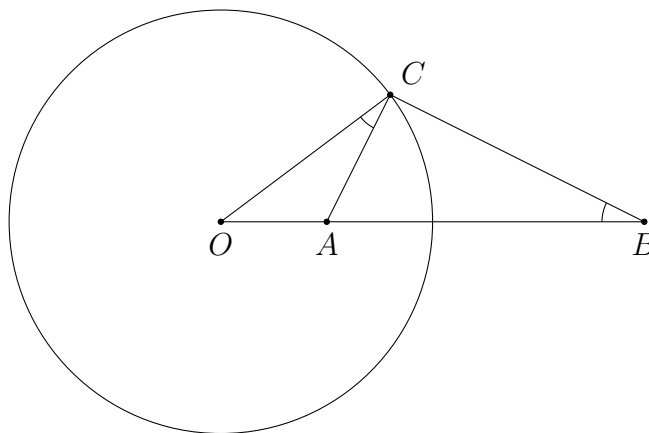
В пластине толщиной $t = 1$ мм течёт ток силой $I = 1$ мкА между проводами A и B . Измеренные в точках C_1 и C_2 потенциалы оказались одинаковыми и равными $\varphi = 160$ мВ. На отдельном листе приведены положения точек C_1 и C_2 , а также точки A . Положение провода B на рисунке не приведено, но известно, что он находится на прямой, проходящей через точки C_1 и C_2 .

Примечание: Для дальнейшего решения вам может быть полезна следующая математическая справка: Окружностью Аполлония для точек A и B называется такое геометрическое место точек C , что отношение $BC/AC = k$ является постоянной величиной. Если $k > 1$, то точка A расположена внутри окружности, а точка B — снаружи, причём расстояния от центра O окружности до точек A и B связаны с радиусом окружности OC соотношением:

$$OA \cdot OB = OC^2.$$

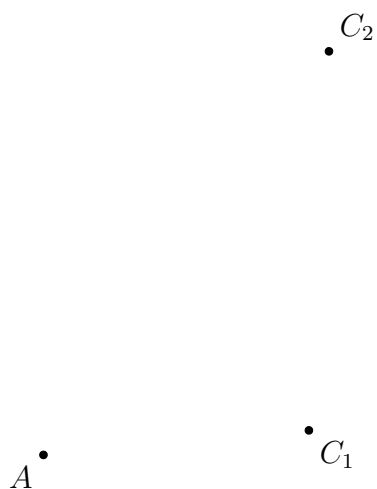
Из записанного соотношения следует подобие треугольников $\triangle OAC$ и $\triangle OAB$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует равенство следующих углов:

$$\angle OCA = \angle OBC.$$



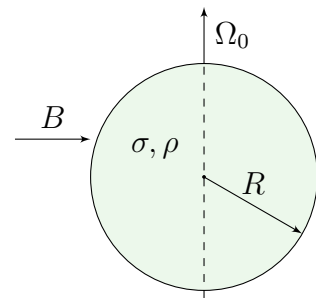
1. Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения центра O окружности Аполония и провода B .
2. Определите удельное сопротивление пластины ρ . Для решения данного пункта вы можете проводить измерения на выданном вам отдельном листе.

Отдельный лист для построений



Вращение слабопроводящего шара

Слабопроводящий шар радиусом R плотностью ρ с удельной проводимостью σ может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль диаметра шара. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно оси вращения шара. Удельная проводимость материала шара настолько мало, что индукцией магнитного поля, создаваемого текущими по материалу шара токами, можно пренебречь.

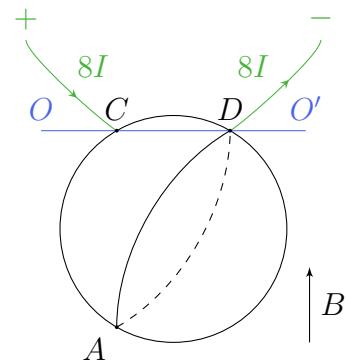


Как зависит от времени t угловая скорость вращения шара Ω , если в начальный момент времени она равна Ω_0 ?

Примечание. Удельной проводимостью σ вещества называется величина, обратная его удельному сопротивлению.

Магнитостатика

Жесткая конструкция массой m состоит из двух одинаковых тонких медных проводов постоянного сечения в форме окружности радиуса R , находящихся в двух перпендикулярных плоскостях (см. рисунок). В точках A и D , расположенных на расстоянии $2R$ друг от друга, обеспечен хороший электрический контакт. Точка C — середина дуги AD . В точках C и D конструкция подвешена к неподвижной непроводящей горизонтальной оси OO' , вокруг которой она может вращаться без трения. К точкам C и D подключен источник постоянного тока с номинальным значением $8I$. Затем, удерживая конструкцию, включают однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B .



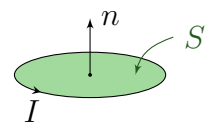
1. Определите суммарную силу Ампера F_A , действующую на проволочную конструкцию.
2. Чему равен суммарный момент сил Ампера, действующих на конструкцию, относительно оси $O'O$.

В некоторый момент времени конструкцию отпускают.

3. Определите максимальную кинетическую энергию конструкции $K_{\max}$ в процессе дальнейшего движения;
4. Чему равен угол поворота конструкции α относительно начального положения к моменту достижения максимальной кинетической энергии.

Явлением электромагнитной индукции необходимо пренебречь. Ускорение свободного падения g .

Примечание. момент сил Ампера, действующих на плоский замкнутый контур с током I , помещенный в однородное поле с индукцией B , относительно произвольной оси Ox определяется как



проекция на соответствующую ось вектора $[IS\vec{n} \times \vec{B}]$, где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный перпендикулярно плоскости контура как показано на рисунке, S — площадь, ограниченная контуром.

Решения

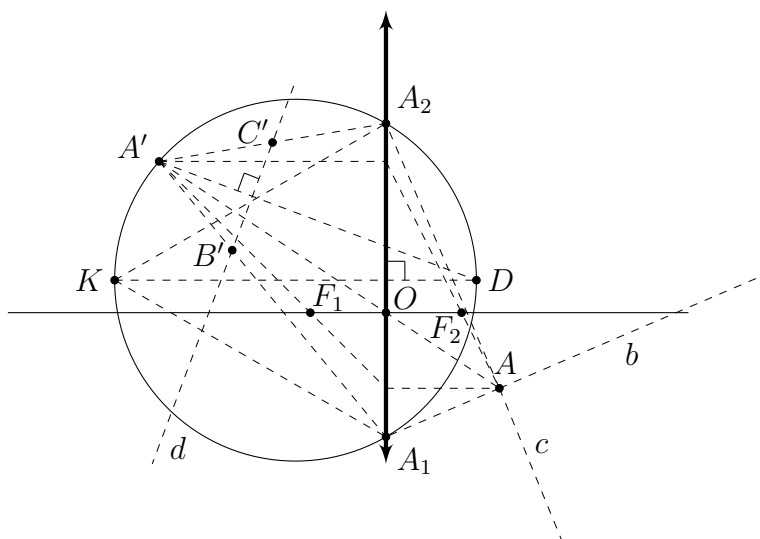
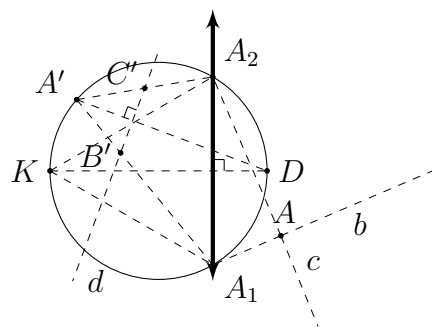
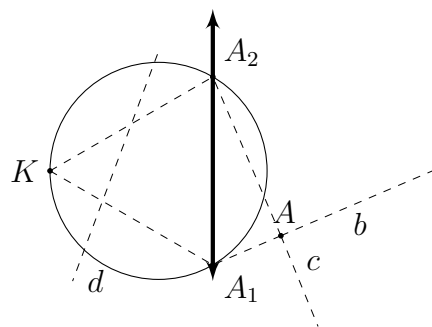
Два треугольника в линзе

Рассмотрим лучи, идущие вдоль сторон треугольника $\triangle A'B'C'$. После преломления в линзе эти лучи проходят через стороны прямоугольного треугольника $\triangle ABC$.

Продлим лучи Ab и Ac до пересечения с плоскостью линзы в точках A_1 и A_2 соответственно. После преломления в линзе эти лучи пересекутся под углом 60° в вершине A' треугольника $\triangle A'B'C'$. Значит, возможное ГМТ вершины A' — дуга окружности, построенная на A_1A_2 как на хорде, видимой под углом 60° . Восстановим данную окружность как описанную вокруг равностороннего треугольника KA_1A_2 . Сразу отметим, что вершины B' и C' лежат на отрезках $A'A_1$ и $A'A_2$ соответственно.

Поскольку треугольник $\triangle A'B'C'$ равносторонний, в нём биссектриса угла совпадает с высотой. Проведём перпендикуляр от точки K к A_1A_2 до пересечения с окружностью в точке D . Тогда $A'D$ является биссектрисой угла $\angle A_1A'A_2$, поскольку делит хорду окружности A_1A_2 пополам. Проведя перпендикуляр из точки D к прямой d , получим положение вершины A' как точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью. Далее, соединяя вершину A' с точками A_1 и A_2 , получим положения вершин B' и C' как пересечения отрезков $A'A_1$ и $A'A_2$ с прямой d соответственно.

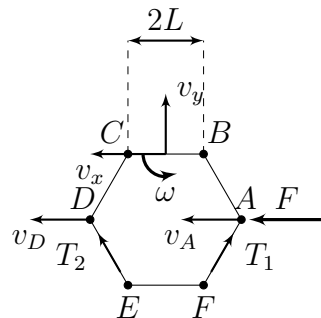
Главный оптический центр линзы O получим как точку пересечения отрезка AA' с плоскостью линзы. Восстановим главную оптическую ось линзы как перпендикуляр к её плоскости. Далее, опустим из точек A и A' перпендикуляры на плоскость линзы. Соединим основания перпендикуляров с точками A' и A . Точки пересечения последних отрезков с главной оптической линзы являются её фокусами F_1 и F_2 .



Гибкий шестиугольник

1. Первое решение: Обозначим шарниры так, как показано на рисунке. В силу симметрии задачи шарниры A и D начнут движение вдоль соединяющей их прямой.

Обозначим скорости шарниров A и D за v_A и v_D соответственно. Пусть длина каждого из стержней равна $2L$, а стержень BC начинает вращения с угловой скоростью ω в направлении «против часовой стрелки». Введём также две компоненты скорости v_x и v_y центра стержня BC (см. рис).



Запишем условия жёсткости стержней AB и BC , учитывая, что они образуют углы 60° с линией AD :

$$\frac{v_A}{2} = \frac{v_x}{2} + \frac{(v_y + \omega L)\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{v_D}{2} = \frac{v_x}{2} + \frac{(\omega L - v_y)\sqrt{3}}{2}.$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$a_A - a_x = (a_y + \varepsilon L)\sqrt{3}, \quad a_D - a_x = (\varepsilon L - a_y)\sqrt{3}.$$

Здесь $\varepsilon = d\omega/dt$ — угловое ускорение стержня.

В данной задаче все стержни являются невесомыми. Поскольку к каждому из стержней силы прикладываются только в двух точках — эти силы должны быть скомпенсированы и направлены вдоль стержня, поскольку иначе равнодействующая этих сил, а также их равнодействующий момент окажутся не равными нулю.

Пусть T_1 и T_2 — силы натяжения стержней, соединённых с шарнирами A и D соответственно. Запишем уравнения движения шарниров A и D :

$$F - 2T_1 \cos 60^\circ = F - T_1 = ma_A, \quad 2T_2 \cos 60^\circ = T_2 = ma_D.$$

Далее рассмотрим стержень BC . Из теоремы о движении центра масс в проекциях на оси x и y имеем:

$$2ma_x = (T_1 - T_2) \cos 60^\circ = \frac{T_1 - T_2}{2}, \quad 2ma_y = (T_1 + T_2) \sin 60^\circ = \frac{(T_2 + T_1)\sqrt{3}}{2}.$$

Запишем для стержня BC основное уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс:

$$M = \frac{(T_1 - T_2)L\sqrt{3}}{2} = I\varepsilon = 2mL^2\varepsilon.$$

Подставим результаты динамических уравнений в уравнения кинематических связей:

$$ma_A = F - T_1 = ma_x + m(a_y + \varepsilon L)\sqrt{3} = \frac{T_1 - T_2}{4} + \left(\frac{(T_1 + T_2)\sqrt{3}}{4} + \frac{(T_1 - T_2)\sqrt{3}}{4} \right) \sqrt{3}.$$

$$ma_D = T_2 = ma_x + m(\varepsilon L - a_y)\sqrt{3} = \frac{T_1 - T_2}{4} + \left(\frac{(T_1 - T_2)\sqrt{3}}{4} - \frac{(T_1 + T_2)\sqrt{3}}{4} \right) \sqrt{3}.$$

Таким образом:

$$4F = 11T_1 - T_2, \quad 11T_2 = T_1, \quad \implies \quad T_1 = \frac{11F}{30}.$$

Отсюда для ускорения a_A находим:

$$a_A = \frac{19F}{30m}.$$

Второе решение: Воспользуемся теоремой о движении центра масс для данной системы:

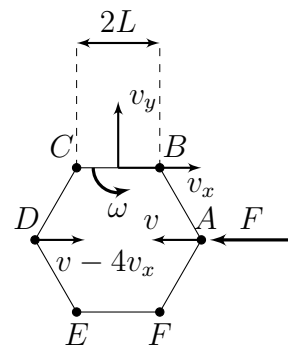
$$\vec{a}_C = \frac{\vec{F}}{6m}.$$

Пусть ускорение шарнира A относительно центра масс системы равно $\vec{a}$. Тогда для ускорения шарнира A в лабораторной системе отсчёта имеем:

$$\vec{a}_A = \vec{a} + \vec{a}_C.$$

Далее будем решать задачу в системе отсчёта центра масс данной системы. Пусть в системе отсчёта центра масс скорость шарнира A равна v , а компоненты скорости центра стержня BC равны v_x и v_y . Тогда, поскольку импульс в системе отсчёта центра масс равен нулю, скорость шарнира D в системе отсчёта центра масс данной системы равна $v'_D = v - 4v_x$ и направлена противоположно скорости шарнира A .

Пусть длина каждого стержня равна $2L$, а угловая скорость вращения стержня BC равна ω . Запишем условия жёсткости стержней AB и CD :



$$\frac{v}{2} = -\frac{v_x}{2} + \frac{(v_y + \omega L)\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{v - 4v_x}{2} = \frac{v_x}{2} + \frac{(v_y - \omega L)\sqrt{3}}{2}.$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$\frac{a}{2} = -\frac{a_x}{2} + \frac{(a_y + \varepsilon L)\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{a - 4a_x}{2} = \frac{a_x}{2} + \frac{(a_y - \varepsilon L)\sqrt{3}}{2}.$$

Получим теорему об изменении кинетической энергии в системе отсчёта центра масс. В системе отсчёта центра масс на частицу массой m_i действует сила инерции, равная $\vec{F}_{i(\text{ин})} = -m_i \vec{a}_C$. Поскольку трения нет — мощность внутренних сил равна нулю в любой системе отсчёта. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{k(\text{отн})}}{dt} &= \sum_i m_i \vec{v}_{i(\text{отн})} \vec{a}_{i(\text{отн})} = \sum_i \vec{v}_{i(\text{отн})} (\vec{F}_{i(\text{внеш})} + \vec{F}_{i(\text{внут})} + \vec{F}_{i(\text{ин})}) = \\ &= \sum_i \vec{F}_{i(\text{внеш})} \vec{v}_{i(\text{отн})} + \sum_i \vec{F}_{i(\text{ин})} \vec{v}_{i(\text{отн})}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет собой работу, производимую внешними силами над системой по перемещению её частиц относительно центра масс в единицу времени $P_{(\text{отн})}$. Таким образом:

$$\frac{dE_{k(\text{отн})}}{dt} = P - \vec{a}_C \sum_i m_i \vec{v}_{i(\text{отн})}.$$

Но сумма во втором слагаемом представляет собой импульс системы относительно центра масс, и поэтому равна нулю. Таким образом:

$$\frac{dE_{k(\text{отн})}}{dt} = P_{(\text{отн})}.$$

Воспользуемся полученной теоремой. Кинетические энергии шарниров A и D в системе отсчёта центра масс составляют:

$$E_{kA} = \frac{mv^2}{2}, \quad E_{kD} = \frac{m(v - 4v_x)^2}{2}.$$

Кинетические энергии шарниров, соединённых стержнями BC и EF , одинаковы. Для их определения воспользуемся теоремой Кёнига:

$$E_{k(BD)} = E_{k(EF)} = \frac{2m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{2ml^2\omega^2}{2}.$$

Мощность силы $\vec{F}$ в системе отсчёта центра масс равна Fv . Применяя теорему об изменении кинетической энергии в системе отсчёта центра масс, получим:

$$Fv = mva + m(v - 4v_x)(a - 4a_x) + 4m(v_x a_x + v_y a_y) + 4ml^2\omega\varepsilon.$$

Далее обратим внимание, что поскольку система изначально находится в состоянии покоя, будут выполняться соотношение:

$$\frac{v_x}{v} = \frac{a_x}{a} = k.$$

Аналогичные соотношения будут выполнены и для других компонент скоростей и ускорений.

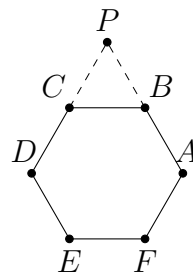
Выразим силу F только через параметр k . Для этого определим v_y и ωL :

$$v_y = \frac{v - 2v_x}{\sqrt{3}} = \frac{v(1 - 2k)}{\sqrt{3}}, \quad \omega L = v_x \sqrt{3} = k\sqrt{3}v.$$

Таким образом:

$$F = ma \left(1 + (1 - 4k)^2 + 4 \left(k^2 + \frac{(1 - 2k)^2}{3} \right) + 12k^2 \right)$$

Определим силу F ещё одним независимым способом. Рассмотрим точку PO пересечения продолжений стержней AB и CD . Обратим внимание, что линии действия сил, действующих на стержень BC со стороны стержней AB и CD , проходят через точку PO . Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для стержня BC относительно точки PO , учитывая, что равнодействующий момент сил равен моменту сил инерции. Если OP — центр масс стержня BC , то имеем:



$$\frac{dL_{BC}}{dt} = I_P \varepsilon + 2m \cdot OP \cdot a_x = 2mL^2 \varepsilon + 2mL\sqrt{3}a_x = 4mL\sqrt{3}ka.$$

С другой стороны:

$$\frac{dL_{BC}}{dt} = M = 2ma_c \cdot OP = 2m \cdot \frac{F}{6m} \cdot L\sqrt{3}.$$

Таким образом:

$$F = 12kma.$$

Приравнявая выражения для силы F , получим:

$$112k^2 - 76k + 10 = 0, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{76 \pm \sqrt{75^2 - 40 \cdot 112}}{224} = \frac{76 \pm 36}{224} = \frac{1}{2}, \frac{5}{28}.$$

Обратим внимание, что значению $k = 1/2$ соответствует $v_y = 0$, что соответствует дополнительной наложенной на систему связи, позволяющей центру стержня BC без трения двигаться только вдоль направления AD . Данная связь ни коим образом не нарушит записанные нами уравнения, описывающие движение системы, а лишь потребует положить в них $v_y = 0$. Таким образом:

$$k = \frac{5}{28}, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{15ma}{7}.$$

Для ускорения шарнира A находим:

$$a_A = \frac{F}{6m} + \frac{7F}{15m} = \frac{19F}{30m}.$$

2. Дальнейшее решение задачи проведём в лабораторной системе отсчёта.

Обратим внимание, что в процессе быстрого воздействия на шестиугольник будет выполнено соотношение:

$$\frac{v_A}{v_C} = \frac{a_A}{a_C} = \frac{19}{5}.$$

Таким образом, импульс системы можно представить в следующей форме:

$$p = 6mv_C = \frac{30mv_A}{19}.$$

Определим кинетическую энергию шестиугольника, когда скорость шарнира A равна v_A . Поскольку мощность силы $\vec{F}$ составляет Fv_A , имеем:

$$\frac{dE_k}{dt} = P_F = Fv_A = \frac{30mv_A a_A}{19}, \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{15mv_A^2}{19}.$$

Рассмотрим соударение шарика с шарниром A . Пусть M — масса шарика, а v — его скорость перед соударением. Запишем систему законов сохранения энергии и импульса, учитывая, что удар является упругим:

$$\begin{cases} Mv = \frac{30mv_A}{19} & \text{ЗСИ} \\ \frac{Mv^2}{2} = \frac{15mv_A^2}{19} & \text{ЗСЭ} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M = \frac{30m}{19}}.$$

Заряженный математический маятник

Введём обозначения: Масса груза равна m , ускорение свободного падения равно g , величина электростатического поля равняется E , линейная плотность заряда нити равна λ , а длина нити равна l . Из условия провисания нити имеем:

$$\lambda El = mg.$$

Рассмотрим конструкцию после изменения направления электростатического поля. Введём ось z с началом в положении груза, направленную вертикально вверх. Поскольку отклонение груза x от положения равновесия является малым, угол φ между касательной к нити и вертикалью является малым в каждой точке нити. Тогда для зависимости силы натяжения нити T от координаты z имеем:

$$T = mg + \lambda Ez.$$

Поскольку электростатическое поле направлено вертикально, из условия равновесия произвольного участка нити следует, что компонента силы натяжения нити постоянна в каждой её точке, т.е:

$$T\varphi = mg\varphi_0,$$

где φ_0 — значение угла φ в точке крепления груза.

Угол φ можно представить следующим образом:

$$\varphi = -\frac{dx}{dz}.$$

Отсюда:

$$dx = -\varphi dz = -\frac{mg\varphi_0 dz}{mg + \lambda Ez}.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$-x = -\frac{mg\varphi_0}{\lambda E} \int_0^l \frac{\lambda E dz}{mg + \lambda Ez} = -\frac{mg\varphi_0}{\lambda E} \ln \left(1 + \frac{\lambda El}{mg} \right) = -l\varphi_0 \ln 2.$$

Запишем для груза второй закон Ньютона в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = -mg\varphi_0 = -\frac{mgx}{l \ln 2}, \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{\ln 2}.$$

Окончательно:

$$\boxed{T_1 = T_0 \sqrt{\ln 2}}.$$

Движение с теплотерями

Поскольку в системе присутствуют как жидкая, так и газообразная фазы воды, давление водяного пара в сосуде равно давлению насыщенного пара p_1 . Пусть $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{в}}$ — давления водяного пара и воздуха в сосуде соответственно. Из условия равновесия поршня имеем:

$$p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} = p_{\text{п}} + p_{\text{в}}, \quad \implies \quad p_{\text{в}} = p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1.$$

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для идеального газа:

$$pV = \nu RT.$$

Пусть $\nu_{\text{п}}$ и $\nu_{\text{в}}$ — количества вещества водяного пара и воздуха в сосуде соответственно. Поскольку объём сосуда равен $V = \pi r^2 H$, для количеств вещества $\nu_{\text{п}}$ и $\nu_{\text{в}}$ находим:

$$\nu_{\text{п}} = \frac{\pi r^2 H p_1}{RT}, \quad \nu_{\text{в}} = \frac{\pi r^2 H}{RT} \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1 \right).$$

При движении поршня температура T содержимого в сосуде, высота h поршня над дном сосуда, давления водяного пара $p_{\text{п}}$ и воздуха $p_{\text{в}}$, а также масса водяного пара $m_{\text{п}}$ в сосуде начинают изменяться. Свяжем скорости их изменений со скоростью движения v поршня, которую будем считать направленной вертикально вверх.

Воспользуемся уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dp_{\text{п}}}{dT} = \frac{\lambda \mu p_{\text{п}}}{RT^2}.$$

Тогда для производной по времени давления водяного пара в сосуде $\dot{p}_{\text{п}}$ имеем:

$$\dot{p}_{\text{п}} = \frac{L \mu_2 p_1 \dot{T}}{RT^2}.$$

Обратим внимание, что сумма давлений водяного пара и воздуха в сосуде остаётся постоянной, поэтому:

$$\dot{p}_{\text{п}} + \dot{p}_{\text{в}} = 0, \quad \implies \quad \dot{p}_{\text{в}} = -\frac{L \mu_2 p_1 \dot{T}}{RT^2}.$$

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха в произвольный момент времени:

$$p_{\text{в}} V = \pi r^2 h p_{\text{в}} = \nu_{\text{в}} RT.$$

Дифференцируя по времени:

$$\frac{\dot{p}_{\text{в}}}{p_{\text{в}}} + \frac{v}{h} = \frac{\dot{T}}{T}, \quad \implies \quad \frac{v}{H} = \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\mu_2 L p_1 \dot{T}}{RT^2 \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1 \right)}.$$

Таким образом:

$$\dot{T} = \frac{vT}{H \left(1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right)}.$$

Определим массу водяного пара в сосуде в произвольный момент:

$$m_{\text{п}} = \mu_2 \cdot \frac{\pi r^2 h p_{\text{п}}}{RT}.$$

Дифференцируя по времени:

$$\dot{m}_{\text{п}} = \frac{\mu_2 \pi r^2}{R} \left(\frac{\dot{p}_{\text{п}} h + p_{\text{п}} v}{T} - \frac{p_{\text{п}} h \dot{T}}{T^2} \right), \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_{\text{п}} = \frac{\mu_2 \pi r^2}{R} \left(\frac{\dot{p}_{\text{п}} H + p_1 v}{T} - \frac{p_1 H \dot{T}}{T^2} \right).$$

Подставляя $\dot{p}_{\text{п}}$, получим:

$$\dot{m}_{\text{п}} = \frac{\mu_2 \pi r^2}{R} \left(\frac{p_1 v}{T} + \frac{p_1 H \dot{T}}{T^2} \left(\frac{\mu_2 L}{RT} - 1 \right) \right).$$

Подставляя связь $\dot{T}$ и v , находим:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{п}} &= \frac{\mu_2 \pi r^2 p_1 v}{RT} \left(1 + \frac{\frac{\mu_2 L}{RT} - 1}{1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1}} \right) = \\ &= \frac{\mu_2 \pi r^2 p_1 v}{RT} \cdot \frac{\mu_2 L}{RT} \cdot \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1}}. \end{aligned}$$

Перейдём к рассмотрению термодинамических процессов в данной конструкции. Поскольку стенки цилиндра являются теплопроводящими и тонкими ($\delta \ll r$), мощность N передачи тепла от окружающего воздуха к содержимому цилиндра составляет:

$$N = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T)}{\delta}.$$

Далее можно решать задачу двумя способами.

Первый способ: Передаваемое окружающей средой содержимому сосуда количество теплоты расходуется на фазовый переход, а также изменение температуры жидкой фазы воды, неконденсирующейся части водяного пара и воздуха. Пусть $C_{\text{п}}$ и $C_{\text{в}}$ – теплоёмкости неконденсирующейся части водяного пара и воздуха соответственно.

Тогда первое начало термодинамики для содержимого в сосуде запишется в следующей форме:

$$N = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T)}{\delta} = L \dot{m}_{\text{п}} + c m \dot{T} + C_{\text{п}} \dot{T} + C_{\text{в}} \dot{T}.$$

Обратим внимание, что вода сохраняет двухфазное состояние, поэтому состояние водяного пара сосуда в координатах pT описывается кривой фазового равновесия. Таким образом, молярная теплоёмкость неконденсирующейся части водяного пара равна молярной теплоёмкости насыщенного водяного пара c . Определим её:

$$c = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = c_V + \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT} = c_p - \frac{RT}{p_{\text{п}}} \frac{dp_{\text{п}}}{dT},$$

где $c_p = 4R$ – молярная теплоёмкость водяного пара при постоянном давлении. Подставляя уравнение Клапейрона–Клаузиуса в полученное выражение для c , получим:

$$c = R \left(4 - \frac{\mu_2 L}{RT} \right).$$

Далее определим молярную теплоёмкость газа воздуха $c_{\text{в}}$ в сосуде. Учитывая, что для воздуха $c_p = 7R/2$, получим:

$$c_{\text{в}} = \frac{7R}{2} - \frac{RT}{p_{\text{в}}} \frac{dp_{\text{в}}}{dT} = R \left(\frac{7}{2} + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right).$$

Таким образом:

$$C_{\text{п}} = \frac{\pi r^2 H p_1}{T} \left(4 - \frac{\mu_2 L}{RT} \right), \quad C_{\text{в}} = \frac{\pi r^2 H}{T} \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1 \right) \left(\frac{7}{2} + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right).$$

Подставим найденные величины в первое начало термодинамики:

$$N = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 T)}{\delta} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1}} \left(L \cdot \frac{\mu_2 \pi r^2 p_1 v}{RT} \cdot \frac{\mu_2 L}{RT} \cdot \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} + \right. \\ \left. + \frac{Tv}{H} \left(cm + \frac{\pi r^2 H}{T} \left(\frac{7p_0}{2} + \frac{7Mg}{2\pi r^2} + \frac{p_1}{2} \right) \right) \right).$$

После группировки множителей последнего выражения:

$$\frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T)}{\delta} = \frac{v}{1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1}} \left(\frac{cmT}{H} + \right. \\ \left. + \pi r^2 \left(\frac{7p_0 + \frac{7Mg}{\pi r^2} + p_1}{2} + p_1 \left(\frac{\mu_2 L}{RT} \right)^2 \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right) \right)$$

Окончательно:

$$v = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T) \left(1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right)}{\delta \left(\frac{cmT}{H} + \pi r^2 \left(\frac{7p_0 + \frac{7Mg}{\pi r^2} + p_1}{2} + p_1 \left(\frac{\mu_2 L}{RT} \right)^2 \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right) \right)}, \text{ направление — вверх.}$$

Второй способ: Воспользуемся первым началом термодинамики в классической формулировке:

$$N = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T)}{\delta} = \frac{dU}{dt} + \frac{\delta A}{dt} = \frac{dU}{dt} + \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} \right) \pi r^2 v.$$

Изменение внутренней энергии воды не испаряющейся части воды в единицу времени составляет:

$$\frac{dU_{\text{ж}}}{dt} = cm\dot{T}.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа в количестве вещества ν с молярной теплоёмкостью C_V при постоянном объёме составляет:

$$\frac{dU_{\text{г}}}{dt} = \nu C_V \dot{T}.$$

Таким образом, в единицу времени изменения внутренних энергий неконденсирующейся части водяного пара и воздуха составляют:

$$\frac{dU_{\text{п}}}{dt} = \nu_{\text{п}} C_V \dot{T} = \frac{3\pi r^2 H p_1 \dot{T}}{T}, \quad \frac{dU_{\text{в}}}{dt} = \nu_{\text{в}} C_V \dot{T} = \frac{5\pi r^2 H \dot{T}}{2T} \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1 \right).$$

Далее воспользуемся определением удельной теплоты парообразования:

$$L = \frac{\Delta Q}{\Delta m} = \frac{\Delta U}{\Delta m} + \frac{\Delta A}{\Delta m}.$$

Совершаемая работа ΔA составляет:

$$\Delta A = p\Delta V = p \left(\frac{\Delta m}{\rho_{\Gamma}} - \frac{\Delta m}{\rho_{\text{ж}}} \right).$$

Пусть u_{Γ} и $u_{\text{ж}}$ – удельные внутренние энергии газообразной и жидкой фаз воды при температуре T . Тогда для L имеем:

$$L = u_{\Gamma} - u_{\text{ж}} + p_1 \left(\frac{1}{\rho_{\Gamma}} - \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \right) \approx u_{\Gamma} - u_{\text{ж}} + \frac{p_1}{\rho_{\Gamma}} = u_{\Gamma} - u_{\text{ж}} + \frac{RT}{\mu_2}.$$

Таким образом, изменение внутренней энергии испаряющейся части воды в единицу времени составляет:

$$\frac{dU}{dt} = (u_{\Gamma} - u_{\text{ж}})\dot{m}_{\Pi} = \left(L - \frac{RT}{\mu_2} \right) \dot{m}_{\Pi}.$$

Подставляя найденные величины в первое начало термодинамики, получим:

$$\begin{aligned} N = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T)}{\delta} &= \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} \right) \pi r^2 v + \left(L - \frac{RT}{\mu_2} \right) \dot{m}_{\Pi} + \left(cm + \frac{\pi r^2 H}{2T} \left(5p_0 + \frac{5Mg}{\pi r^2} + p_1 \right) \right) \dot{T} = \\ &= \left(p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} \right) \pi r^2 v + \frac{1}{1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1}} \left(\left(L - \frac{RT}{\mu_2} \right) \frac{\mu_2 \pi r^2 p_1 v}{RT} \cdot \frac{\mu_2 L}{RT} \cdot \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Tv}{H} \left(cm + \frac{\pi r^2 H}{2T} \left(5p_0 + \frac{5Mg}{\pi r^2} + p_1 \right) \right) \right). \end{aligned}$$

После группировки множителей последнего выражения:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T)}{\delta} &= \frac{v}{1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1}} \left(\frac{cmT}{H} + \right. \\ &\quad \left. \pi r^2 \left(\frac{7p_0 + \frac{7Mg}{\pi r^2} + p_1}{2} + p_1 \left(\frac{\mu_2 L}{RT} \right)^2 \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right) \right) \end{aligned}$$

Окончательно:

$$v = \frac{2\pi r H \kappa (T_0 - T) \left(1 + \frac{\mu_2 L}{RT} \frac{p_1}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right)}{\delta \left(\frac{cmT}{H} + \pi r^2 \left(\frac{7p_0 + \frac{7Mg}{\pi r^2} + p_1}{2} + p_1 \left(\frac{\mu_2 L}{RT} \right)^2 \frac{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2}}{p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} - p_1} \right) \right)}, \text{ направление — вверх.}$$

Где провод?

A1. Определим напряжённость электростатического поля бесконечного провода с линейной плотностью заряда λ . Из теоремы Гаусса для цилиндра длиной L радиусом r :

$$\Phi = 2\pi r L E_r = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}, \quad \implies \quad E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

В силу симметрии напряжённость электростатического поля провода направлена перпендикулярно к нему. Тогда для напряжённости электростатического поля одного провода имеем:

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Складывая напряжённости электростатических полей двух проводов, получим:

$$\vec{E}_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^2} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^2} \right).$$

A2. Поскольку электростатическое поле бесконечного провода является цилиндрически симметричным и перпендикулярным ему – потенциал электростатического поля одного провода зависит только от расстояния до него. Тогда для потенциала φ имеем:

$$\varphi_C = \int_{r_+}^{\infty} E_{r(+)}(r) dr + \int_{r_-}^{\infty} E_{r(-)}(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left(\int_{r_+}^{\infty} \frac{dr}{r} - \int_{r_-}^{\infty} \frac{dr}{r} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_+}^{r_-} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+}.$$

Обратим внимание, что под знаком логарифма стоит $r_-/r_+ = k$. Таким образом, потенциал φ_C определяется только величиной k и равен:

$$\varphi_C = \frac{\lambda \ln k}{2\pi\varepsilon_0}.$$

B1. На большом расстоянии r от провода плотность тока $\vec{j}$ является постоянной в поперечном сечении, а её модуль равен:

$$j = \frac{I}{2\pi r t}, \quad \implies \quad \vec{j} = \frac{I \vec{r}}{2\pi t r^2}.$$

Воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}, \quad \implies \quad \vec{E} = \frac{I \rho \vec{r}}{2\pi t r^2}.$$

B2. Поскольку напряжённость электрического поля подчиняется принципу суперпозиции, плотность тока в веществе также подчиняется принципу суперпозиции. Тогда при подключении в пластине двух проводов распределение электрического поля, и, следовательно, плотности тока в ней, может быть найдено наложением распределений, получаемых при подключении одиночных проводов. Тогда имеем:

$$\vec{E} = \frac{I \rho}{2\pi t} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^2} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^2} \right).$$

В3. Обратим внимание, что задача о нахождении потенциала электрического поля данной конфигурации полностью эквивалентна задаче, рассмотренной в пункте А2, поскольку конфигурации электрического поля совпадают с точностью до постоянного коэффициента. Таким образом, потенциал φ_C также зависит только от параметра k и равен:

$$\varphi_C = \frac{I\rho \ln k}{2\pi t}.$$

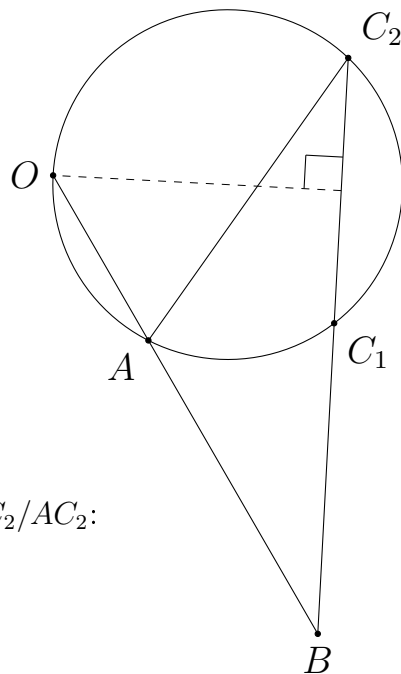
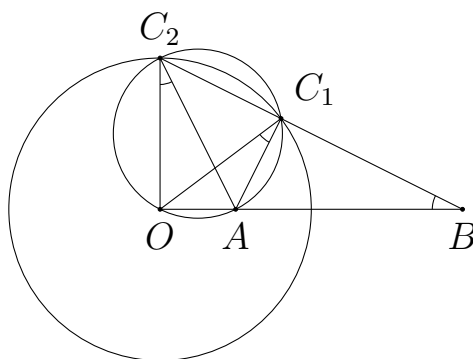
С1. Поскольку потенциалы точек C_1 и C_2 одинаковы, данные точки расположены на одной окружности Аполония. Обратим внимание, что потенциал $\varphi > 0$. Это означает, что $k > 1$, а значит провод A расположен внутри окружности Аполония.

Центр окружности Аполония O расположен на серединном перпендикуляре, проведённом к отрезку C_1C_2 . Для определения его положения необходимо найти ещё хотя бы одно независимое его возможное геометрическое место точек.

Из условия следует, что точки C_1 , C_2 и B находятся на одной прямой. Воспользуемся следующим равенством углов:

$$\angle OBC_1 = \angle OC_1A = \angle OC_2A.$$

Но поскольку углы $\angle OC_1A$ и $\angle OC_2A$ опираются на одну хорду OA , точки O , A , C_1 и C_2 лежат на одной окружности, являющейся описанной вокруг треугольника $\triangle AC_1C_2$. Восстанавливая последнюю и находя её пересечения с серединным перпендикуляром к C_1C_2 , восстановим положение центра O окружности Аполония. При выборе точки пересечения учтём, что точка B лежит на прямой, проходящей через точки A и O , и не может быть расположена между точками C_1 и C_2 . Далее проведём прямую через точки O и A до пересечения прямой, проходящей через C_1 и C_2 , и получим положение провода B .



С2. Для определения параметра k найдём отношение BC_2/AC_2 :

$$k = \frac{BC_2}{AC_2} \approx 1,7.$$

Отсюда находим:

$$\rho = \frac{2\pi t \varphi}{I \ln k} \approx (1,95 \pm 0,05) \text{ кОм} \cdot \text{м}.$$

Вращение слабопроводящего шара

Рассмотрим произвольное вещество с малой удельной проводимостью σ . Пусть вещество движется со скоростью $\vec{v}$ в постоянном во времени магнитном поле с индукцией

$\vec{B}$, а напряжённость электростатического поля в веществе равна $\vec{E}$. Ограниченность силы тока в веществе обусловлена сопротивлением движению зарядов вещества со стороны кристаллической решётки.

Если индукция магнитного поля равна нулю, то связь плотности тока $\vec{j}$ с напряжённостью электростатического поля $\vec{E}$ в веществе задаётся законом Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Если же индукция $\vec{B}$ магнитного поля не равна нулю, то в более общем виде закон Ома в дифференциальной форме запишется следующим образом:

$$\vec{j} = \sigma \left\langle \frac{\vec{F}}{q} \right\rangle,$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая со стороны электромагнитного поля на заряд q .

Скорость движения зарядов относительно вещества является крайне малой, поэтому скорость движения зарядов в лабораторной системе отсчёта может быть принята за скорость $\vec{v}$ вещества. Тогда имеем:

$$\vec{F} \approx q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]), \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

Перейдём к рассмотрению вращающегося шара. Возникновение в нём напряжённости $\vec{E}$ электростатического поля обусловлено перераспределением зарядов внутри шара. При этом наличие электростатического поля в данной конструкции обусловлено тем, что на поверхности шара нормальная компонента плотности тока $\vec{j}$ должна обращаться в ноль, поскольку заряды шара не перетекают в воздух. Таким образом, наличием электростатического поля в данной задаче пренебречь нельзя.

При вращении шар приобретает магнитный момент $\vec{m}$. Поскольку индукция $\vec{B}$ магнитного поля является однородной, равнодействующая сил, действующих на шар, обращается в ноль, а момент сил Ампера $\vec{M}$ относительно любой точки пространства составляет:

$$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}].$$

Таким образом, для описания динамики шара необходимо определить приобретаемый им при вращении магнитный момент $\vec{m}$.

На первый взгляд, для нахождения магнитного момента $\vec{m}$ необходимо знать распределение плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$. Однако в действительности это не является обязательным. Рассмотрим циркуляцию плотности тока по произвольному замкнутому контуру l :

$$\oint_l \vec{j} d\vec{l} = \sigma \oint_l \vec{E} d\vec{l} + \sigma \oint_l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}.$$

Поскольку напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля является потенциальным полем, её циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Таким образом:

$$\oint_l \vec{j} d\vec{l} = \sigma \oint_l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}.$$

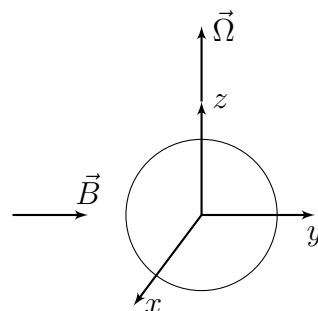
Обратим внимание, что циркуляция по замкнутому контуру вектора $[\vec{v} \times \vec{B}]$ равна полной производной по времени потока Φ магнитного поля, пронизывающего данный контур, взятой со знаком минус. Действительно:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} + \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \oint_l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l},$$

где S — поверхность, натянутая на контур l . Данное равенство обусловлено постоянством во времени индукции $\vec{B}$ магнитного поля. Таким образом:

$$\oint_l \vec{j} d\vec{l} = -\sigma \frac{d\Phi}{dt}.$$

Для дальнейшего решения задачи введём прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с началом O в центре шара (см.рис). Ось Oy направлена вдоль индукции $\vec{B}$ магнитного поля, ось Oz направлена вдоль вектора угловой скорости шара $\vec{\Omega}$, а ось Ox дополняет тройку xyz до правой. При дальнейшем решении задачи будем пользоваться сферической системой координат r, θ, φ , где угол θ отсчитывается от оси x , а угол φ — от оси y в направлении оси z .



Определим проекцию m_x магнитного момента шара на ось x . Напомним, что магнитный момент $\vec{m}$ системы токов определяется выражением:

$$\vec{m} = \int_V \frac{[\vec{r} \times \vec{j}]}{2} dV.$$

Пусть $r_{\perp}$ — расстояние от оси x до некоторого объёма dV шара. Тогда вклад в магнитный момент dm_x элемента объёмом dV составляет:

$$dm_x = \frac{r_{\perp} j_{\varphi} dV}{2}.$$

Учитывая, что $dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\varphi dx$, имеем:

$$dm_x = \frac{r_{\perp} j_{\varphi} r_{\perp} dr_{\perp} d\varphi dx}{2}.$$

Таким образом, полный магнитный момент системы составляет:

$$m_x = \frac{1}{2} \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} r_{\perp} dr_{\perp} \int_0^{2\pi} j_{\varphi} r_{\perp} d\varphi.$$

Обратим внимание, что:

$$\int_0^{2\pi} j_{\varphi} r_{\perp} d\varphi = \oint_l \vec{j} d\vec{l} = -\sigma \frac{d\Phi}{dt},$$

где поток Φ индукции магнитного поля вычисляется через круг радиусом $r_{\perp}$. Поскольку оси y и z лежат в плоскости данного круга:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r_{\perp}^2 \frac{dB_n}{dt} = \pi r_{\perp}^2 \Omega B.$$

Тогда:

$$m_x = -\frac{\pi\sigma\Omega B}{2} \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r_{\perp}^3 dr_{\perp}.$$

Перейдём к интегрированию по углу θ :

$$m_x = -\frac{\pi\sigma\Omega B}{2} \int_0^{\pi} R \sin \theta d\theta \int_0^{R \sin \theta} r_{\perp}^3 dr_{\perp} = -\frac{\pi\sigma\Omega B R^5}{8} \int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta.$$

Вычислим последний интеграл подстановкой $\alpha = \cos \theta$:

$$\int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - \alpha^2)^2 d\alpha = \int_{-1}^1 (1 - 2\alpha^2 + \alpha^4) d\alpha = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}.$$

Для m_x находим:

$$m_x = -\frac{2\pi\sigma\Omega B R^5}{15}.$$

Из изложенного способа нахождения m_x практически сразу следует, что m_y и m_z равны нулю. Действительно, если контур циркуляции плотности тока лежит в плоскости xz , то производная по времени потока Φ индукции магнитного поля обращается в ноль, поскольку контур ориентирован перпендикулярно индукции магнитного поля. Если же контур лежит в плоскости xy , то поток Φ индукции магнитного поля через него всегда равен нулю, поэтому и производная по времени потока Φ индукции магнитного поля всегда равна нулю. Но из равенства нулю циркуляции плотности тока по замкнутому контуру следует равенство нулю подынтегральной функции, а значит и проекций магнитного момента m_y и m_z .

Таким образом, для момента сил $\vec{M}$, действующих на шар, имеем:

$$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}] = m_x B \vec{e}_z = -\frac{2\pi\sigma\Omega B^2 R^5}{15} \vec{e}_z.$$

Момент инерции однородного шара относительно диаметра равен $I = 2mR^2/5$, где $m = 4\pi\rho R^3/3$ — масса шара. Таким образом:

$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15}.$$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для шара относительно оси z :

$$M_z = -\frac{2\pi\sigma\Omega B^2 R^5}{15} = \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{8\pi\rho R^5}{15} \frac{d\Omega}{dt},$$

откуда:

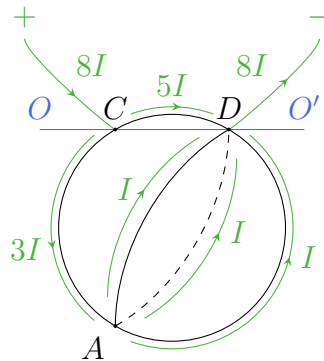
$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{\sigma B^2 dt}{4\rho}.$$

Интегрируя, находим:

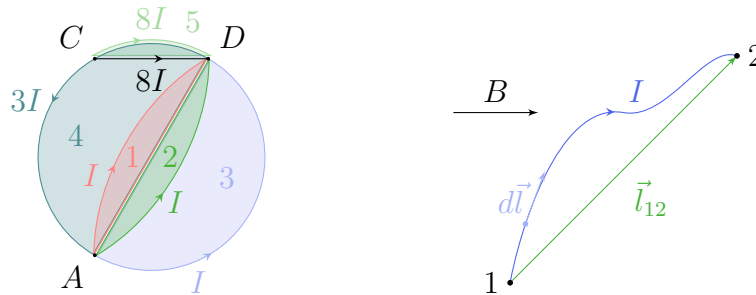
$$\Omega(t) = \Omega_0 \exp\left(-\frac{\sigma B^2 t}{4\rho}\right).$$

Магнитостатика

Определим токи в ветках конструкции:



Рассмотрим эквивалентную систему, состоящую из пяти контуров 1, 2, 3, 4 и 5 с токами I , I , I , $3I$ и $8I$ соответственно, а также дуги CD с током $8I$.



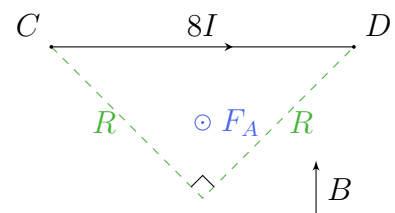
Получим выражение для силы Ампера, действующей на произвольный провод с током в однородном магнитном поле:

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}], \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_A = \int I [d\vec{l} \times \vec{B}] = I \left[\int d\vec{l} \times \vec{B} \right] = I [\vec{l}_{12} \times \vec{B}].$$

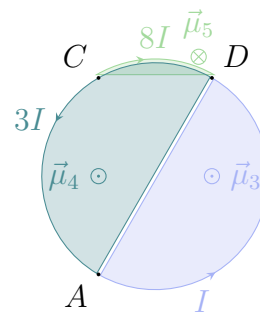
Если контур замкнут, то $\vec{l}_{12} = 0$ и $F_A = 0$.

В нашем случае силы Ампера на замкнутые контуры с током равны нулю. Остается посчитать силу Ампера на прямой участок CD с током $8I$:

$$F_A = 8\sqrt{2}IBR.$$



Момент силы Ампера, действующий на прямолинейный участок с током $8I$, в нашей эквивалентной системе относительно горизонтальной оси OO' равен нулю. Значит достаточно найти суммарный момент сил, на все контуры с током. Величина $IS\vec{n}$ — магнитный момент контура с током I . С учётом этого легко посчитать суммарный магнитный момент $\vec{\mu}$ всех контуров с токами в нашей системе. Магнитные моменты контуров 1 и 2 в сумме равны нулю. Для контуров 3, 4 и 5 магнитные моменты равны



$$\mu_3 = \frac{\pi R^2}{2} I, \quad \mu_4 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 3I, \quad \mu_5 = \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right) \cdot 8I.$$

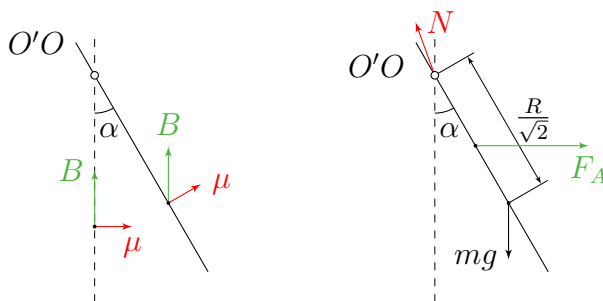
Значит суммарный магнитный момент направлен на нас и равен

$$\mu = \mu_3 + \mu_4 - \mu_5 = (2\pi - (2\pi - 4))R^2 I = 4R^2 I.$$

Откуда момент сил Ампера на конструкцию в проекции на ось $O'O$:

$$M_{O'O} = \mu B = 4BIR^2.$$

В дальнейшем конструкция (если её отпустить) начнет поворачиваться вокруг оси. Магнитный момент конструкции будет также поворачиваться и оставаться перпендикулярным плоскости кольца ACD . Максимальная кинетическая энергия будет при прохождении положения равновесия. Найдём угол поворота, соответствующий положению равновесия.



Момент сил Ампера относительно $O'O$:

$$M_A = \mu B \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 4IR^2 B \cos \alpha.$$

Момент силы тяжести:

$$M_T = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot mg \sin \alpha.$$

Условие равновесия:

$$M_A = M_T, \quad \Longleftrightarrow \quad 4IR^2 B \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot mg \sin \alpha, \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{2}IRB}{mg}.$$

Работу сил Ампера при движении контура с током или его частей в постоянном магнитном поле можно найти согласно выражению: $\delta A = I\Delta\Phi$. Эту формулу легко

доказать. С учетом этого найдем максимальную кинетическую энергию из энергетических соображений:

$$A_A + A_T = K_{\max}.$$

Работа силы тяжести равна

$$A_T = -mg \frac{R}{\sqrt{2}} (1 - \cos \alpha).$$

Работа силы Ампера равна

$$\begin{aligned} A_A &= I\Delta\Phi_1 + I\Delta\Phi_2 + I\Delta\Phi_3 + 3I\Delta\Phi_4 + 8I\Delta\Phi_5 = \\ &= 0 + 0 + I \cdot \frac{\pi R^2}{2} B \sin \alpha + 3I \cdot \frac{\pi R^2}{2} B \sin \alpha - 8I \cdot \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right) B \sin \alpha = 4IBR^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Значит,

$$K_{\max} = 4IBR^2 \sin \alpha - mg \frac{R}{\sqrt{2}} (1 - \cos \alpha), \quad \text{где } \alpha = \arctg \frac{4\sqrt{2}IBR}{mg}.$$

Или

$$K_{\max} = \left(\frac{32(IBR)^2 + (mg)^2}{\sqrt{2}((IBR)^2 + (mg)^2)} - \frac{mg}{\sqrt{2}} \right) \cdot R.$$