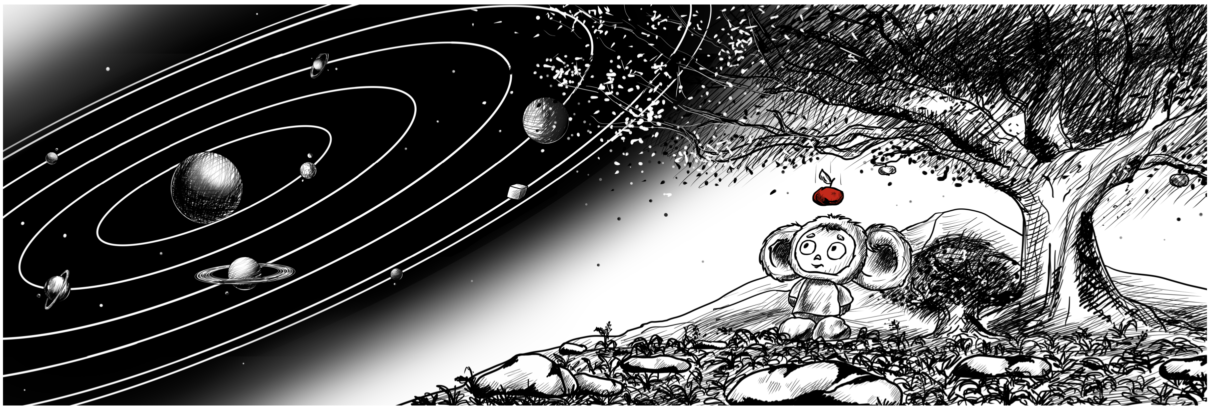


Условия и решения олимпиады Всерос+ младшая лига

Авторы условий:

1. Расторгуев Г.
2. Расторгуев Г.
3. Гриднев И.
4. Уймин А.
5. Уймин А.
6. Уймин А.

Рисунки — Я. Поздняк, А. Уймин.

Набор и вёрстка — А. Уймин, Г. Расторгуев, И. Гриднев, П. Шишкин, Д. Хромов.

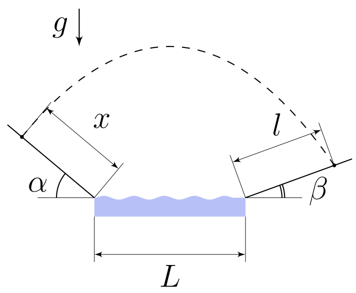
Долгопрудный, 2023 г.

Содержание

Условия

Андрей. У берега реки.

На длинном склоне холма, который составляет угол α с горизонтом, стоит Андрей. У подножья склона протекает река Исеть шириной L. Склон на противоположном берегу реки составляет угол β с горизонтом. Андрей хочет попасть новогодним подарком в точку, находящуюся на противоположном склоне на расстоянии l от правого берега реки.



1. С какой минимальной скоростью ему нужно бросать подарок?
2. На каком расстоянии x от левого берега реки он должен стоять, чтобы бросить подарок с минимальной скоростью?

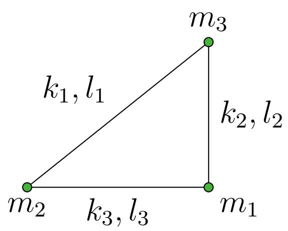
Также найдите, под каким углом к горизонту Андрею необходимо произвести бросок, если

3. $L = 30$ м, $l = 5$ м, $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $g = 9{,}816$ м/с^2.
4. $L = 70$ м, $l = 10$ м, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $g = 9{,}816$ м/с^2.

Замечание. Можно пренебречь силой сопротивления воздуха, размерами Андрея. У берегов и склонов реки Исеть работает данное приближение.

Многопрофильный аттракцион

Три материальные точки с некоторыми массами m_1, m_2, m_3 находятся в вершинах произвольного треугольника и связаны резинками с нулевой начальной длиной и неизвестными коэффициентами жесткости k_1, k_2, k_3 так, как показано на рисунке.



1. Каковы должны быть соотношения между массами, коэффициентами жесткости и длинами сторон, чтобы система могла вращаться в плоскости треугольника вокруг неподвижного центра масс так, чтобы длины сторон треугольника не менялись со временем.

2. При выполненных условиях первого пункта найдите линейные скорости всех материальных точек в зависимости от m_1, m_2, m_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3.

3. Каковы должны быть соотношения между массами и коэффициентами жесткости, чтобы система, отпущенная без начальной скорости из треугольника со сторонами l_1, l_2, l_3, схлопнулась в одну точку так, чтобы соотношения между сторонами не менялись с течением времени.

4. При выполненных условиях третьего пункта найдите время схлопывания, считая известными m_1 и k_1, k_2, k_3.

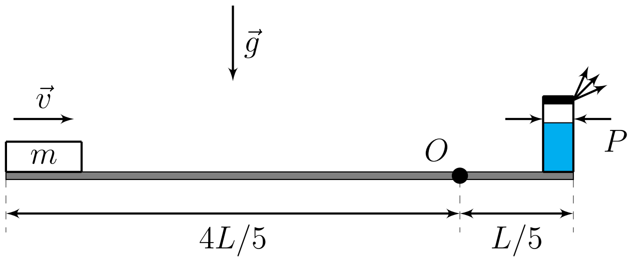
Проводные кандалы

Имеется два одинаковых проводящих кольца, сопротивление каждого из которых в «разогнутом» состоянии равно R. На одном кольце равномерно случайно по длине выбираются две точки. К одной припаивается провод, а к другой «касательным» образом припаивается второе кольцо. Далее под равномерно случайным направлением из точки спаивания выбирается еще одна точка на втором кольце и к ней припаивается второй провод. Вычислите вероятность того, что сопротивление между припаянными проводами окажется больше чем $R/8$.

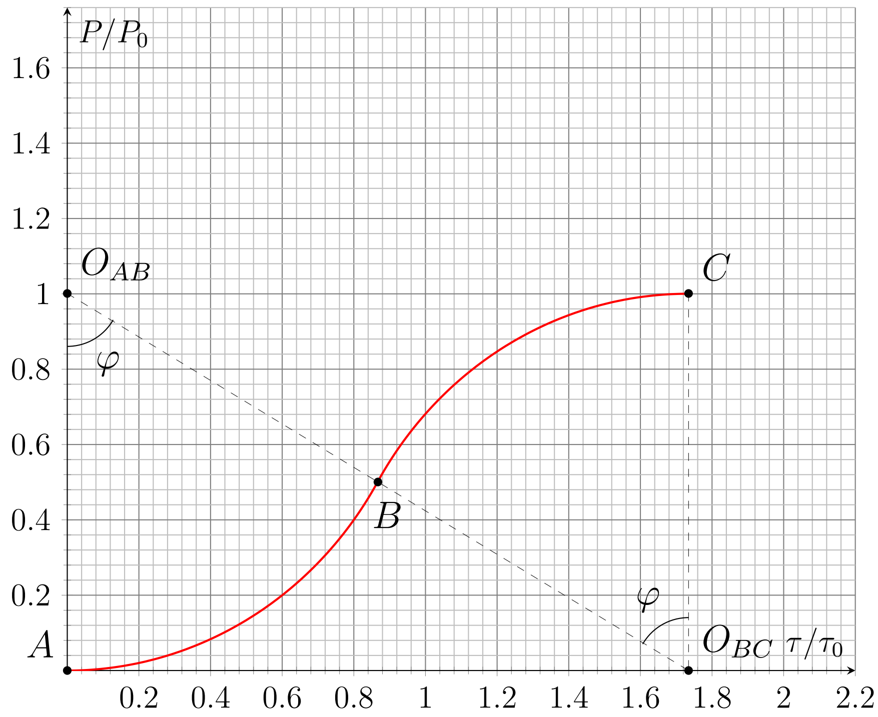
Примечание. Если вас смущает слово «равномерно» — игнорируйте его.

Микроавтомобиль против пара

Рычаг длиной L может вращаться вокруг неподвижной оси O, делящей его в отношении 1/4. Он уравновешен пустым сосудом для жидкости,размерами которого можно пренебречь по сравнению с L, на ближайшем к оси O конце рычага. Сосуд наполняют жидкостью с удельной теплотой парообразования λ при температуре кипения и уравновешивают рычаг, помещая на его противоположном конце микроавтомобиль, размерами которого также можно пренебречь по сравнению с L.

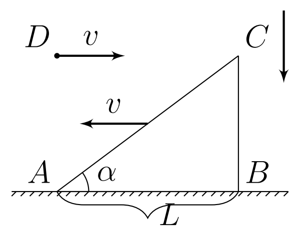


Сосуд с жидкостью начинают нагревать, и автомобиль начинает двигаться таким образом, что рычаг всё время остаётся в равновесии. Считайте, что весь образовавшийся пар мгновенно вытекает через горлышко сосуда. На графике представлена зависимость мощности P, подводимой к сосуду (с учётом теплопотерь), от времни τ в координатах $P/P_0(\tau/\tau_0)$. График представляет собой две дуги окружности AB и BC с центрами O_{AB} и O_{BC}, радиус и центральный угол каждой из которых равны соответственно $R = 1$ и $\varphi = \pi/3$. Величины P_0 и τ_0 являются известными. Также известно, что жидкость полностью испаряется в конце процесса нагревания ABC.



1. Определите массу микроавтомобиля m.
2. Определите максимальные мгновенную скорость v_{max} и ускорение a_{max} автомбиля в процессе движения.
3. Определите максимальные среднюю скорость $\langle v\rangle_{max}$ и ускорение $\langle a\rangle_{max}$ автомобиля в процессе движения.

Удар о клин



Материальная точка и клин исходно образуют прямоугольник $ABCD$. Длина стороны клина $AB = L = 5$ м. Материальной точке и клину сообщают одинаковые скорости v, направленные горизонтально и противоположно. Скорость клина в дальнейшем поддерживается постоянной.

Оказалось, что после первого упругого соударения материальной точки с клином её траектория проходит через точку старта D, причём повторных соударений между этим не было. Трения нет. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Найдите скорость v, если угол клина $\angle CAB = \alpha$ таков, что:

1. $\sin\alpha_1 = 2/5$;
2. $\sin\alpha_2 = 1/5$.

Два треугольника в линзе

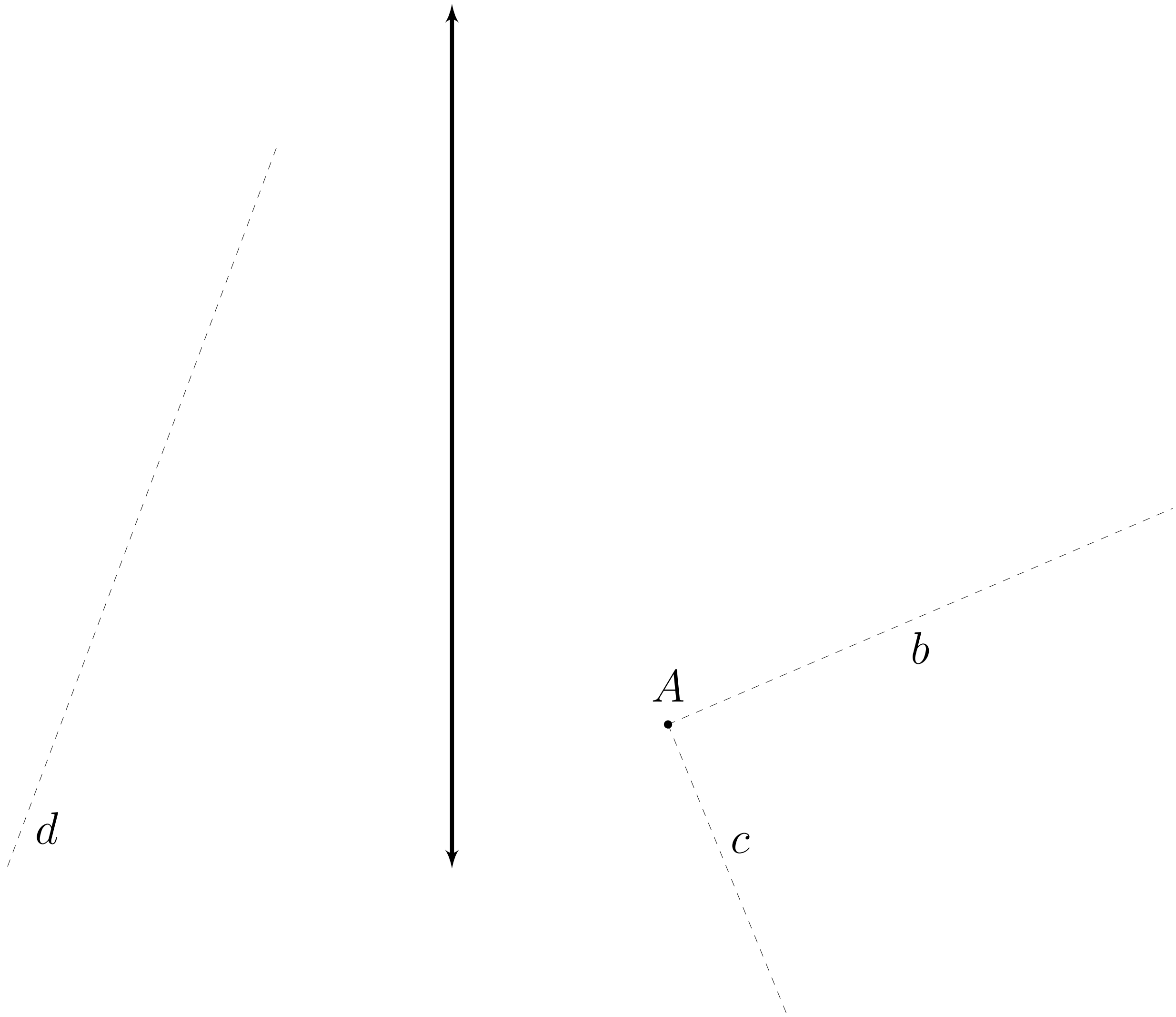
В архиве Снеллиуса была обнаружена оптическая схема, состоявшая из равностороннего треугольника $\triangle A'B'C'$, идеальной собирающей линзы и изображения этого треугольника в линзе, являвшегося прямоугольным треугольником $\triangle ABC$.
От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны лишь плоскости линзы

и вершина A прямоугольного треугольника. Из пояснений к чертежу следовало, что вершины B' и C' равностороннего треугольника располагались на прямой d, а вершины B и C прямоугольного треугольника — на лучах Ab и Ac соответственно. Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

1. вершин равностороннего треугольника;
2. фокусов линзы.

Построения проведите на выданном вам отдельном листе А4.

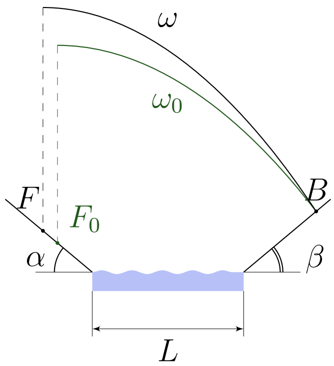
Архив Снеллиуса



Решения

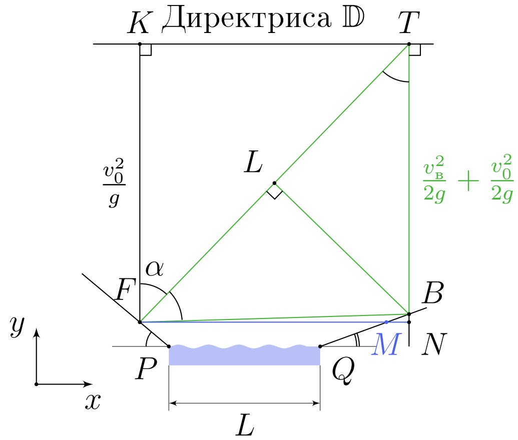
Андрей. У берега реки.

Пусть Андрей находится в точке F на некотором расстоянии x от левого берега реки Исеть. Тогда минимальная скорость, с которой Андрею необходимо кинуть подарок, задаётся параболой безопасности ω. Из свойств параболы беопасности следует, что F — фокус ω.



Заметим, что, если угол наклона касательной к ω в точке приземления подарка B к горизонтали больше, чем α, Андрей сможет подойти ближе к берегу в точку F' так, что при прежней начальной скорости B окажется внутри параболы безопасности. Тогда Андрей сможет уменьшить начальную скорость. Ясно, что, если угол наклона касательной к параболе безопасности ω в точке B к горизонтали будет меньше α, будет выгодно отходить от берега.

Итак, если существует точка F_0 такая, что парабола безопасности ω_0 с фокусом в F_0 проходит через B и угол наклон касательной к ω_0 в B с горизонтом равен α, Андрею необходимо кидать именно из точки F_0. Ясно, что, если такой точки существовать не будет, бросок необходимо проводить непосредственно с берега реки.



Введём обозначения как на рисунке. Условия того, что B находится на параболе безопаности эквивалентно условию $FB = BT$, где BT — расстояние от точки B до директрисы $\mathbb{D}$ параболы безопасности ω_0. По оптическому свойству параболы, биссектриса BL равнобедренного $\triangle FBT$ является касательной к ω_0 в точке B, откуда

$$\angle TFB = \angle FTB = 90^\circ - \angle LBT = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

Поскольку $FK \perp \mathbb{D}$ и $BT \perp \mathbb{D}$, $FK \parallel BT$, откуда $\angle KFT = \angle FTB = \alpha$. Тогда ясно, что $\angle BFM = 90^\circ - 2\alpha$. Теперь расстояние

$$FN = \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha)\, BN = \operatorname{tg}(2\alpha)\,(l\sin\beta - x\sin\alpha).$$

В то же время

$$FN = x\cos\alpha + L + l\cos\beta.$$

Приравнивая выражения для FN, получаем

$$x = -\frac{L\cos(2\alpha) + l\cos(2\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Однако, как было сказано ранее, x не может быть отрицательным, поэтому ответ на второй вопрос задачи выглядит следующим образом:

$$x = \begin{cases} -\dfrac{L\cos(2\alpha) + l\cos(2\alpha+\beta)}{\cos\alpha}, & L\cos(2\alpha) + l\cos(2\alpha+\beta) < 0; \\ 0, & L\cos(2\alpha) + l\cos(2\alpha+\beta) > 0. \end{cases}$$

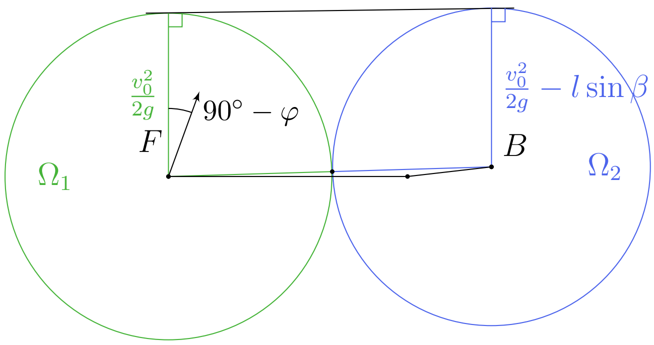
Таким образом, поиск начальной скорости тоже придется разбить на 2 случая: когда $x > 0$ и когда $x = 0$. Разберем вначале первый.

Из свойств параболы безопасности, $FK = v_0^2/g$. Из прямоугольного $\triangle FKT$ имеем, что $KT = FK\operatorname{tg}\alpha$, но $KT = FN$, поскольку $FKTN$ — прямоугольник. Тогда ответом имеем

$$v_0 = \sqrt{g\operatorname{ctg}\alpha\,(L(1-\cos(2\alpha)) + l(\cos\beta - \cos(2\alpha+\beta)))}.$$

Или иначе

$$v_0 = \sqrt{g\,(L\sin(2\alpha) + l\operatorname{ctg}\alpha\,(\cos\beta - \cos(2\alpha+\beta)))}.$$



Теперь рассмотрим случай $x = 0$. Тогда задача вырождается в поиск минимальной скорости при фиксированных концах траектории. Рассмотрим параболу, по которой будет двигаться подарок, брошенный Андреем, в случае наименьшей начальной скорости. Её директриса $\mathbb{D}'$ находится на расстоянии $\frac{v_0^2}{2g}$ от точки P и на расстоянии $\frac{v_0^2}{2g} - l\sin\beta$ от точки B. По теореме косинусов,

$$PB^2 = l^2 + L^2 + 2lL\cos\beta.$$

Из касания окружностей возможных фокусов Ω_1 и Ω_2,

$$PB = \frac{v_0^2}{g} - l\sin\beta.$$

Тогда для v_0 имеем

$$v_0 = \sqrt{g\left(l\sin\beta + \sqrt{l^2 + L^2 + 2lL\cos\beta}\right)}.$$

Окончательно, ответ на первый вопрос задачи:

$$v_0 = \begin{cases} \sqrt{g\left(L\sin(2\alpha) + l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\left(\cos\beta - \cos\left(2\alpha+\beta\right)\right)\right)}, & L\cos\left(2\alpha\right) + l\cos\left(2\alpha+\beta\right) < 0; \\ \sqrt{g\left(l\sin\beta + \sqrt{l^2 + L^2 + 2lL\cos\beta}\right)}, & L\cos\left(2\alpha\right) + l\cos\left(2\alpha+\beta\right) > 0. \end{cases}$$

Найдём теперь угол, под которым необходимо произвести бросок в случае $L = 30$ м, $l = 5$ м, $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $g = 9,816$ м/с^2.

Заметим, что $L\cos\left(2\alpha\right) + l\cos\left(2\alpha+\beta\right) = 15$ м > 0. То есть реализуется второй случай. Апеллируя к оптическому свойству параболы, получаем, что вектор начальной скорости лежит на биссектрисе угла между отрезком, соединяющим точку P с фокусом, и вертикалью. Обозначим угол начальной скорости с вертикалью за $90° - \varphi$. Тогда можно записать следующее уравнение:

$$90° = \mathrm{arctg}\left(\frac{l\sin\beta}{L + l\cos\beta}\right) + 2\left(90° - \varphi\right).$$

Откуда имеем

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(90° + \mathrm{arctg}\left(\frac{l\sin\beta}{L + l\cos\beta}\right)\right) \approx 47{,}08°.$$

Поиск угла в случае $L = 70$ м, $l = 10$ м, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $g = 9,816$ м/с^2 — самое настоящее удовольствие. Заметим, что $L\cos\left(2\alpha\right) + l\cos\left(2\alpha+\beta\right) \approx -43,7$ м < 0. То есть реализуется случай $x > 0$. Поскольку парабола безопасности является огибающей всевозможных парабол с фиксированной начальной скоростью, парабола, по которой будет двигаться новогодний подарок, касается параболы безопасности в точке B. Значит, угол наклона скорости к горизонтали в точке B составляет $\alpha = 60°$. Поскольку векторы начальной и конечной скорости перпендикулярны друг другу, угол наклона вектора начальной скорости с горизонтом будет составлять

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = 30°.$$

Многопрофильный аттракцион

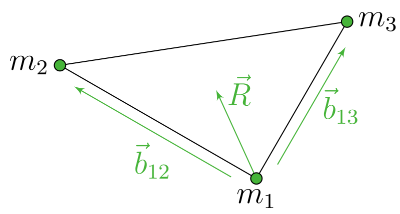
1. Запишем второй Закон Ньютона в векторном виде для тела 1:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = m_1\vec{a}_1.$$

Поскольку по условию тела двигаются по окружности, можно записать $\vec{a}_1 = \omega^2\vec{R}_1$. Где $\vec{R}_1$ — расстояние от тела 1 до центра масс. При этом по определению центра масс

$$\vec{R}_1 = \frac{m_3\vec{b}_{13} + m_2\vec{b}_{12}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Силы можно записать как $\vec{F}_{12} = k_3\vec{b}_{12}$, $\vec{F}_{13} = k_2\vec{b}_{13}$.



Собирая все вместе, получаем:

$$m_1\omega^2 \cdot \frac{m_3\vec{b}_{13} + m_2\vec{b}_{12}}{m_1+m_2+m_3} = k_3\vec{b}_{12} + k_2\vec{b}_{13}.$$

Поскольку треугольник не вырожден, вектора $\vec{b}_{12}$ и $\vec{b}_{13}$ не коллинеарны. Значит, можно приравнять слагаемые при них:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 m_3 \omega^2}{m_1+m_2+m_3} = k_2, \\ \dfrac{m_1 m_2 \omega^2}{m_1+m_2+m_3} = k_3. \end{cases}$$

Из аналогичных рассуждений получаем такое же уравнение на k_1. В итоге получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 m_2 m_3\, \omega^2}{m_1+m_2+m_3} = k_2 m_2, \\ \dfrac{m_1 m_2 m_3\, \omega^2}{m_1+m_2+m_3} = k_3 m_3, \\ \dfrac{m_1 m_2 m_3\, \omega^2}{m_1+m_2+m_3} = k_1 m_1. \end{cases}$$

Значит, искомые соотношения имеют вид

$$m_1 k_1 = m_2 k_2 = m_3 k_3.$$

2. Из первого пункта мы знаем частоту вращения. Однако расстояние до центра масс ещё необходимо найти. Чтобы найти модуль расстояния R_1, возведем его в квадрат, а затем извлечем корень.

$$R_1^2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1 = \frac{m_3^2\,\vec{b}_{13}\cdot\vec{b}_{13} + m_2^2\,\vec{b}_{12}\cdot\vec{b}_{12} + 2m_2m_3\,\left(\vec{b}_{13}\cdot\vec{b}_{12}\right)}{(m_1+m_2+m_3)^2}.$$

Чтобы упростить данное выражение, надо найти скалярное произведение $(\vec{b}_{13}\cdot\vec{b}_{12})$. Для этого введем следующую величину: $\vec{l}_1 = \vec{b}_{12} - \vec{b}_{13}$. Как видно из рисунка, $|\vec{l}_1| = l_1$, $|\vec{b}_{12}| = l_3$, $|\vec{b}_{13}| = l_2$. При этом

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1 = \vec{b}_{12}\cdot\vec{b}_{12} + \vec{b}_{13}\cdot\vec{b}_{13} - 2\left(\vec{b}_{13}\cdot\vec{b}_{12}\right).$$

Откуда получаем: $2(\vec{b}_{13}\cdot\vec{b}_{12}) = l_2^2 + l_3^2 - l_1^2$. Подставим это в формулу для расстояния:

$$R_1^2 = \frac{m_3^2 l_2^2 + m_2^2 l_3^2 + m_2 m_3\,(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2)}{(m_1+m_2+m_3)^2}.$$

Домножим на квадрат частоты из первого пункта и получим квадрат линейной скорости:

$$v_1^2 = \omega^2 R_1^2 = k_1 \frac{m_3^2 l_2^2 + m_2^2 l_3^2 + m_2 m_3 \left(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)\, m_2 m_3}.$$

Остальные скорости получаются циклической заменой переменных.

3. По условию соотношения между сторонами не меняются. Поскольку начальные скорости равны нулю, то из закона сохранения импульса следует, что центр масс покоится, а из закона сохранения момента импульса следует, что треугольник не вращается. Таким образом, можно сделать вывод, что все материальные точки двигаются по прямым, соединяющим их с центром масс.

Описанное в вопросе движение является изотропным. С точки зрения геометрических преобразований плоскости оно является гомотетией с полюсом в центре масс. Как известно, такого рода движиения реализуются при пропорциональности скоростей точек расстоянию от них до полюса гомотетии. Поскольку начальные скорости нулевые, ускорения должны быть пропорциональны, а также направлены вдоль радиуса, т.е. $\vec{a_i} = f(t)\vec{R_i}$. При этом $f(t)$ одинакова для всех тел. Назовем эту функцию $\Omega(t)^2$ для удобства. Теперь внимательно посмотрим на 1 часть задачи. Изменилась начальная скорость и запись ускорения точки. Однако силы, расстояния и уравнения такие же, как и в первой части задачи. Т. е. мы можем записать:

$$m_1 \Omega(t)^2 \cdot \frac{m_3 \vec{b}_{13} + m_2 \vec{b}_{12}}{m_1 + m_2 + m_3} = k_3 \vec{b}_{12} + k_2 \vec{b}_{13}.$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 m_2 m_3\, \Omega(t)^2}{m_1 + m_2 + m_3} = k_2 m_2, \\ \dfrac{m_1 m_2 m_3\, \Omega(t)^2}{m_1 + m_2 + m_3} = k_3 m_3, \\ \dfrac{m_1 m_2 m_3\, \Omega(t)^2}{m_1 + m_2 + m_3} = k_1 m_1. \end{cases}$$

Здесь мы также видим, что $\Omega(t) = \omega$ и не зависит от времени. А необходимым и достаточным условием описанного движения будет:

$$k_1 m_1 = k_2 m_2 = k_3 m_3 = \frac{m_1 m_2 m_3\, \omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} = \text{const}.$$

4. Как мы уже заметили, уравнение движения в пункте 1 совпадает с уравнением движения в пункте 3. Отличается только начальная скорость. Давайте запишем ещё раз это уравнение в векторном виде $\vec{a} = \omega^2 \vec{r}$. Если вы умеете решать дифференциальные уравнения, не удивляйтесь тому, что радиус в правой части: радиус вектор здесь проводится не от центра к точке, а от точки к центру. Теперь запишем это же уравнение, но в координатах:

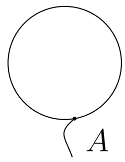
$$\begin{cases} a_x = \omega^2 r_x, \\ a_y = \omega^2 r_y. \end{cases}$$

Как видно, движение по x не зависит от движения по y. Т. е. можно сказать, что уравнение движения тела по оси x в пунктах 3-4 — это проекция уравнений движения для равномерного вращения тела с частотой ω по некоторой окружности. Таким образом, время до схлопывания будет временем, за которое тело проходит четверть окружности, т. е. $\tau = \frac{\pi}{2\omega}$, где ω находится из пункта 3. В итоге получаем

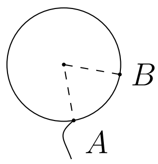
$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1 k_1}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}}.$$

Проводные кандалы

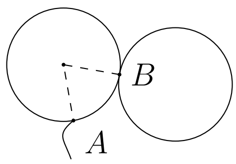
Зафиксируем первую выбранную точку (т. A)



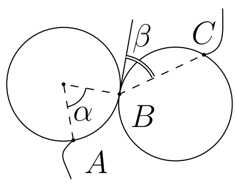
Относительно точки A равномерно случайно по центральному углу α выбирается точка B:



Припаиваем второе кольцо в точке B:



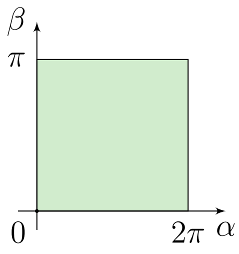
Случайно по направлению из точки B (под углом β к общей касательной) выбираем последнюю точку (т. C):



Тогда $R = R_{AB} + R_{BC}$. Выразим R_{AB} и R_{BC}:

$$R_{AB}(\alpha) = \frac{\frac{\alpha}{2\pi}R \cdot \frac{2\pi-\alpha}{2\pi}R}{\frac{\alpha}{2\pi}R + \frac{2\pi-\alpha}{2\pi}R} = \frac{R}{4\pi^2}(2\pi\alpha - \alpha^2), \quad R_{BC}(\beta) = \frac{\frac{2\beta}{2\pi}R \cdot \frac{2\pi-2\beta}{2\pi}R}{R} = \frac{R}{4\pi^2}(4\pi\beta - 4\beta^2).$$

Рассмотрим координатную плоскость с осями α и β. Так как выбор случайных величин в условии соответствует именно выбору α и β, то выбор случайной точки внутри выделенного прямоугольника со сторонами 2π и π по осям α и β соответственно тоже соответствует случайному выбору, описанному в условии.



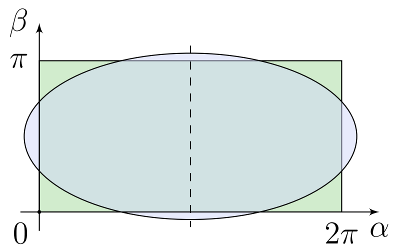
Тогда

$$R_{AB} + R_{BC} = \frac{R}{\pi^2}\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \pi\beta - \frac{\alpha^2}{4} - \beta^2\right)$$

и требуемое неравенство $R_{AB} + R_{BC} > R/8$ переписывается в виде:

$$2\pi(\alpha + 2\beta) - (\alpha^2 + 4\beta^2) > \frac{\pi^2}{2}.$$

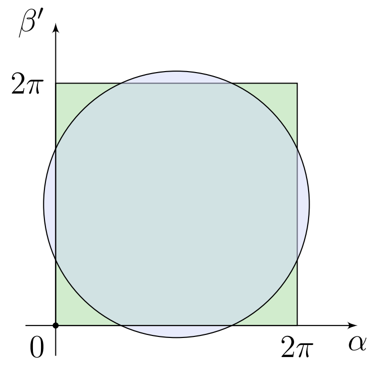
Изобразим случай равенства на той же координатной плоскости (это график эллипса):



И тогда все, что нам нужно для выполнения условия неравенства — чтобы случайная выбранная точка внутри прямоугольника попала внутрь эллипса. То есть искомая вероятность есть отношение площади пересечения эллипса и прямоугольника к площади всего прямоугольника.

Чтобы найти это отношение площадей, скажем, что эллипс и прямоугольник — это результаты проецирования фигур из плоскости, которая пересекает нашу координатную плоскость по оси α и образует с ней угол $\pi/3$. Тогда прообразом эллипса при такой проекции будет являться окружность, так как при обратном проецировании мы просто заменяем координату β на $\beta' = 2\beta$ и уравнение эллипса превращается в уравнение окружности:

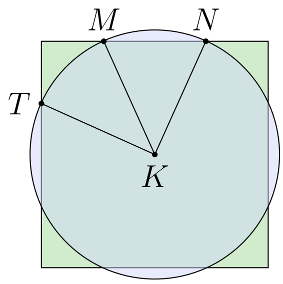
$$2\pi(\alpha + \beta') - (\alpha^2 + (\beta')^2) = \frac{\pi^2}{2}.$$



Прообразом прямоугольника в таком случае будет являться квадрат со стороной 2π.

При проецировании отношение площадей сохраняется, поэтому отношение площади пересечения квадрата и круга в осях α и β' к полной площади квадрата есть искомая вероятность, а это уже понятная и простая геометрическая задача.

Из уравнения круга $2\pi(\alpha + \beta') - (\alpha^2 + (\beta')^2) = \pi^2/2$ его радиус равен $\pi\sqrt{3/2}$.



Площадь пересечения равна $4S_{MNK} + 4S_{TMK}$ при этом в случае S_{MNK} речь идет о площади треугольника, а в случае S_{TMK} о площади сектора окружности. Радиус окружности мы знаем, линейные размеры квадрата тоже, следовательно можем найти площадь каждого слагаемого. Итого площадь пересечения окружности и квадрата равна

$$3\pi^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \pi^2 2\sqrt{2}.$$

В таком случае искомая вероятность есть найденная площадь, деленная на $4\pi^2$ (площадь квадрата со стороной 2π). Ответ:

$$P = \frac{3\left(\pi/2 - 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right)\right) + 2\sqrt{2}}{4}.$$

Комментарий: в данной задаче есть несколько мест, где можно сократить путь решения и, например, перейти от интерпретированной вероятности сразу к схеме с окружностью и квадратом (минуя эллипс), или же пункты решения о проецировании фигур между плоскостями можно заменить на рассуждения о линейном растяжении осей. Такие решения при полном обосновании всех переходов тоже являются корректными.

Микроавтомобиль против пара

1. Пусть $m_ж$ — масса налитой в сосуд жидкости. Из уравнения моментов получим:

$$mg \cdot \frac{4L}{5} = m_ж g \cdot \frac{L}{5}, \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{m_ж}{4}.$$

Поскольку к концу процесса ABC жидкость полностью испаряется:

$$Q_{ABC} = \lambda m_ж,$$

где Q_{ABC} — количество теплоты, полученное жидкостью в процессе ABC. Оно равно площади под графиком мощности от времени. Обратим внимание, что график зависимости мощности от времени таков, что его площадь в точности равна площади прямоугольника со сторонами $P_0/2$ и $\sqrt{3}\tau_0$, откуда находим:

$$m_ж = \frac{P_0\tau_0\sqrt{3}}{2\lambda}, \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{P_0\tau_0\sqrt{3}}{8\lambda}.$$

2. Пусть l — расстояние от микроавтомобиля до оси вращения. Тогда имеем:

$$m\Delta l = \Delta m_ж \cdot \frac{L}{5}.$$

Разделим последнее уравнение на промежуток времени $\Delta\tau$, за который происходит изменение, и получим:

$$m \cdot \frac{\Delta l}{\Delta\tau} = mv = \frac{L}{5} \cdot \frac{\Delta m_ж}{\Delta\tau}.$$

Но из уравнения теплового баланса имеем:

$$\lambda \cdot \frac{\Delta m_ж}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = P, \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{PL}{5m\lambda} = \frac{8LP}{5\sqrt{3}P_0\tau_0}.$$

Максимальное значение мощности P равно P_0, откуда для $v_{\max}$ находим:

$$v_{\max} = \frac{8L}{5\sqrt{3}\tau_0}.$$

Найдём ускорение микроавтомобиля:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta\tau} = \frac{8L}{5\sqrt{3}P_0\tau_0}\frac{\Delta P}{\Delta\tau} = \frac{8Lk}{5\sqrt{3}P_0\tau_0},$$

где $k = \Delta P/\Delta\tau$ — угловой коэффициент графика мощности от времени. Его максимальное значение достигается в точке B и равняется:

$$k_{\max} = \frac{\sqrt{3}P_0}{\tau_0}, \quad \Longrightarrow \quad a_{\max} = \frac{8L}{5\tau_0^2}.$$

3. Скорость микроавтомобиля возрастала в течении всего процесса нагревания, поэтому её максимальное значение достигается в конце процесса. Поскольку за время $\sqrt{3}\tau_0$ перемещение микроавтомобиля равно $4L/5$, находим:

$$\langle v\rangle_{\max} = \frac{4L}{5\sqrt{3}\tau_0}.$$

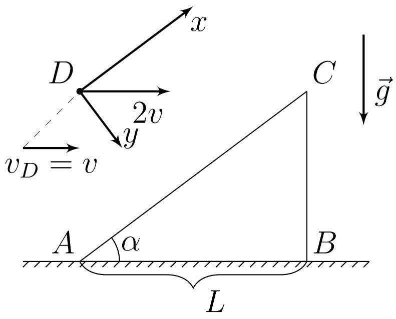
Для среднего ускорения имеем:

$$\langle a\rangle = \frac{v}{\tau} = \frac{8L}{5\sqrt{3}P_0\tau_0}\frac{P}{\tau}.$$

Таким образом, максимальное значение $\langle a\rangle$ достигается при максимальном значении параметра (P/τ), которому соответсвует касательная к дуге окружности BC, проведённая из точки A. Поскольку на графике расстояние между точками A и O_{BC} равняется $\sqrt{3}$, а радиус окружности равен единице — длина касательной равна $\sqrt{2}$, откуда:

$$\left(\frac{P}{\tau}\right)_{\max} = \frac{P_0}{\sqrt{2}\tau_0}, \quad \Longrightarrow \quad \langle a\rangle_{\max} = \frac{8L}{5\sqrt{6}\tau_0^2}.$$

Удар о клин



Будем решать задачу в системе отсчёта, связанной с клином. Тогда в момент старта скорость материальной точки равна $2v$, а скорость точки D равна v. Введём систему координат с началом в точке D так, как показано на рисунке. Фактически, необходимо найти значение скорости v, при котором одновременно координаты x и y материальной точки M и точки D одновременно окажутся одинаковыми.

Удары о наклонную плоскость не влияют на движение вдоль оси x. Воспользуемся равенством координат x для нахождения момента встречи t_0 точек M и D:

$$x_D = v\cos\alpha t_0 = x_M = 2v\cos\alpha t_0 - \frac{g\sin\alpha t_0^2}{2}, \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{2v}{g\tan\alpha}.$$

Из полученного выражения для t_0 видно, что в момент встречи точек M и D проекция на ось x скорости материальной точки $v_{Mx} = 0$.

Отметим также, что встреча точек M и D происходит на той же высоте над горизонтальной поверхностью. Поскольку удар упругий, из закона сохранения энергии следует, что в момент t_0 проекция на ось y скорости материальной точки $v_{My} = \pm 2v$.

Пусть y-компонента скорости точки прямо перед ударом о клин равна $v_\perp$. Найдём время t_0 вторым способом — из уравнения движения по оси y:

$$t_0 = \frac{v_\perp - 2v\sin\alpha}{g\cos\alpha} + \frac{\pm 2v - (-v_\perp)}{g\cos\alpha} = \frac{v_\perp - 2v\sin\alpha}{g\cos\alpha} + \frac{v_\perp \pm 2v}{g\cos\alpha},$$

откуда, приравнивая два выражения для t_0, получим

$$v_\perp = v\left(\frac{1}{\sin\alpha} \mp 1\right).$$

Также найдём $v_\perp$ из закона сохранения механической энергии, учитывая, что y-компонента скорости меняется только под действием y-компоненты силы тяжести:

$$\frac{v_\perp^2}{2} - \frac{(2v\sin\alpha)^2}{2} = gy\cos\alpha.$$

Координата y в момент удара точки о клин равна $y = L\sin\alpha$, откуда

$$v_\perp^2 = 4v^2\sin^2\alpha + 2gL\sin\alpha\cos\alpha.$$

Приравнивая два выражения для $v_\perp^2$, получим:

$$v^2 = \frac{2gL\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\frac{1}{\sin\alpha} \mp 1\right)^2 - 4\sin^2\alpha}.$$

Проаналзируем полученное выражение.

Во-первых, знаменатель должен быть положительным. При знаке плюс в скобках знаменатель равен нулю при $\alpha = 90°$ и положителен при любых других углах. Если же в скобках стоит знак минус, требуемое условие эквивалентно неравенству

$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 < 0, \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha < \frac{1}{2}.$$

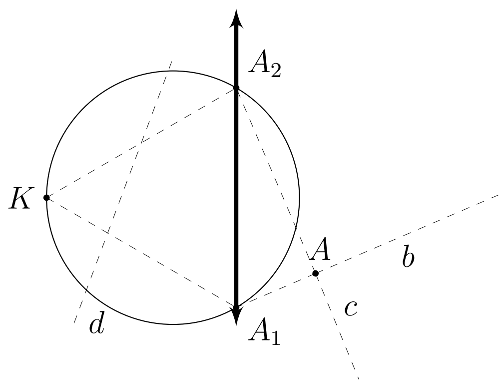
Данному неравенству удовлетворяют оба угла.

Окончательно:

1.
$$v_1 = \sqrt{\frac{2gL\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\frac{1}{\sin\alpha}\mp 1\right)^2 - 4\sin^2\alpha}} \approx 4{,}78\ \text{м/с};\ \approx 1{,}78\ \text{м/с}.$$

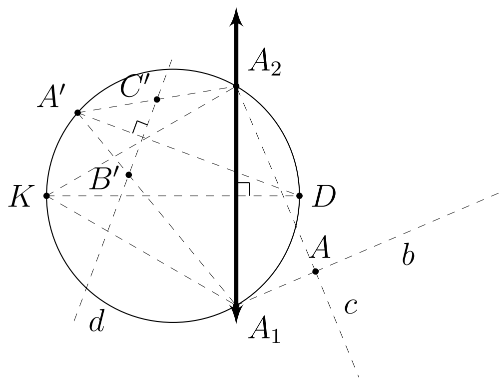
2.
$$v_{2(1,2)} = \sqrt{\frac{2gL\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\frac{1}{\sin\alpha}\mp 1\right)^2 - 4\sin^2\alpha}} \approx 1{,}11\ \text{м/с};\ 0{,}74\ \text{м/с}.$$

Два треугольника в линзе



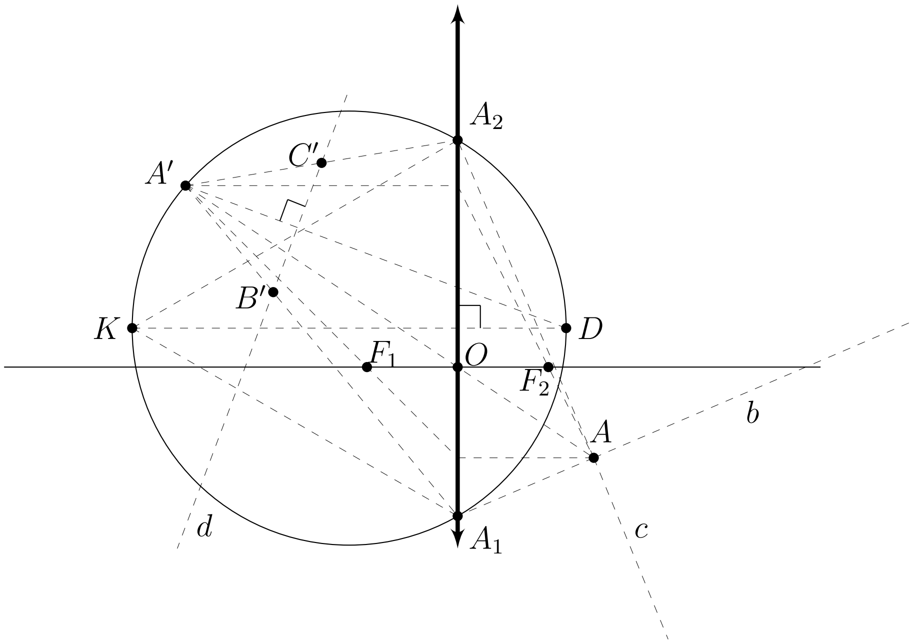
Рассмотрим лучи, идущие вдоль сторон треугольника $\triangle A'B'C'$. После преломления в линзе эти лучи проходят через стороны прямоугольного треугольника $\triangle ABC$.

Продлим лучи Ab и Ac до пересечения с плоскостью линзы в точках A_1 и A_2 соответственно. После преломления в линзе эти лучи пересекутся под углом 60° в вершине A' треугольника $\triangle A'B'C'$. Значит, возможное ГМТ вершины A' — дуга окружности, построенная на A_1A_2 как на хорде, видимой под углом 60°. Восстановим данную окружность как описанную вокруг равностороннего треугольника KA_1A_2. Сразу отметим, что вершины B' и C' лежат на отрезках $A'A_1$ и $A'A_2$ соответственно.



Поскольку треугольник $\triangle A'B'C'$ равносторонний, в нём биссектриса угла совпадает с высотой. Проведём перпендикуляр от точки K к A_1A_2 до пересечения с окружностью в точке D. Тогда $A'D$ является биссектрисой угла $\angle A_1A'A_2$, поскольку делит хорду окружности A_1A_2 пополам. Проведя перпендикуляр из точки D к прямой d, получим положение вершины A' как точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью. Далее, соединяя вершину A' с точками A_1 и A_2, получим положения вершин B' и C' как пересечения отрезков $A'A_1$ и $A'A_2$ с прямой d соответственно.

Главный оптический центр линзы O получим как точку пересечения отрезка AA' с плоскостью линзы. Восстановим главную оптическую ось линзы как перпендикуляр к её плоскости. Далее, опустим из точек A и A' перпендикуляры на плоскость линзы. Соединим основания перпендикуляров с точками A' и A. Точки пересечения последних отрезков с главной оптической линзы являются её фокусами F_1 и F_2.


A_2
C'
A'
B'
K
D
F_1
O
F_2
A
b
d
c
A_1