Всеармейская олимпиада

Авторы условий:

8 класс
Бейлин Никита

9 класс
Кутелев Константин

10 класс
Жигар Андрей

11 класс
Колдунов Леонид

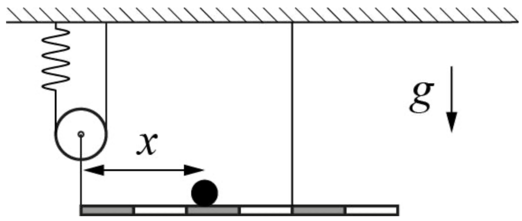
Содержание

Олимпиада 8 класс

8.1. Солдат первую треть всего времени двигался на север со скоростью 9 км/ч, после чего развернулся на восток и шёл оставшееся время со скоростью 6 км/ч. Найдите его среднюю путевую скорость и модуль вектора средней скорости за всё время движения.

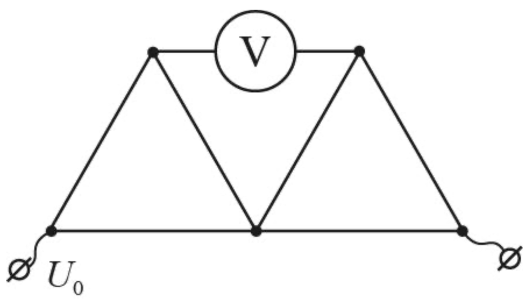
8.2. Пресная вода ($\rho = 1000$ кг/м^3) находится в стакане с площадью основания $S = 200$ см^2. Кусок льда с вмороженными в него дробинками подвешен на нити над водой, причём нижняя часть льда находится в воде. Найдите, на сколько сантиметров изменится уровень воды, когда лёд полностью растает, если известно, что сила натяжения нити $T = 5$ Н, масса дробинок $m = 0{,}1$ кг, а их плотность $\rho = 1000$ кг/м^3.

8.3. Система, показанная на рисунке, состоит из однородной балки массой $M = 2$ кг и длиной $l = 60$ см, небольшого груза массой $m = 1$ кг, идеальных блока, нитей и пружины. Левая нить прикреплена к краю балки, а права делит её в отношении 2:1. Пружина жёсткостью $k = 100$ Н/м растянута на $\Delta x = 5$ см. Найдите, на каком расстоянии от левой нити находится груз, если известно, что система находится в равновесии.

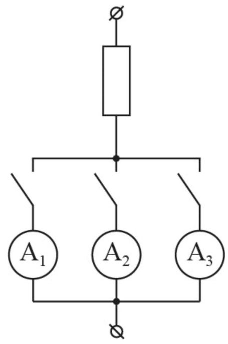


8.4. В лаборатории при температуре $t_1 = 20\,°$C находятся два одинаковых калориметра с водой. Масса воды в первом $m_1 = 200$ г, во втором $m_2 = 100$ г. Василий Иваныч поместил кубик льда при температуре $t_0 = -10\,°$C сначала в один калориметр, а затем в другой. В результате данных манипуляций лёд исчез, а температура в обоих стаканах оказалась равна $t_2 = 10\,°$C. Найдите начальную массу льда, если удельная теплоёмкость $c_0 = 2100$ Дж/(кг $\cdot$ °C), а воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C), если удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Тепловые потери отсутствуют.

8.5. Электрическая цепь представляет собой проволочную сетку, которая состоит из звеньев, имеющих одинаковые сопротивления. Одно звено заменено на идеальный вольтметр. На цепь подаётся напряжение U_0. Найдите показания вольтметра.



Олимпиада 9 класс



9.1. Резерв. Жизненно важные системы в самолётах обычно дублируются, то есть при выходе из строя какого либо важного узла или прибора есть возможность подключить резерв. В электрической цепи, представленной на рисунке, силу тока на важном участке измеряли с помощью одного из одинаковых амперметров (остальные два были в резерве). Показания прибора были $I_1 = 1{,}0$ А. Когда по ошибке один из резервных приборов включили не отключив основной, его показания оказались $I_2 = 0{,}55$ А. Напряжение на участке постоянно и не зависит от изменений в цепи. Определите:

1. Показания третьего амперметра I_3, если его подключить вместе с двумя уже работающими приборами.
2. Значение силы тока I_0 который протекал бы через резистор при отсутствии блока измерения.

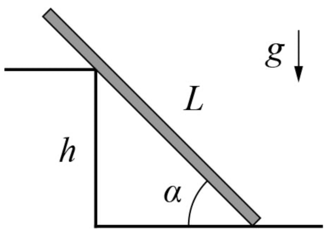
9.2. Полевая почта. Вертолёт Ка-52 движущийся горизонтально на высоте $H = 420$ м сбрасывает «посылку». Спустя время $\tau = 3{,}3$ с скорость «посылки» возросла на 10%. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Определите:

1. Время падения «посылки» до земли $\tau_п$.
2. Расстояние по земле от точки сброса до точки падения «посылки» S.
3. Угол вхождения «посылки» землю (угол между вектором скорости и горизонтом).

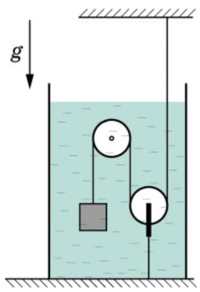
9.3. Экипаж машины боевой. Три друга-танкиста решили погреться на морозе чаем. В три одинаковые кружки они налили кипяток (100 °C). В первую кружку налили $m_1 = 100$ г кипятка, во вторую — $m_2 = 150$ г, в третью — $m_3 = 200$ г. В результате температура чая в первой кружке оказалась $t_1 = 70$ °C, во второй $t_2 = 78$ °C. Пренебрегая тепловыми потерями, определите:

1. Начальную температуру кружек t_0.
2. Температуру, установившуюся в третьей кружке t_3.

9.4. Пора окопаться. При строительстве полевых укреплений однородное бревно длиной $L = 4$ м установили на земляной пол и край окопа (см. рис.) высотой $h = 2{,}5$ м. Угол $\alpha = 45°$. Определите при каком минимальном значении коэффициента трения между стержнем и полом возможно равновесие. Трения между стержнем и ступенькой пренебрежимо мало.



9.5. Вверх или вниз? Система из двух очень лёгких блоков (подвижного и неподвижного) и бруска помещена в воду (см. рис). При этом брусок движется с ускорением a. Если грузик заменить на вдвое более массивный (но сделанный из того же материала), то ускорение опять будет a. Определите плотность бруска. Плотность воды ρ. Трения в системе нет, нити всегда вертикальны. Ускорение свободного падения g. Сопротивление жидкости движению тел пренебрежимо мало.



Олимпиада 10 класс

10.1. Прямую треугольную однородную призму в основании которой лежит равносторонний треугольник положили боковой гранью на горизонтальную поверхность. К середине верхнего ребра прикладывают горизонтальную силу параллельную основаниям призмы. Найдите какое максимальное ускорение можно сообщить призме, чтобы она двигалась поступательно. Коэффициент трения призмы о поверхность равен $\mu = 0{,}15$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10.2. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, ограниченный поршнем, находиться газ при давлении равном атмосферному. Если увеличить абсолютную температуру газа в 6 раз, то объем газа увеличится на 20%. Перевернув цилиндр вертикально температуру уменьшают до изначальной, конечный объем занимаемый газом на 3% больше изначального. Найдите массу поршня, если максимальная сила трения поршня о стенки сосуда постоянна, а площадь поршня равна S. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10.3. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = \pi/4$ удерживают брусок массой $m = 16$ кг. Коэффициент трения бруска о поверхность равен $\mu = 0{,}15$. Брусок отпускают и начинают прикладывать к нему силу направленную вдоль плоскости вверх и меняющуюся со временем по закону $F = kt$, где $k = 0{,}6$ Н/с.

1. Через какое время после начала движения тело будет опускаться с максимальной скоростью.
2. Через какое время тело остановиться?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10.4. По спице без трения могут скользить два маленьких шарика. Массы шариков отличаются в n раз. Шарикам сообщают одинаковый заряд q, и запускают со скоростями v навстречу друг другу с большого расстояния.

1. Найдите скорость шариков в момент их наибольшего сближения.
2. Какое минимальное расстояние будет между шариками в процессе движения?

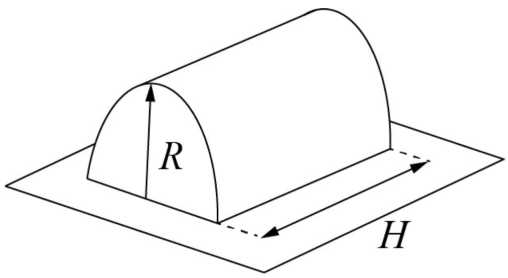
10.5. Из одинаковой проволоки собрали правильный тетраэдр. Сопротивление одного ребра равно R. Два ребра, которые не имеют общих вершин, заменили на одинаковые батарейки с ЭДС $\mathscr{E}$. Найдите силы токов, протекающие через каждую батарейку. Внутреннее сопротивление батареек пренебрежимо мало.

Олимпиада 11 класс

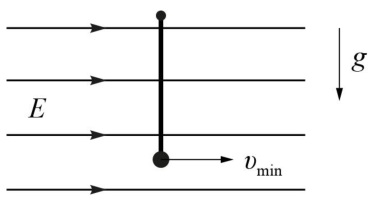
11.1. Затонувший снаряд. Боевой снаряд в форме полуцилиндра попал в водоём глубины H. Высота полуцилиндра H, радиус $R < H$. Средняя плотность материала, из которого сделан боевой снаряд $\rho > \rho_{\text{воды}}$.

1. С каким ускорением будет двигаться снаряд, когда полностью погрузится в воду? Сопротивлением воды пренебречь.

2. После того, как снаряд затонул, была поставлена задача поднять снаряд на поверхность воды. Дно водоёма оказалось таким, что когда снаряд на него лёг, то вода под снаряд не подтекала. Какую минимальную вертикальную силу нужно приложить к снаряду, чтобы оторвать его от дна? Снаряд лежит плоской поверхностью на дне водоёма. Считайте, что под снаряд попал воздух и находится при атмосферном давлении.



11.2. Шарик на нити. На нерастяжимой и непроводящей нити длины $l = 56$ см подвешен маленький шарик массы $m = 100$ мг с зарядом $q = 1{,}0$ мкКл. Вся система помещена в однородное горизонтальное электрическое поле $E = 1{,}0$ кВ/м направленное слева направо. Шарик удерживают в вертикальном положении так, как показано на рисунке, после чего ему сообщают горизонтальную скорость в направлении электрического поля. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.



1. Чему равно ускорение шарика, если ему сообщили скорость 1 м/с.

2. Чему равно минимальное значение начальной скорости шарика $v_{\min}$, при которой он совершит полный оборот?

3. Найдите в мН значения силы натяжения нити, когда она становится параллельной вектору напряжённости электрического поля, если начальная скорость шарика равна $2v_{\min}$.

11.3. Взрывомагнитный генератор. В 1951-1952 г. А. Д. Сахаров предложил принцип получения сверхсильных магнитных полей с использованием энергии взрыва, который впервые был реализован весной в 1952 г. Р. З. Людаевым, Е. А. Феоктистовой, Г. А. Цырковым и А. А. Чивилёвым. В последствии этот метод получил применение в физике (применение в импульсных ускорителях заряженных частиц, исследовании физики плазмы и т. д.) и в технике (метание тел, в оружии электромагнитного импульса). В данной задаче будет обсуждаться идея данного опыта.

Качественная схема опыта представлена на рис. 1. Ёмкость конденсатора C, индуктивность катушки L, конденсатор заряжен до напряжения U_0, сопротивление всей цепи можно считать нулевым. Вокруг соленоида помещён заряд взрывчатого вещества (ВВ) (см. рис. 2). Ключ замыкают:

1. Найдите первый момент времени τ, когда сила тока в цепи будет максимальной.
2. Чему равно значение силы тока в этот момент времени?
3. Чему равно значение магнитного потока через соленоид в этот момент времени?

Когда сила тока достигает максимального значения происходит детонация взрывчатого вещества (см. рис. 2). Взрыв можно считать мгновенным.

4. Считая, что радиус соленоида уменьшился в 100 раз найдите во сколько раз изменится значение индукции магнитного поля.

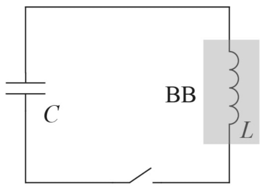


Рис. 1

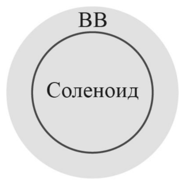
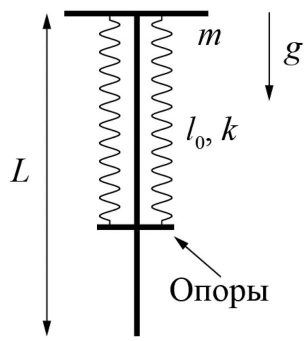


Рис. 2

11.4. Колебания типа «пого». В данной задаче предлагается исследовать колебания системы, показанной на рисунке. В русскоязычной литературе это устройство называется «кузнечик», в англоязычной «Pogo». Колебания схожего типа возникают в жидкостных ракетах и являются достаточно опасным явлением, вплоть до взрыва ракеты в полёте.



«Кузнечика» будем представлять в виде некоторой конструкции длиной L, массой m, которая сосредоточена в опорах и двух невесомых пружинах жёсткостью k, длина которых в недеформированном состоянии $l_0 < L$, прикреплённых к верхнему концу стержня.

1. С какой высоты надо отпустить «кузнечика», чтобы произошёл удар опор о землю? Считайте, что высота это расстояние от земли до нижнего торца «кузнечика».
2. Кузнечика отпускают без начальной скорости так, что его нижний торец располагается на высоте H. Чему равна максимальная деформация пружины? Считайте, что при ударе о землю энергия не теряется.

3. Найдите время, которое «кузнечик» проведёт в контакте с землёй за один прыжок.

4. Пусть кузнечик покоится на гладкой горизонтальной поверхности, и к нему прикладывают горизонтальную силу, изменяющуюся по закону $F_0 \cos \omega t$. Считая, что кузнечик движется по закону $A \cos \omega t$ найдите амплитуду колебаний A, если $\omega = \sqrt{k/m}$ и $\omega = 1{,}4\sqrt{k/m}$.

11.5. Подзорная труба. Объект, находящийся на главной оптической оси, рассматривают через тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 50$ мм. Оказалось, что поперечное увеличение объекта равно 0,5.

1. Чему равно расстояние от объекта до линзы?

2. На главную оптическую ось добавили вторую тонкую собирающую линзу на расстоянии 100 мм от первой. При этом поперечное увеличение объекта системой линз оказалось равным 2,0. Чему равно фокусное расстояние второй линзы?

3. Линзы соединили вплотную и рассматривают объект, находящийся на расстоянии 20 мм от линз. Чему будет равна скорость движения изображения, если объект начал двигаться вдоль главной оптической оси со скоростью 1,2 мм/с.

Решения 8 класс

8.1. По определению средняя путевая скорость это отношение всего пути ко всему времени. Пусть общее время движения равно t. Тогда:

$$v_{\text{ср. п.}} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1\frac{t}{3} + v_2\frac{2t}{3}}{t} = \frac{v_1}{3} + \frac{2v_2}{3} = 7\ \text{км/ч}.$$

Поскольку средняя скорость есть отношения модуля вектора перемещения ко всему времени, то сначала найдём этот модуль:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(v_1\frac{t}{3}\right)^2 + \left(v_2\frac{2t}{3}\right)^2}.$$

Тогда средняя скорость равна

$$v_{\text{ср.}} = \frac{|\vec{s}\,|}{t} = 5\ \text{км/ч}.$$

8.2. Рассмотрим систему «вода-лёд-дробинки». Внешние силы, действующие на систему уравновешивают её

$$F_{\text{д}1} + F = M_{\text{общ}}g. \tag{1}$$

В начальном состоянии была внешняя сила F, действующая на систему вверх. Поскольку сумма внешних сил действующих на систему вниз (тяжести) не поменялась, а сила F пропала, то сила реакции со стороны дна должна увеличиться на эту величину.

После таяния льда дробинки опустились вниз и действуют на дно с силой равной

$$F_{\text{др}} = mg - F_{\text{А}} = mg - \rho gV, \qquad V = \frac{m}{\rho_{\text{др}}}.$$

Общая сила со стороны дна есть сумма сил на дробинки и на воду. С другой стороны система по-прежнему находится в состоянии равновесия, т. е.

$$F_{\text{д}2} + (mg - \rho gV) = M_{\text{общ}}g. \tag{2}$$

Сравнивая уравнения (1) и (2), получаем:

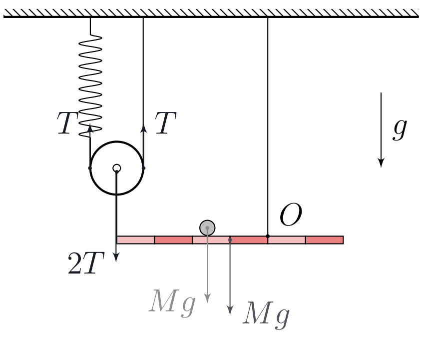
$$F_{\text{д}1} + F = F_{\text{д}2} + (mg - \rho gV), \quad \Longrightarrow \quad \rho g(h_2 - h_1)S = F - (mg - \rho gV).$$

Отсюда $h_2 - h_1 = 2{,}05$ см.

8.3. Расставим силы, действующие на блок. Обозначим за T силу натяжения верёвки, перекинутой через блок. Тогда она равна силе упругости пружины

$$T = k\Delta x = 5\ \text{Н}.$$

Поскольку блок невесом, то сила натяжения нити, привязанной к левому краю балки равна $2T = 10$ Н.



Расставим силы, действующие на балку. Поскольку мы не знаем силу натяжения правой нити — запишем уравнение моментов относительно точки O:

$$2T \cdot 4l_0 = Mgl_0 + mg(4l_0 - x),$$

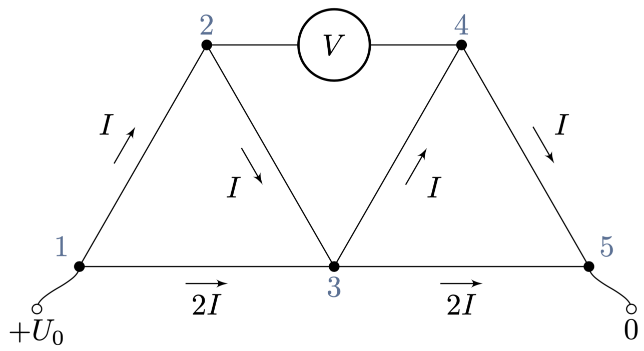
где l_0 — длина одного отрезка балки. Решая данное уравнение, находим $x = 20$ см.

8.4. Поскольку нам не нужно искать какое количество льда осталось после того как он побывал в первом калориметре — запишем общее уравнение теплового баланса для всех трёх объектов:

$$m_1c_1(t_2 - t_0) + m_2c_1(t_2 - t_0) + m_0c_0(0\,^\circ\mathrm{C} - t_0) + m_0\lambda + m_0c_1(t_2 - 0\,^\circ\mathrm{C}) = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $m_0 = 32$ г.

8.5. Расставим токи в цепи так, как показано на рисунке. Здесь мы учли факт, что при проходе пути $1 - 2 - 3$ напряжение такое же как на пути $1 - 3$. Общее напряжение с одной стороны равно U_0, а с другой $2{\cdot}2IR$. Значит искомое напряжение на вольтметре $U_V = 2IR = \frac{U_0}{2}$.



Решения 9 класс

9.1. Общий ток через систему меняется при подключении амперметров, значит у них есть существенное внутреннее сопротивление r сравнимое с сопротивлением участка R. Запишем закон Ома для данного участка в 4-х ситуациях:

$$\begin{cases} U_0 = I_1(R + r); \\ U_0 = 2I_2(R + r/2); \\ U_0 = 3I_3(R + r/3); \\ U_0 = I_0 R. \end{cases}$$

Поделив первые два уравнения друг на друга найдём соотношение сопротивлений:

$$r = \frac{2I_2 - I_1}{I_1 - I_2} R = \frac{2}{9} R.$$

Проведя аналогичные манипуляции с первым и третьим уравнениями, и учитывая соотношения сопротивлений получим:

$$I_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{33}{29} I_1 = \frac{11}{29} \text{ А}.$$

Проведя аналогичные манипуляции с первым и четвёртым уравнениями, и учитывая соотношения сопротивлений получим:

$$I_0 = \frac{11}{9} I_1 = \frac{11}{9} \text{ А}.$$

9.2. По вертикальной оси тело свободно падает без начальной скорости. Уравнение его движения:

$$y = \frac{gt^2}{2}, \quad \Longrightarrow \quad \tau_\text{п} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 9{,}17 \text{ с}.$$

Соответствующее уравнение скорости:

$$v_y = gt.$$

Вдоль горизонтальной оси движение равномерное, скорость равна скорости вертолёта:

$$x = v_0 t.$$

Используем информацию о соотношении скоростей:

$$\frac{\sqrt{(g\tau)^2 + v_0^2}}{v_0} = 1{,}1, \quad \Longrightarrow \quad v_0 = g\tau\sqrt{\frac{100}{21}} \approx 72 \text{ м/с} = 260 \text{ км/ч}.$$

Смещение по горизонтали составит:

$$S = v_0 \tau_\text{п} = 660 \text{ м}.$$

Тангенс угла вхождения найдём как отношение проекций скоростей:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_u}{v_x} = \frac{g\tau_\text{п}}{v_0} \approx 1{,}28, \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 52°.$$

9.3. В отсутствии тепловых потерь изменение температуры чая связано с теплоёмкостью кружек C. Запишем уравнения теплового баланса для трёх случаев:

$$\begin{cases} c_{\text{в}} m_1(t_1 - t_{\text{к}}) + C(t_1 - t_0) = 0, \\ c_{\text{в}} m_2(t_2 - t_{\text{к}}) + C(t_2 - t_0) = 0, \\ c_{\text{в}} m_3(t_3 - t_{\text{к}}) + C(t_3 - t_0) = 0. \end{cases}$$

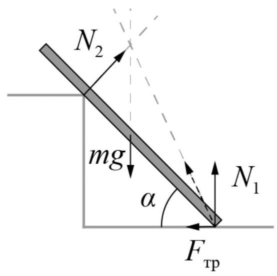
Поделив друг на друга первые два выражения мы получим уравнение из которого можно найти начальную температуру кружек:

$$t_0 = \frac{m_2(t_2 - t_{\text{к}})t_1 - m_1(t_1 - t_{\text{к}})t_2}{m_2(t_2 - t_{\text{к}}) - m_1(t_1 - t_{\text{к}})t_2} = -10\,^\circ\text{C}.$$

Поделив друг на друга первое (или второе) и третье выражения, использовав значение t_0, мы получим уравнение из которого можно найти температуру третьей кружки:

$$t_3\left(\frac{m_3}{m_2(t_2 - t_{\text{к}})} - \frac{1}{t_2 - t_0}\right) = \frac{m_3}{m_2(t_2 - t_{\text{к}})}t_{\text{к}} - \frac{t_0}{t_2 - t_0}, \quad \Longrightarrow \quad t_3 \approx 82{,}6\,^\circ\text{C}.$$

9.4. На стержень действуют сила тяжести, сила трения, сила реакции пола (последние две можно назвать полной силой реакции пола) и сила реакции ступеньки (см. рис.). При равновесии векторная сумма всех сил равна нулю, или в проекциях:



$$\begin{cases} N_2 \cos\alpha = F_{\text{тр}}, \\ N_2 \sin\alpha + N_1 = mg. \end{cases}$$

При минимальном коэффициенте трения (стержень находится на грани соскальзывания)

$$F_{\text{тр}} = \mu N_1.$$

Подставим силу трения в первое уравнение системы, получим:

$$N_2 \cos\alpha = \mu N_1.$$

По условию: $\cos\alpha = \sin\alpha = \sin 45^\circ \approx 0{,}707$. Кроме того, при равновесии должны быть уравновешены моменты сил. Относительно, например, нижнего конца стержня получим:

$$N_2 \cdot h\sqrt{2} = mg\frac{L\cos\alpha}{2}, \quad \Longrightarrow \quad N_2 = \frac{mgL}{4h}.$$

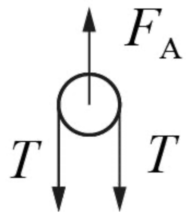
Зная N_2, можно найти N_1 из второго уравнения системы:

$$N_1 = mg\left(1 - \frac{0{,}707L}{4h}\right).$$

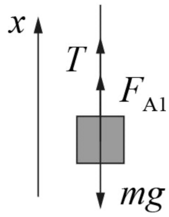
Тогда коэффициент трения равен

$$\mu = \frac{N_2\cos\alpha}{N_1} = \frac{0{,}707L}{4h - 0{,}707L} \approx 0{,}39.$$

9.5. Расставим силы действующие на подвижный блок (см. рис.). Так как масса у блока пренебрежимо мала, то сумма сил, в независимости от ускорения, равна нулю. А значит, постоянство силы Архимеда приводит к постоянной силе натяжения нитей.



Расставим силы действующие на брусок (см. рис.). Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на ось x:



$$ma_x = T - mg + F_{A1}, \quad \Longrightarrow \quad \rho_т V a_x = T - gV\left(\rho_т - \rho\right), \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a_x = \frac{T}{\rho_т V} - g\frac{\rho_т - \rho}{\rho_т}.$$

Отсюда видно, что с ростом объёма (при постоянной T) проекция ускорения на выбранную ось уменьшается. Значит, условия задачи будут выполнены, только если в первой ситуации ускорение было направлено вверх, а во второй вниз.

Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на ось x для двух случаев:

$$\begin{cases} \rho_т V a = T - gV(\rho_т - \rho), \\ -\rho_т 2Va = T - g2V(\rho_т - \rho). \end{cases}$$

Вычтем одно уравнение из другого, сократим на V, и выразим плотность тела:

$$\rho_т = \rho\frac{g}{g - 3a}.$$

Решения 10 класс

10.1. Пусть ребро основания призмы равно L, тогда центр масс находится на расстоянии $L/(2\sqrt{3})$ от плоскости. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$F - \mu mg = ma.$$

Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, двигающуюся с ускорением a. В этой системе призма неподвижна. Запишем правило моментов относительно ребра соприкасающегося с плоскостью и перпендикулярного движению:

$$\frac{FL\sqrt{3}}{2} - \frac{mgL}{2} - \frac{maL}{2\sqrt{3}} = 0.$$

Итого получаем максимальное ускорение клина при поступательном движении

$$a = \frac{g\sqrt{3}}{2} - \frac{3\mu g}{2} = 6{,}4\ \text{м/с}^2.$$

10.2. Запишем уравнение состояния газа для трёх состояний газа:

$$\begin{cases} P_0V_0 = \nu RT_0, \\ P_2 \cdot 1{,}2V_0 = \nu R \cdot 6T_0, \\ P_3 \cdot 1{,}03V_0 = \nu RT_0, \end{cases}$$

где $P_2 = P_0 + P_{\text{тр}}$, $P_3 = P_0 + \frac{mg}{S} - P_{\text{тр}}$. Отсюда получим

$$P_{\text{тр}} = 4P_0, \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{3{,}97P_0S}{g}.$$

10.3. Скорость тела будет максимальна в момент прохождения телом положения равновесия. Тогда запишем условие равновесия

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kt = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{k} = 16\ \text{с}.$$

Тело остановится когда суммарный импульс переданный внешними силами будет равен нулю

$$mg\sin\alpha dt - \mu mg\cos\alpha dt - ktdt = 0.$$

Проинтегрировав это выражение, либо найдя площадь под графиком $F(t)$, получим

$$ng\sin\alpha t - \mu mg\cos\alpha t - \frac{kt^2}{2} = 0.$$

Откуда находим

$$t = \frac{2mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{k} = 32\ \text{с}.$$

10.4. Минимальное расстояние между шариками будет в момент, когда они будут неподвижны относительно друг друга (т. е. двигаться с одинаковыми скоростями). Запишем ЗСИ

$$nmV - mV = (n+1)mU, \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{n-1}{n+1}V.$$

Запишем ЗСЭ

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{nmV^2}{2} = \frac{(n+1)mU^2}{2} + \frac{kq^2}{L}, \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{(n+1)kq^2}{2nmV^2}.$$

10.5. Пусть тетраэдр $ABCD$. Подключим батарейки вместо рёбер AD и BC. Так что положительные клеммы подключены к точкам D и B. Примем потенциал точки A за нулевой, тогда

$$\varphi_D = \mathscr{E}, \quad \varphi_C = \varphi_1, \quad \varphi_B = \varphi_1 + \mathscr{E}.$$

Найдём токи в цепи:

$$I_{DB} = \frac{\varphi_1}{R}, \quad I_{DC} = \frac{\mathscr{E} - \varphi_1}{R}, \quad I_{CA} = \frac{\varphi_1}{R}, \quad I_{BA} = \frac{\varphi_1 + \mathscr{E}}{R}.$$

Из записанных выше уравнение находим

$$I_{DB} = 0, \quad I_{DC} = \frac{\mathscr{E}}{R}, \quad I_{CA} = 0, \quad I_{BA} = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Ток, протекающий через батарейки, одинаковый и равен $\mathscr{E}/R$.

Решения 11 класс

11.1. При падении снаряда на дно на него действует сила тяжести, направленная вниз и сила Архимеда, направленная вверх. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось имеет вид:

$$ma = mg - F_{\text{арх}}.$$

Откуда получаем ускорение тела:

$$a = g - \frac{F_{\text{арх}}}{m} = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho}\right).$$

Для ответа на второй вопрос необходимо найти давление воды на верхнюю поверхность полуцилиндра. Для этого рассмотрим полуцилиндр до того, как он лёг на дно и учтем, что сила Архимеда, направленная вертикально вверх является результатом действия двух сил: силы действующей на верхнюю поверхность полуцилиндра и силы действующей на дно:

$$F_{\text{арх}} = F_{\text{дно}} - F_x,$$

где $F_{\text{дно}}$ — сила давления воды на дно полуцилиндра, направленная с низу вверх, F_x — сила на верхнюю поверхность полуцилиндра. Откуда получаем, что:

$$F_x == \rho_{\text{в}} gV - 2\rho_{\text{в}} gH^2R.$$

Когда полуцилиндр находится на дне, то т. к. вода под него не подтекает, то сила $F_{\text{дно}}$ на него больше не действует, тогда как сила F_x продолжает действовать на полуцилиндр. Таким образом, суммарная сила, действующая на полуцилиндр, направленная вдоль вертикали будет равна:

$$F = mg + \rho_{\text{в}} g\left(V - 2H^2\right).$$

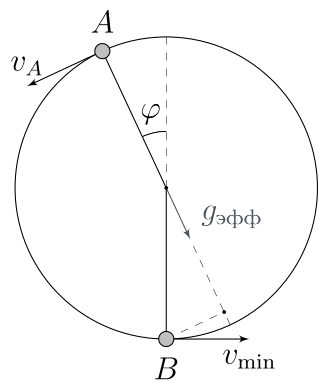
Именно такую силу нужно приложить к полуцилиндру, чтобы оторвать его от дна сосуда. **Замечание.** Можно заметить, что второе слагаемое в силе F равно силе тяжести воды, которая расположена точно над полуцилиндром.

11.2. Ускорение шарика

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{l}\right)^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}.$$

Заметим, что

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E}.$$



Второе слагаемое равно 10 м/с^2, откуда следует, что эффективное ускорение направлено под углом 45° и равно примерно 14 м/с^2. Критическая ситуация для силы натяжения будет в точке A (см. рис.). Запишем условие движения по окружности в этой точке, если сила натяжения нити именно в ней обратилась в нуль:

$$\frac{mv_A^2}{l} = mg_{\text{эфф.}}, \quad \Longrightarrow \quad v_A = \sqrt{g_{\text{эфф}} l} = 2{,}8 \text{ м/с}.$$

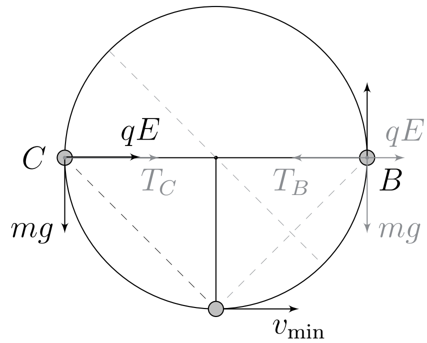
Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg_{\text{эфф}}l\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Откуда получаем:

$$v_{\min} = \sqrt{gl\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)} = 5{,}9 \text{ м/с}.$$

Для того, чтобы найти силы натяжения нити когда она горизонтальна найдём скорости шарика в точках B и C.



Т. к. точка B и стартовая точка находятся на одном перпендикуляре к $g_{\text{эфф}}$, то скорости в этих точках совпадают. Тогда по второму закону Ньютона получаем:

$$T_B - qE = \frac{mv_B^2}{l}, \quad \Longrightarrow \quad T_B = 26 \text{ мН}.$$

Скорость в точке C найдем из ЗСЭ

$$\frac{mv_C^2}{2} = \frac{4mv_{\min}^2}{2} - mg_{\text{эфф}}l\sqrt{2}.$$

Для силы натяжения в точке C получаем:

$$\frac{mv_C^2}{l} = T_c + qE, \quad \Longrightarrow \quad T_c = 5{,}8 \text{ мН}.$$

11.3. Поскольку вначале заряд на конденсаторе максимален, то в первый раз он занулится через четверть периода колебаний:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}.$$

Максимальный ток равен

$$I_{\max} = \omega U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{LC}}.$$

Магнитный поток соответственно равен

$$\Phi = LI_{\max} = U_0\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

По закону сохранения магнитного потока

$$B_1S_1 = B_2S_2,$$

откуда находим

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

11.4. Пусть нижний торец кузнечика изначально находился на высоте H. Так как при ударе о землю энергия не теряется, то можно записать закон сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{2k(l_0 - x)^2}{2},$$

где v — скорость опоры, x — растяжение пружины. Тогда минимальная высота, при которой опора ударится о землю равна:

$$H_0 = \frac{k(L-l_0)^2}{mg}.$$

Из закона сохранения энергии, записанного выше, получаем, что максимальная деформация пружины равна:

$$\Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{mgH}{k}}.$$

После контакта с землей опоры совершают гармонические колебания. Кузнечик оторвётся от земли, когда пружина начнет сжиматься. Это произойдет спустя половину периода колебаний после контакта. Тогда искомое время равно:

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Запишем уравнения движения кузнечика:

$$m\ddot{x} = -2kx + F_0\cos\omega t.$$

Тогда если подставить $x = A\cos\omega t$ в это уравнение, то получаем:

$$A = \frac{F_0}{2k - m\omega^2}.$$

Если $\omega = \sqrt{k/m}$, то $A = F_0/l$. Для $\omega = 1{,}4\sqrt{k/m}$, получаем $A = 25F_0/k$.

11.5. Пусть a и b — расстояния от предмета и изображения до линзы. Тогда поперечное увеличение тонкой собирающей линзы $\Gamma = b/a$, откуда $b = a\Gamma$. По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{F_1} = \frac{\Gamma+1}{a\Gamma}, \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{F_1(\Gamma+1)}{\Gamma} = 150 \text{ мм}.$$

Пусть c — расстояние от изображения, даваемого первой линзой, до второй линзы, d — расстояние от изображения, даваемого второй линзой, до нее. Тогда вторая линза увеличивает изображение, даваемое первой линзой, в $\Gamma_2 = d/c$ раз. Т. к. первая линза дает изображение, уменьшенное в 2 раза, то по условию необходимо, чтобы вторая линза создавала увеличение в 4 раза, т. е. $\Gamma_2 = 4$. Заметим, что $c = 100 - b = 100 - a\Gamma = 25$ мм. Тогда $d = c\Gamma_2$ и по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \quad \Longrightarrow \quad F_2 = \frac{c\Gamma_2}{1+\Gamma_2} = 20 \text{ мм}.$$

При соединении линз вплотную их оптические силы складываются:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Оптическое увеличение такой системы равно $\Gamma_3 = y/x$, где x — расстояние от объекта до линз, y — расстояние от изображения до линз. Пусть скорость предмета v, тогда скорость изображения $u = v\Gamma_3^2$. Применив формулу тонкой линзы, получим окончательно:

$$u = v\left(\frac{F}{x-F}\right)^2 = 7{,}5 \text{ мм/с}.$$

Критерии 8 класс

Задача 1 (10 баллов)

1. Определение средней путевой скорости — 1 балл.
2. Найдена средняя путевая скорость $v_{\text{ср. п.}} = 7$ км/ч — 3 балла.
3. Определение средней скорости — 1 балл.
4. Записано выражение для модуля перемещения $|\vec{s}|$ — 3 балла.
5. Найден модуль вектора средней скорости — 2 балла.

Задача 2 (10 баллов)

1. Записано условие равновесия системы до таяния дробинок — 1 балл.
2. Указано, что сила тяжести системы не изменилась — 1 балл.
3. Указано, что сила реакции со стороны дна увеличилась на величину F — 1 балл.
4. Найдена сила давления дробинок на дно сосуда — 1 балл.
5. Записано условие равновесия системы после таяния дробинок — 2 балла.
6. Записана верная система, из которой можно получить правильный ответ — 2 балла.
7. Найдено изменение уровня жидкости — 2 балла.

Задача 3 (10 баллов)

1. Верно расставлены силы, действующие на блок — 2 балла.
2. Найдена сила натяжения верёвки T — 1 балл.
3. Указано, что сила натяжения нити, привязанной к левому краю балки, равна $2T$ — 1 балл.
4. Верно расставлены силы, действующие на балку — 2 балла.
5. Верно записано уравнение моментов для балки — 2 балла.
6. Найдено расстояние x — 2 балла.

Задача 4 (10 баллов)

1. Указано, что уравнение теплового баланса можно писать сразу для всех объектов — 2 балла.
2. Верно записано уравнение теплового баланса — 4 балла.
3. Найдено m_0 — 4 балла.

Задача 5 (10 баллов)

1. Расставлены токи через все провода — по 1 баллу за каждый ток (всего 6 баллов).

2. Получено $U_0 = 4IR$ — 2 балла.
3. Найдено напряжение на вольтметре U_V — 2 балла.

Критерии 9 класс

Задача 1 (10 баллов)

1. Обосновано наличие значимого сопротивление амперметров — 2 балла.
2. Получены 4 правильных уравнения на закон Ома (или их эквивалент) — по 1 баллу за каждое правильное уравнение (всего 4 балла).
3. Получено соотношение сопротивлений (если нет в явном виде, но в дальнейшим система уравнений правильно решена, то этот пункт засчитывается автоматически) — 2 балла.
4. Получено правильное значение I_3 — 1 балл.
5. Получено правильное значение I_0 — 1 балл.

Задача 2 (10 баллов)

1. Записаны 2 уравнения движения — по 1 баллу за уравнение (всего 2 балла).
2. Записаны 2 уравнения движения — по 1 баллу за уравнение (всего 2 балла).
3. Найдено время падения — 2 балла.
4. Найдена скорость вертолёта (если явно не посчитана, но дальнейшее решение верно, то этот пункт засчитывается автоматически) — 1 балл.
5. Найдено горизонтальное смещение S — 1 балл.
6. Найден угол вхождения (любая его тригонометрическая функция) — 2 балла.

Задача 3 (10 баллов)

1. Записаны 3 уравнения теплового баланса — по 2 балла за каждое (всего 6 баллов).
2. Найдена начальная температура — 1 балл за выражение, 1 балл за численное значение (всего 2 балла).
3. Найдена температура третьей кружки — 1 балл за выражение, 1 балл за численное значение (всего 2 балла).

Задача 4 (10 баллов)

1. Учтены все силы, их точки приложения и направления — по 1 баллу за каждую правильную силу, полная реакция опоры оценивается как N_1 и $F_{\text{тр}}$ вместе (4 балла).
2. Записаны условия равновесия бревна (сумма сил равна нулю на две оси и сумма моментов сил равна нулю) — по 1 баллу за каждое уравнение (всего 3 балла).
3. Написана связь силы трения и коэффициента трения — 1 балл.
4. Решена система уравнений и получен правильный ответ — 2 балла.

Задача 5 (10 баллов)

1. Расставлены все силы действующие на подвижный блок — 1 балл.

2. Сделан вывод о постоянной силе натяжения нитей — 1 балл.
3. Расставлены все, силы действующие на брусок — 1 балл.
4. Сделан вывод о направлениях ускорения в двух ситуациях. Это может быть не авторский метод, а перебор всех вариантов. Они будут исключаться анализом силы натяжения нити: она становится отрицательной — 3 балла.
5. Записаны два закона Ньютона в проекции на вертикальную ось, при правильных направлениях ускорения — 2 балла.
6. Получено правильное выражение для плотности бруска — 2 балла.

Критерии 10 класс

Задача 1 (10 баллов)

1. Найдено расстояние от плоскости до центра масс — 2 балла.
2. Записан 2-й закон Ньютона на горизонтальную ось — 2 балла.
3. Записано правило моментов — 3 балла.
4. Получено правильное выражение для максимального ускорения — 3 балла.

Задача 2 (10 баллов)

1. Записаны уравнения состояния идеального газа — по 1 баллу для каждого состояния (всего 3 балла).
2. Получено выражение для давления P_2 — 2 балла.
3. Получено выражение для давления P_3 — 2 балла.
4. Найдено $P_{\text{тр}}$ — 1 балл.
5. Найдено m — 1 балл.

Задача 3 (10 баллов)

1. Указано, что скорость тела максимальна при прохождении положения равновесия — 1 балл.
2. Записано условие равновесия (сумма сил равна нулю) — 2 балла.
3. Найдено время t — 1 балл.
4. Указано, что тело остановится когда суммарный импульс внешних сил станет равен нулю — 2 балла.
5. Записано равенство нулю импульса внешних сил — 1 балл.
6. Получено верное выражение после интегрирования — 2 балла.
7. Найдено время t — 1 балл.

Задача 4 (10 баллов)

1. Указано, что минимальное расстояние соответствует моменту когда относительная скорость равна нулю — 2 балла.
2. Записан закон сохранения импульса — 1 балл.
3. Получено верное выражение для скорости U — 2 балла.
4. Записан закон сохранения энергии — 3 балла.
5. Получено верное выражение для L — 2 балла.

Задача 5 (10 баллов)

1. Записаны выражения для потенциалов φ_A, φ_D, ε_C, ε_B — по 0,5 балла за каждое (всего 2 балла).

2. Записаны выражения для токов I_{DB}, I_{DC}, I_{CA}, I_{BA} — по 0,75 балла за каждое (всего 3 балла).

3. Получены значения сил токов I_{DB}, I_{DC}, I_{CA}, I_{BA} — по 0,75 балла за каждое (всего 3 балла).

4. Полечены выражения для токов через батарейки — по 1 баллу за каждое (всего 2 балла).

Критерии 11 класс

Задача 1 (10 баллов)

1. Записан 2-й закон Ньютона в проекции на вертикальную ось — 2 балла.
2. Получено верное выражение для ускорения тела a — 2 балла.
3. Записано выражение для силы Архимеда до того как он лёг на дно — 2 балла.
4. Получено выражения для силы на верхнюю поверхность полуцилиндра — 2 балла.
5. Найдена сила F после того как цилиндр лёг на дно — 2 балла.

Задача 2 (10 баллов)

1. Получено верное выражение для ускорения a — 2 балла.
2. Получено верное выражение для эффективного ускорения — 1 балл.
3. Получено верное направление и значение для эффективного ускорения — 1 балл.
4. Найдена скорость в точке A — 1 балл.
5. Записан ЗСЭ для точки A — 1 балл.
6. Найдена минимальная скорость — 1 балл.
7. Найдено значение силы натяжения в точке B — 1 балл.
8. Записан ЗСЭ для точки C — 1 балл.
9. Найдено значение силы натяжения в точке C — 1 балл.

Задача 3 (10 баллов)

1. Найдено время τ — 2 балла.
2. Найден максимальный ток — 2 балла.
3. Найден поток через катушку при максимальном токе — 3 балла.
4. Найдено отношение начального поля к конечному — 3 балла.

Задача 4 (10 баллов)

1. Записан ЗСЭ — 2 балла.
2. Найдено значение минимальной высоты при которой опора ударится о землю — 1 балл.
3. Найдена максимальная деформация пружины — 1 балл.
4. Найдено время отрыва кузнечика t — 2 балла.
5. Записано уравнение движения кузнечика — 2 балла.
6. Найдена зависимость $A(\omega)$ — 1 балл.
7. Получены верные численные значения для A в двух случаях — по 0,5 баллов за каждое (всего 1 балл).

Задача 5 (10 баллов)

1. Записано выражение для поперечного увеличения линзы — 1 балл.
2. Записана формула тонкой линзы — 1 балл.
3. Получено верное значение для расстояния a — 1 балл.
4. Получено верное значение для поперечного увеличения Γ_2 — 1 балл.
5. Получено верное значение для расстояния c — 1 балл.
6. Получено верное значение для фокуса F_2 — 1 балл.
7. Указано, что оптические силы линз складываются — 1 балл.
8. Указано, что скорости относятся в Γ^2 раз — 2 балла.
9. Получено верное значение для скорости u — 1 балл.