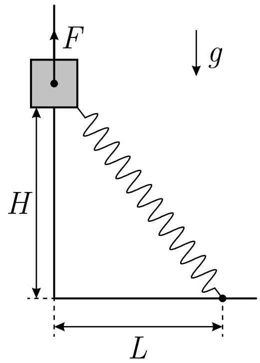
Падающая сила

По гладкой вертикальной направляющей может скользить груз, соединённый с невесомой пружиной с коэффициентом жёсткости k, второй конец которой закреплён на горизонтальной поверхности на расстоянии L от направляющей.
Длина недеформированной пружины равна l_0. Изначально груз удерживают в равновесии силой F так, что пружина не деформирована.
Силу F медленно уменьшают до нуля. При каких значениях массы груза m он может достичь горизонтальной поверхности?

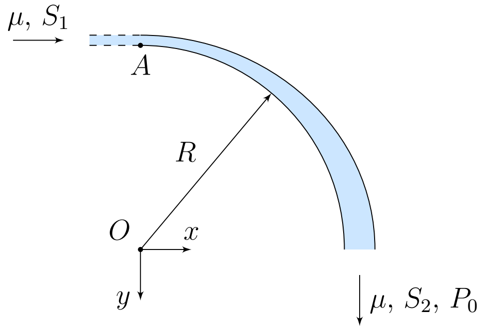


Глюк Плюс

Рассеяние тяжелой частицы на легкой. Экспериментатор Глюк Плюс проводил две серии экспериментов по упругому нерелятивистскому рассеянию тяжелой частицы массы M на покоящейся частице меньшей массы. В первом опыте экспериментатор расположил детектор, измеряющий энергию только тяжелых частиц так, чтобы исследовать центральное рассеяние. В результате он получил два значения энергии: $E_{\min}$ и $E_{\max}$. Во втором опыте, он расположил детектор так, чтобы в него попадали только те тяжелые частицы, которые отклонились от первоначального направления на известный угол φ_0. Какие значения энергии он мог получить во втором эксперименте? Во всех опытах скорость налетающей частицы была одинакова.

Рассеяние легкой частицы на тяжелой. В другом опыте экспериментатор Глюк Плюс исследовал неупругое нецентральное нерелятивистское рассеяние одного тела массы m на другом покоящемся теле массы $M > m$. Он получил, что максимальный угол, на который отклоняется легкая частица равен $\theta_{\max}$. Найдите, на сколько изменилась суммарная внутренняя энергия тел. Скорость тела массы m до столкновения равна v_0.

Трубка с жидкостью



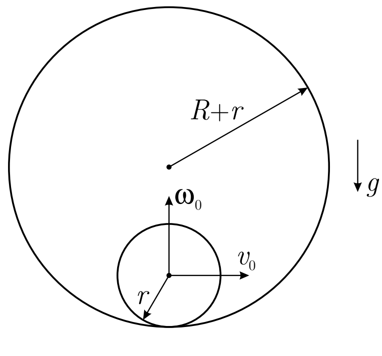
На гладком горизонтальном столе расположена тонкая трубка, представляющая собой четверть окружности радиуса R с переменным поперечным сечением. Площади поперечного сечения концов 1 и 2 трубки равны S_1 и S_2 соответственно. Трубка может без трения вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A. В конец 1 трубки поступает жидкость плотности ρ с постоянным массовым расходом μ. Давление в жидкости в конце 2 равно атмосферному давлению P_0. Жидкость несжимаема, явлениями поверхностного натяжения можно пренебречь. Линейные размеры трубки много меньше радиуса R.

(a) Найдите давление в жидкости P_1 в конце 1 трубки.

(b) Найдите равнодействующую силу F_τ, действующую со стороны трубки на жидкость.

(c) Найдите минимально возможную внешнюю силу $F_{\min}$, которую необходимо прикладывать к трубке для того, чтобы она находилась в равновесии.

Шар в сфере



Внутри закреплённой неподвижной сферы радиуса $R+r$ находится однородный шар радиуса r. Изначально шар находится в нижнем положении.
Шар приводят в движение так, что его угловая скорость верчения (компонента угловой скорости, направленная вдоль вектора нормали к поверхности, которой касается движущееся тело) равна ω_0 и направлена вверх, а скорость центра шара равна v_0. Проскальзывание между сферой и шаром отсутствует. При рассмотрении отдельных компонент вектора скорости центра шара, используйте углы сферической системы координат, т. е. представляйте вектор скорости центра шара в виде:

$$\vec{v}_c = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

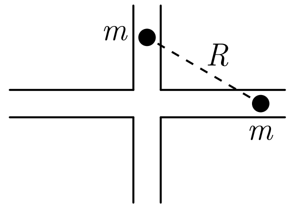
где θ — угол между вертикалью и линией, соединяющей центры сферы и шара, а φ — угол поворота вертикальной плоскости, содержащей центры сферы и шара. Считайте, что $v_0 \ll \sqrt{gR}$.

(a) Найдите зависимость модуля скорости центра шара от угла θ.

(b) Найдите максимальное значение угла $\theta_{\max}$ в процессе движения.

(c) Найдите время τ, через которое впервые достигается значение $\theta_{\max}$.

Déjà vu



Небольшие частицы 1 и 2 с одинаковыми массами m движутся без трения по пересекающимся под прямым углом узким прямым каналам, расположенным в горизонтальной плоскости. В процессе всего движения частицы не могут покидать свой канал.

Часть 1. Всерос. Оказалось, что в процессе дальнейшего движения расстояние R между частицами остаётся неизменным.

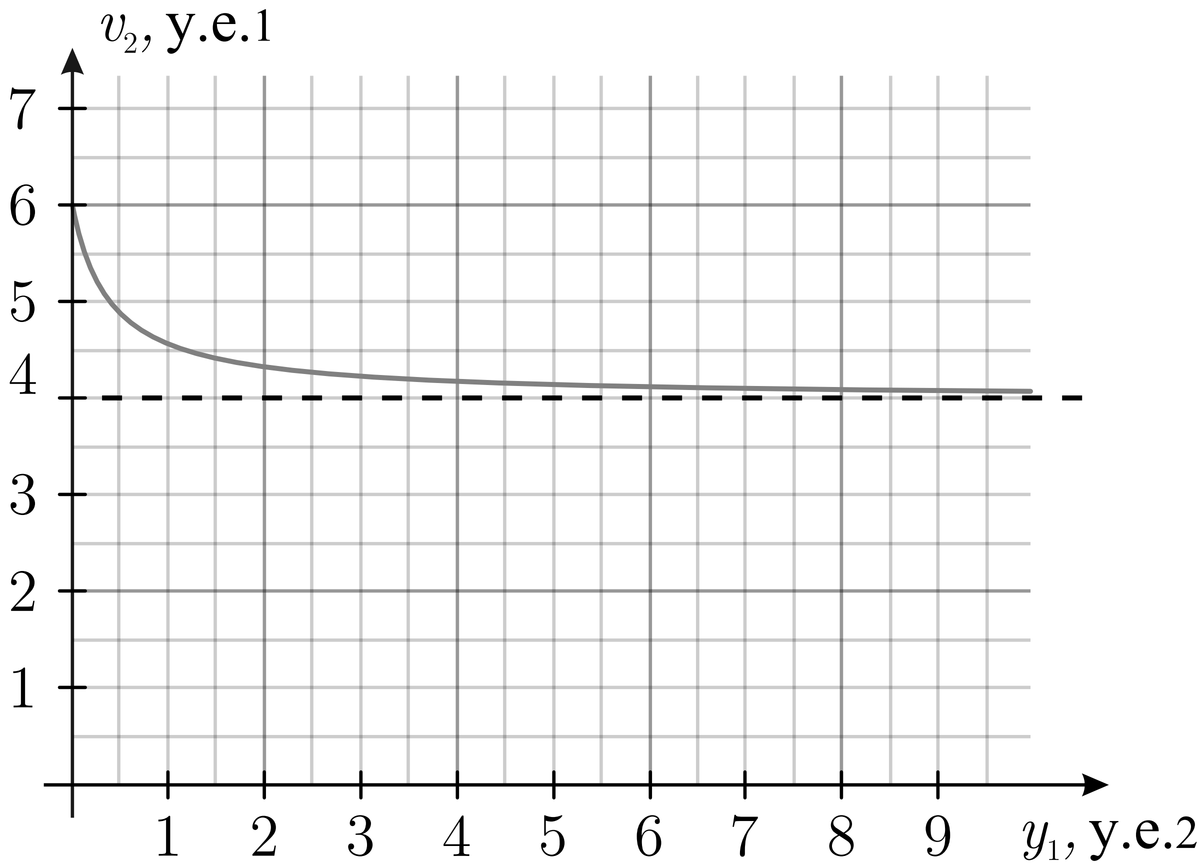
(a) Найдите суммарную кинетическую энергию частиц.

Часть 2. Всерос+. Введём в точке пересечения каналов координатные оси x и y, направленные вправо и вниз соответственно. Изначально система покоится, координата частицы 1 $y_0 = -R$, а частица 2 находится в начале координат. Частице 2 сообщают неизвестную скорость v_0 вдоль оси x. Через некоторое время частица 1 достигает начала координат. С этого момента начинают измерять зависимость скорости частицы 2 (v_x) от координаты y частицы 1 (y), которая приведена на графике в условных единицах у.е 1 по оси скорости v_x и у.е 2 по оси координаты y. Определите:

(b) Начальную скорость v_0 частицы 2.

(c) величины условных единиц $y.\,e._1$ и $y.\,e._2$.

Все ответы должны быть выражены через Γ (гравитационная постоянная), m и R.



Падающая сила. Решение

Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикальную ось

$$k\Delta l \sin\alpha + F = mg,$$

где Δl — деформация пружины, α — угол между пружиной и горизонталью. Пусть x — высота груза над горизонтальной поверхностью, тогда

$$\Delta l = l_0 - \sqrt{x^2 + L^2}; \quad x = L \operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда получаем

$$\Delta l = l_0 - \frac{L}{\cos\alpha}.$$

Найдем при каком угле α проекция силы, с которой пружина действует на груз, максимальна

$$\frac{d(k\Delta l \sin\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(kl_0 \sin\alpha - kL \operatorname{tg}\alpha) = kl_0 \cos\alpha - kL\frac{1}{\cos^2\alpha} = 0.$$

Следовательно, получаем

$$\cos\alpha = \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Груз сможет достичь горизонтальной поверхности, если сила тяжести больше, чем проекция силы упругости на вертикаль. Тогда

$$m \geqslant \frac{kl_0}{g}\left(1 - \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Глюк плюс. Решение

Рассеяние тяжёлой частицы на легкой. Перейдем из лабораторной системы отсчета (ЛСО) в. систему отсчета центра масс (СЦМ) двух частиц. Скорость центра масс

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{M}{M+m}\vec{v}_0.$$

Скорость тяжелой частицы в этой системе отсчета

$$\vec{v}_1 = \frac{m}{M+m}\vec{v}_0.$$

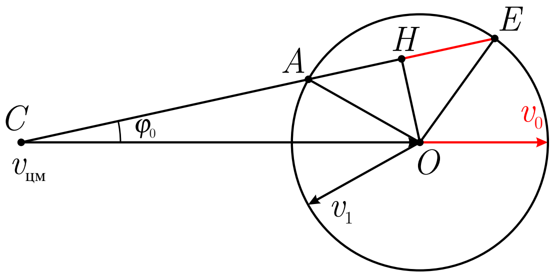
В случае упругого рассеяния, вектор скорости частицы в системе центра масс может изменяться по направлению, но не по модулю. Действительно, рассмотрим частицы массами m_1 и m_2, скорости которых в СЦМ равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно. т.к. в СЦМ импульс всей системы равен нулю, то $m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$ Тогда:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = -\vec{v}_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)$$

Откуда кинетическая энергия системы в СЦМ:

$$E_{CM} = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)^2 = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}.$$

Поскольку $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ прямо пропорциональны $\vec{v}_{\text{отн}}$, то из выражения для кинетической энергии системы следует, что при упругом ударе модули скоростей частиц в СЦМ остаются неизменными.



На рисунке представлены два случая для обоих опытов. После столкновения вектор скорости тяжелой частицы в СЦМ поворачивается. Если начало вектора находится в точке O то конец вектора должен лежать на окружности радиусом v_1.

При центральном ударе, вектор скорости тяжелой частицы может быть равен или v_0 или $(v_0 - 2v_1)$. Первый случай отвечает регистрации частицы с энергией $E_{\max}$, второй — регистрации частиц с энергией $E_{\min}$.

Если детектор настроен на регистрацию частиц в направлении φ_0, то вектор скорости тяжелой частицы в ЛСО может быть или $\overrightarrow{CA}$, или $\overrightarrow{CE}$.

Из треугольников CHO (HO — перпендикуляр, проведенный из центра окружности O на прямую CE) и HOE получаем, что:

$$CH = (v_0 - v_1)\cos\varphi_0 = \frac{\sqrt{E_{min}}+\sqrt{E_{max}}}{\sqrt{2M}}\cos\varphi_0$$

Из последнего выражения следует, что Глюк мог регистрировать частицы при φ_0, удовлетворяющем условию:

$$\varphi_0 \leq \arcsin \frac{\sqrt{E_{min}} - \sqrt{E_{max}}}{\sqrt{E_{min}} + \sqrt{E_{max}}}$$

Случай равенства отвечает касанию окружности. При этом экспериментатор будет регистировать одно значение энергии.

Откуда получаем, что:

$$E_{1,2} = \frac{\left(\sqrt{E_{\min}} + \sqrt{E_{\max}}\right)^2}{4} \left(\cos\varphi_0 \pm \sqrt{\cos^2\varphi_0 - 4\frac{\sqrt{E_{\max}E_{\min}}}{(\sqrt{E_{\max}} + \sqrt{E_{\min}})^2}} \right)^2$$

Рассеяние легкой частицы на тяжелой. В СЦМ кинетическая энергия системы до столкновения равна

$$K_0 = \frac{\mu v_0^2}{2},$$

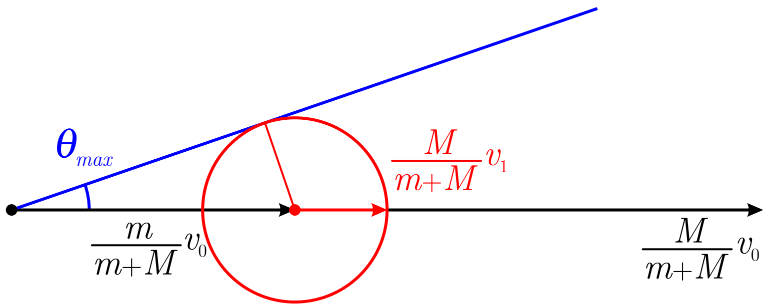
где v_0 — скорость легкой частицы до столкновения в ЛСО, а $\mu = \dfrac{Mm}{m+M}$ – приведенная масса системы.

Обозначим v_1 относительную скорость частиц после столкновения. Тогда кинетическая энергия системы после столкновения в СЦМ

$$K_1 = \frac{\mu v_1^2}{2},$$

Изменение кинетической энергии

$$\Delta E = \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{\mu v_1^2}{2}.$$



На рисунке показан случай рассеяния на максимальный угол легкой частицы. Из него следует, что случай рассеяния на максимальный угол в ЛСО соответсвтует касанию окружности. Откуда получаем, что

$$\sin^2\theta_{\max} = \frac{M^2}{m^2}\frac{v_1^2}{v_0^2}$$

Следовательно потери кинетической энергии

$$\frac{\mu}{2}v_0^2\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\sin^2\theta_{\max}\right).$$

Трубка с жидкостью. Решение

(a) Воспользуемся уравнением Бернулли. Поскольку стол горизонтальный:

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_0}{\rho}$$

откуда:

$$P_1=P_0+\frac{\mu^2}{2\rho}\left(\frac{1}{S_2^2}-\frac{1}{S_1^2}\right)$$

(b) Рассмотрим жидкость, находящуюся в данный момент внутри трубки. Введём оси x и y, направленные вдоль векторов скоростей жидкости в концах 1 и 2 трубки соответственно. Поскольку течение жидкости стационарное, для компонент импульса p_x и p_y выделенной жидкости производные по времени в данный момент равны

$$\frac{dp_x}{dt}=-\mu v_1;\qquad \frac{dp_y}{dt}=\mu v_2.$$

Эти же величины можно найти из теоремы о движении центра масс (импульсная форма). При этом важно не забыть учесть силы давления, действующие на выделенную жидкость,

$$\frac{dp_x}{dt}=P_1S_1+F_{\text{т}x};\qquad \frac{dp_y}{dt}=-P_0S_2+F_{\text{т}y}.$$

Откуда получаем

$$F_{\text{т}x}=-\left(P_0S_1+\frac{\mu^2}{2\rho S_1}\left(1+\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\right);\qquad F_{\text{т}y}=P_0S_2+\frac{\mu^2}{\rho S_2}.$$

(c) Запишем закон изменения момента импульса для системы, состоящей из выделенной в пункте **(a)** жидкости, а таже трубки относительно оси вращения трубки

$$\frac{dL}{dt}=\mu v_2R.$$

Изменение момента импульса жидкости создаётся моментом сил давлений, действующих на неё и трубку, а также моментом внешней силы. Тогда

$$\frac{dL}{dt}=M_{\text{внеш}}-P_0S_2R+M_{\text{атм}},$$

где $M_{\text{атм}}$ - момент сил атмосферного давления, действующих на трубку.

Рассмотрим пустую трубку с закрытыми концами, расположенную в атмосфере. Из условия равенства нулю моментов сил атмосферного давления, действующих на трубку, относительно её конца 1, получим

$$M_{\text{атм}}-P_0S_2R=0.$$

Последнее верно, поскольку трубка тонкая, и моментом сил давления, действующих на её конец 1, можно пренебречь. Тогда для момента внешней силы F получим

$$M_F=\mu v_2R=Fl.$$

Максимальное плечо l силы F достигается, если прикладывать силу к концу 2 перпендикулярно линии, соединяющей его с концом 1, откуда

$$F_{\min}=\frac{M_F}{\sqrt{2}R}=\frac{\mu^2}{\sqrt{2}\rho S_2}.$$

Шар в сфере. Решение

Пусть масса шара равна m, а силы нормальной реакции и трения, действующие на шар $\vec{N}$ и $\vec{F}$ соответственно. По теореме о движении центра масс шара

$$m\dot{\vec{v}}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

Момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр равен $I = \dfrac{2mr^2}{5}$. Поскольку шар — абсолютно симметричная фигура, вектор его момента импульса относительно центра масс равен $\vec{L} = I\vec{\omega}$, где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости шара.

Проведём радиус-вектор $\vec{r}$ из центра шара в точку его касания со сферой. Из уравнения динамики вращательного движения шара относительно центра масс, учитывая, что $\vec{F} \perp \vec{r}$, имеем

$$I\dot{\vec{\omega}} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \frac{I}{R^2}\left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right].$$

Поскольку шар не проскальзывает по сфере

$$\vec{v}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}] = 0.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени

$$\dot{\vec{v}}_C + \left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\right] = 0.$$

Заметим, что $\dot{\vec{r}} = \dfrac{r}{R}\vec{v}_C$. Тогда

$$\dot{\vec{v}}_C + \left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right] + \frac{r}{R}\left[\vec{\omega} \times \vec{v}_C\right] = 0.$$

Представим слагаемое $\left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right]$ последнего выражения следующим образом

$$\left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right] = \frac{\vec{F}r^2}{I} = \frac{mr^2}{I}\left(\dot{\vec{v}}_C - \vec{g} - \frac{\vec{N}}{m}\right).$$

Комбинируя последние два выражения, получим ускорение центра масс шара

$$\dot{\vec{v}}_C = \frac{\vec{g} + \dfrac{\vec{N}}{m} - \dfrac{I}{mr^2}\dfrac{r}{R}\left[\vec{\omega} \times \vec{v}_C\right]}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}.$$

Подставляя выражение для момента инерции I

$$\dot{\vec{v}}_C = \frac{5}{7}\left(\vec{g} + \frac{\vec{N}}{m}\right) - \frac{2r}{7R}\left[\vec{\omega} \times \vec{v}_C\right].$$

Умножая $\dot{\vec{v}}_C$ скалярно на $\vec{v}_C$ получим

$$\dot{\vec{v}}_C \cdot \vec{v}_C = \frac{5\vec{g} \cdot \vec{v}_C}{7}.$$

Откуда после интегрирования получим

$$\frac{v_C^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{5gR(1-\cos\theta)}{7}.$$

и окончательно

$$v_C = \sqrt{v_0^2 - \frac{10gR(1-\cos\theta)}{7}}.$$

Поскольку $v_0 \ll \sqrt{gR}$, угол $\theta \ll 1$ в любой точке траектории шара.

Угловая скорость верчения шара $\vec{\omega}_{\text{в}}$ остаётся постоянной. Это можно показать прямой подстановкой выражения для скорости центра шара в закон сохранения энергии. По теореме Кёнига

$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Разложим вектор угловой скорости шара на две компоненты

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\text{в}} + \vec{\omega}_{\parallel}.$$

Значение компоненты $\omega_{\parallel}$ легко понять

$$v_C = \omega_{\parallel} r.$$

Тогда выражение для кинетической энергии шара через v_C и $\omega_{\text{в}}$ следующее

$$W_k = \frac{7mv_C^2}{10} + \frac{mr^2\omega_{\text{в}}^2}{5}.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{7mv_0^2}{10} + \frac{m\omega_0^2}{5} = \frac{7mv_C^2}{10} + \frac{mr^2\omega_{\text{в}}^2}{5} + mgR(1-\cos\theta) = \frac{7mv_0^2}{10} + \frac{mr^2\omega_{\text{в}}^2}{5}.$$

Откуда

$$\omega_{\text{в}} = \omega_0 = \text{const}.$$

Найдём производную проекции удельного момента импульса центра масс шара относительно центра сферы на вертикальную ось z. Она создаётся только последним слагаемым в уравнении для ускорения центра шара. При записи уравнений учтём, что радиус-вектор, проведённый из центра сферы в центр шара, равен $\vec{R} = \frac{R}{r}\vec{r}$. Тогда

$$\frac{dL_z}{dt} = \left[\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_C\right]_z = -\frac{2}{7}\left[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{v}_C]\right]_z = -\frac{2}{7}\left(\vec{\omega}\,(\vec{r}\cdot\vec{v}_C) - \vec{v}_C(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right)_z.$$

Тогда, поскольку $\vec{r}\cdot\vec{v}_C = 0$ и $\vec{r}\cdot\vec{\omega} = -\omega_0 r$, получим

$$\frac{dL_z}{dt} = -\frac{2\omega_0 r v_{C_z}}{7}.$$

Откуда после интегрирования

$$L_z = -\frac{2\omega_0 r R(1-\cos\theta)}{7}.$$

С другой стороны

$$L_z = R^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\dot{\varphi}(\theta) = -\frac{2\omega_0 r}{7R(1+\cos\theta)}.$$

Далее, квадрат скорости центра шара представим в следующем виде

$$v_C^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2.$$

И, комбинируя с результатом для $\dot{\varphi}$ подставим в выражение для скорости шара, полученное в пункте 1

$$R^2\dot{\theta}^2 + \frac{4\omega_0^2 r^2(1-\cos\theta)}{49(1+\cos\theta)} = v_0^2 - \frac{10gR(1-\cos\theta)}{7}.$$

В момент максимального удаления $\dot{\theta} = 0$. Далее, уравнение можно решить приближённо, раскладывая $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$. Тогда получим

$$\theta_{\max} = \frac{v_0}{\sqrt{\dfrac{\omega_0^2 r^2}{49} + \dfrac{5gR}{7}}}.$$

Однако, уравнение решается и точно, как квадратное относительно $\cos\theta_{max}$. Точный ответ:

$$\theta_{\max} = \arccos\frac{-\left(\dfrac{4\omega_0^2 r^2}{49} + v_0^2\right) + \sqrt{\left(\dfrac{4\omega_0^2 r^2}{49} + v_0^2\right)^2 + 4\cdot\dfrac{10gR}{7}\left(\dfrac{4\omega_0^2 r^2}{49} + \dfrac{10gR}{7} - v_0^2\right)}}{2\cdot\dfrac{10gR}{7}}.$$

Рассматривать отклонение как малое придётся в любом случае

$$R^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{\omega_0^2 r^2}{49} + \frac{5gR}{7}\right)\theta^2 = v_0^2.$$

Это уравнение малых колебаний с циклической частотой Ω, равной

$$\Omega = \sqrt{\frac{\omega_0^2 r^2}{49R^2} + \frac{5g}{7R}}.$$

Масксимальное отклонение достигается через четверть периода, откуда

$$\tau = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{\dfrac{\omega_0^2 r^2}{49R^2} + \dfrac{5g}{7R}}}.$$

В общем виде время, к сожалению, найти невозможно. Максимум, к чему мы можем прийти — выписать интеграл для времени.

Déjà vu. Решение

Пусть r — расстояние между частицами, а $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — их радиус векторы относительно точки пересечения каналов.. Ускорения частиц:

$$\vec{a}_1 = -\frac{Gm\vec{r}_1}{r^3}; \quad \vec{a}_2 = -\frac{Gm\vec{r}_2}{r^3}.$$

Тогда ускорение частицы 1 относительно частицы 2

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = -\frac{Gm(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{r^3} = -\frac{Gm\vec{r}_{\text{отн}}}{r^3}.$$

Таким образом, задачу об относительном движении частиц можно рассматривать как задачу о движении частицы 1 в гравитационном поле неподвижной частицы 2.

Рассмотрим уравнение движения

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{e}_r.$$

Это движение в центральном поле, поэтому удельный момент импульса сохраняется:

$$\vec{L} = r^2\vec{\omega} = \text{const}.$$

Умножим векторно $\vec{a}$ и $\vec{L}$

$$\left[\vec{a} \times \vec{L}\right] = -Gm\left[\vec{e}_r \times \vec{\omega}\right] = Gm\frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

Интегрируя по времени, получим

$$\left[\vec{v} \times \vec{L}\right] = Gm\vec{e}_r + \vec{C}.$$

Векторы $\vec{v}$ и $\vec{L}$ взаимно перпендикулярны. Тогда после повторного векторного умножения на $\vec{L}$ получим

$$\left[\vec{L} \times \left[\vec{v} \times \vec{L}\right]\right] = \vec{v}L^2 = Gm\left[\vec{L} \times \vec{e}_r\right] + \left[\vec{L} \times \vec{C}\right].$$

Или же (см. орты цилиндрической системы координат)

$$\vec{v} = \frac{Gm}{L}\vec{e}_\varphi + \vec{C}_0.$$

Таким образом, годограф вектора скорости при данном движении является окружностью с началом отсчёта, находящимся на расстоянии C_0 от её центра. Поймём, каков смысл параметра C_0.

Пусть φ — угол между векторами $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{C}_0$. Найдём удельный момент импульса частицы

$$L = rv_\perp = r\left(\frac{Gm}{L} + C_0\cos\varphi\right).$$

Откуда

$$r = \frac{L^2}{Gm\left(1+\dfrac{C_0 L}{Gm}\cos\varphi\right)} = \frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Таким образом, начало отсчёта вектора скорости находится на расстоянии $C_0 = eR_0$ от центра окружности, где $R_0 = \dfrac{Gm}{L}$ —- её радиус, а e — эксцентриситет орбиты. Перейдем к решению задачи (пожалуй пора(:)

(a) Относительное движение происходит по окружности радиуса R, поэтому из уравнения движения находим

$$\frac{v_{\text{отн}}^2}{R} = \frac{Gm}{R^2} \Rightarrow v_{\text{отн}}^2 = \frac{Gm}{R}.$$

Поскольку $\vec{v_1} \perp \vec{v}_2$, для квадрата относительной скорости получим

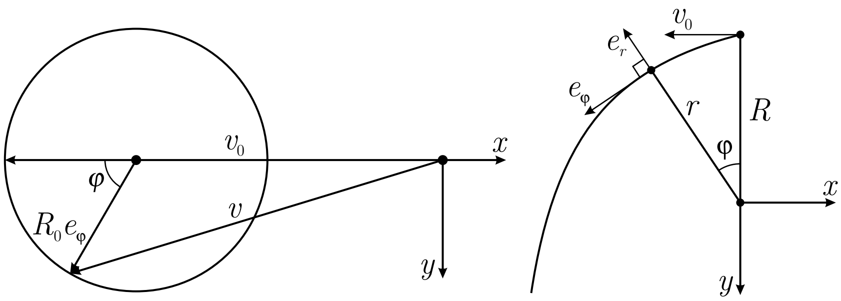
$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Тогда кинетическая энергия системы равна

$$\frac{m(v_1^2+v_2^2)}{2} = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} = \frac{Gm^2}{2R}.$$

(b) Относительное движение частиц во второй части задачи происходит по некоторому коническому сечению. Данный в условии задачи график можно интерпретировать как зивисимость $-(\vec{v}_{\text{отн}})_x(y)$.

На графике v_2 асимптотически стремится к значению 4у.е.1. Это возможно, если относительное движение происходит по гиперболической орбите.



Найдём вектор относительной скорости в произвольном положении. Соответствующий годограф вектора скорости приведён на рисунке. Поскольку удельный момент импульса $L = Rv_0$, радиус окружности годографа вектора скорости R_0 равен

$$R_0 = \frac{Gm}{Rv_0}.$$

С другой стороны, начальную скорость v_0 можно связать с радиусом окружности R_0 и эцсентриситетом орбиты

$$v_0 = R_0(1+e).$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{Gm(1+e)}{R}}.$$

Для нахождения эксцентриситета воспользуемся графиком, приведённым в условии. Выражения для $v_2(0)$ и $v_2(\infty)$ следующие

$$v_2(0) = R_0 e \qquad v_2(\infty) = R_0 \frac{e^2-1}{e}.$$

Последнее соотношение верно, поскольку на бесконечности вектор скорости направлен вдоль вектора $\vec{e}_r$, т.е. по касательной к окружности.

Из отношения $\dfrac{v_2(\infty)}{v_2(0)}$ найдём эсцентриситет

$$\frac{v_2(\infty)}{v_2(0)} = \frac{2}{3} = \frac{e^2-1}{e^2} \Rightarrow e = \sqrt{3}.$$

Тогда для v_0 получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{Gm(1+\sqrt{3})}{R}}.$$

(c) Определим у.е.1.

$$v_2(0) = 6\text{у.е.}1 = R_0 e \quad \Longrightarrow \quad \text{у.е.}1 = \sqrt{\frac{Gm(\sqrt{3}-1)}{24}}.$$

Для определения у.е.2 проведём касательную к графику в точке с коодинатой $y = 0$

$$\frac{dv_2(0)}{dy} = -(5 \pm 1)\frac{y.e._1}{y.e._2}.$$

Представим производную в следующем виде

$$\frac{dv_2}{dy} = \frac{dv_2}{dt}\frac{dt}{dy} = \frac{a_2}{v_1}.$$

В рассматриваемой точке

$$v_1 = R_0.$$

Из уравнения гиперболы

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

получим:

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = p = R(1+e).$$

Тогда

$$a_2 = -\frac{Gm}{R^2(1+e)^2}.$$

Для производной имеем:

$$\frac{dv_2}{dy} = -\frac{v_0}{R(1+e)^2} = -\sqrt{\frac{GM}{R^3(1+e)^3}}.$$

откуда:

$$y.e._2 = (4,0 \pm 0,8)R.$$

И шарик вертится непросто...