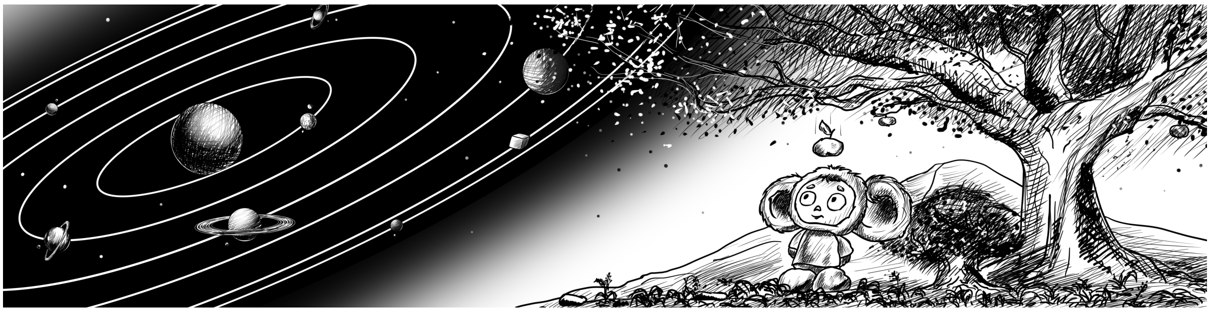
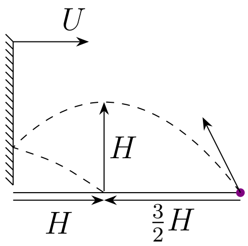


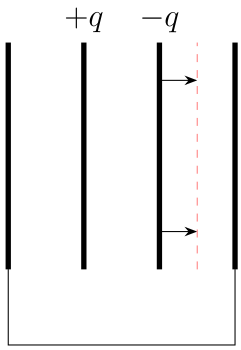
Тренировочная олимпиада 3

Задача 1. *(9-11)* Теннисный мячик бросили под некоторым углом с горизонтальной плоскости со скоростью $v = 20$ м/с. В процессе полета мячик ударяется о массивную стену, движущуюся с постоянной скоростью U. Траектория движения и ее параметры изображены на рисунке.



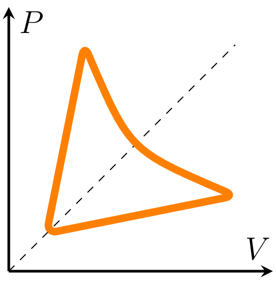
1. Под каким углом бросили мячик?
2. Какова скорость стенки?

Задача 2. *(10-11)* Четыре одинаковые незаряженные пластины площадью S расположили на равном расстоянии d друг от друга. Две центральные зарядили разноименными зарядами q и $-q$, а крайние замкнули накоротко.



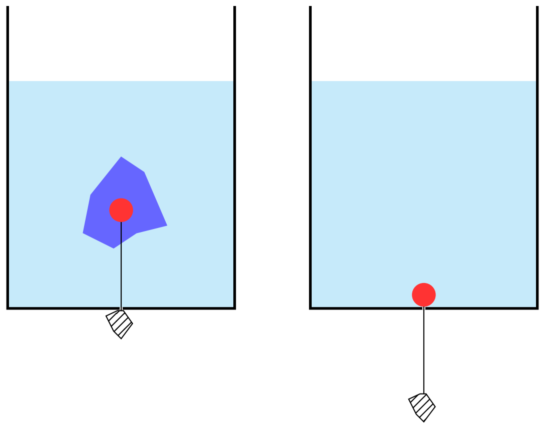
1. Найдите напряжение между центральными пластинами.
2. Какую работу необходимо совершить, чтобы одну из центральных пластин расположить на расстоянии d от центра конструкции?

Задача 3. *(10-11)* Симметричный цикл состоит из изотермы и процессов, графики которых являются прямыми линиями. В цикле участвует 1 моль гелия. Температура на изотерме 1200 K, а работа, совершенная газом на изотерме, равна 10955 Дж. Изменение внутренней энергии при нагревании газа в 33/7 раза больше работы, совершенной газом при нагревании. Найдите:



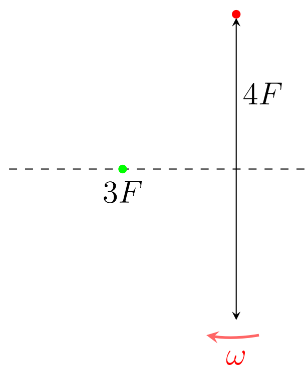
1. Во сколько раз уменьшилось давление на изотерме?
2. Минимальную температуру газа в цикле;
3. Работу, совершенную газом при охлаждении;
4. КПД цикла.

Задача 4. *(7-11)* В цилиндрический сосуд радиусом 5 см налита вода. В воду поместили красный шарик, вмороженный в лед. К шарику на нерастяжимой тяжелой нити прикреплен камушек. В начальном положении камушек давит на сосуд с силой 7 Н. Когда лед растаял, шарик начал давить на дно сосуда с силой 3 Н. На сколько изменился уровень воды в сосуде?



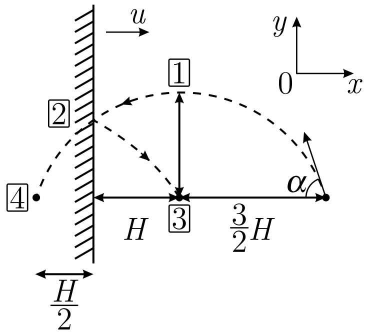
Задача 5. *(9-11)* Источник света расположен на расстоянии $3F$ от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Расстояние от оптического центра линзы до ее края $4F$. Фокусное расстояние линзы равно F.

1. Найдите расстояние между источником и его изображением.
2. Линзу начинают вращать вокруг ее края с угловой скоростью ω. Найдите скорость изображения в начальный момент времени.



Решение тренировочной олимпиады III

Решение 1. Запишем зависимость координат x, y и проекции скорости v_y шарика от времени в случае отсутствия стены



$$\begin{cases} y(t) = v_{0y} - \dfrac{gt^2}{2}; \\ x(t) = v_x t; \\ v_y(t) = v_{0y} - gt. \end{cases}$$

Рассмотрим верхнюю точку траектории, у неё координаты $(3H/2, H)$ и $v_y = 0$, тогда

$$\begin{cases} H = y(t_0) = \dfrac{v_{0y}^2}{2g}; \\ \dfrac{3}{2}H = x(t_0) = v_x \dfrac{v_0 y}{g}; \\ t_0 = \dfrac{v_{0y}}{g}. \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_{0y}}{v_x}; \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{v_{0y}}{2v_x}. \end{cases} \implies \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}.$$

После удара о стенку мяч двигается со скоростью по горизонтали: $2u + v_x$ (очевидно, если перейти в СО стенки, там скорость «налёта» шарика по модулю совпадает со скоростью его «отлёта»). Полное время полёта мяча равно $T_{\text{полн}} = 2t_0$, так как стена действует на шарик только горизонтально, то уравнение движения по вертикали никак не меняется и именно оно даёт нам время полного полёта. Пусть время движения до стены равно t_1, тогда от стены до падения $T_0 - t_1$ и справедливы уравнения

$$\begin{cases} v_x t_1 = \dfrac{5H}{2}; \\ (T_0 - t_1)(2u + v_x) = H; \end{cases} \implies \left\{ t_1 = \frac{5H}{2v_x}; \quad \left(T_0 - \frac{5H}{2v_x}\right)(2u + v_x) = H; \right.$$

Из записанных уравнений и равенства $v_x = v\cos\alpha$, получаем

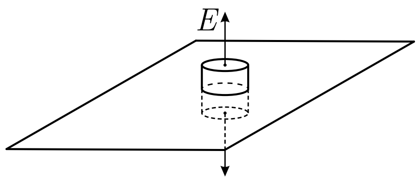
$$u = 6 \text{ м/с}.$$

Можно было рассуждать проще — если стена отсутствует,то за время $T_0 - t_1$ шарик пролетит по горизонтали расстояние $H/2$, при наличии стены он за это же время пролетает расстояние H, откуда

$$\frac{H}{2v_x} = \frac{H}{2u + v_x}; \quad \implies \quad u = \frac{v_x}{2}.$$

Замечание. При решении можно было использовать симметрию параболы.

Решение 2. Поле равномерно заряженной плоскости равно (следствие Теоремы Гаусса для цилиндра)



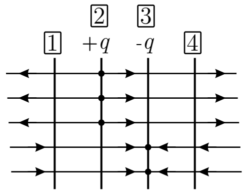
$$E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Пренебрегая краевыми эффектами, можно говорить что поле равномерно заряженной пластины равно

$$E_{\text{пласт}} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

При отсутствии перемычки напряжённость поля между 2 и 3 пластинами по принципу суперпозиции равна

$$E = 2 \cdot \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$



После введения перемычки в систему заряды на 1 и 4 перераспределяются так, чтобы $U_{14} = 0$. Заметим, что заряды пластин 1 и 4 равны по модулю (закон сохранения электрического заряда). Тогда

$$U_{14} = 0 = \frac{q_{14}}{\varepsilon_0 S} \cdot 3d - \frac{q_{23}}{\varepsilon_0 S} d = \frac{d}{\varepsilon_0 S} \left(3q_{14} - q\right).$$

Здесь $q_{23} = q$ — модуль заряда пластин 2 и 3, q_{14} — модуль заряда пластин 1 и 4. Откуда находим

$$q_{14} = \frac{q}{3}.$$

Следовательно, напряжение между 2 и 3 пластиной равно

$$U_{23} = \frac{q_{14} d}{\varepsilon_0 S} + \frac{q_{23} d}{\varepsilon_0 S} = \frac{2}{3} \frac{qd}{\varepsilon_0 S}.$$

Вся работа при перемещении пластины пойдёт на изменение потенциальной энергии системы. Произведём расчёт энергии через объёмную плотность энергии электрического поля

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Тогда начальная энергия системы равна

$$E_{\text{н}} = Sd \left(\frac{q}{3\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2} + Sd \left(\frac{q}{3\varepsilon_0 S} - \frac{q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2} + Sd \left(\frac{q}{3\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Для расчёта конечной энергии необходимо рассчитать новое распределение зарядов

$$U'_{14} = 0 = \frac{q'_{14}}{S\varepsilon_0} 3d - \frac{q}{\varepsilon_0 S} \frac{3d}{2}; \quad \Longrightarrow \quad q'_{14} = \frac{q}{2}.$$

Тогда конечная энергия системы равна

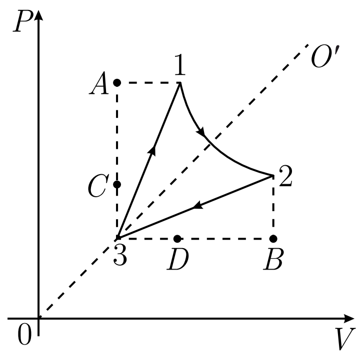
$$E_{\text{к}} = Sd \left(\frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{3}{2} dS \left(\frac{q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2} + S\frac{d}{2} \left(\frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Окончательно находим

$$A = E_{\text{к}} - E_{\text{н}} = \frac{q^2 d}{S\varepsilon_0} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{18} - \frac{2}{9} - \frac{1}{18}\right) = \frac{q^2 d}{24 S\varepsilon_0}.$$

Решение 3. Так как процесс $1-2$ изотермический, то

$$P=\frac{\nu RT}{V}.$$



Вычислим работу газа в процессе $1-2$

$$A_{1-2}=\int\limits_{V_1}^{V_2}PdV=\nu RT\int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Откуда можно найти отношение объёмов в этих точках

$$e^{\frac{A}{\nu RT}}=\frac{V_2}{V_1}=3.$$

Следовательно, отношение давлений равно

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{V_2}{V_1}=3.$$

Теперь определим температуру в точке 3 T_3. Из условия задачи известно, что $\Delta U_{31}=33A_{31}/7$ — из этого условия найдём T_3. Работу находим как площадь под графиком в PV-координатах

$$A_{31}=\frac{P_1+P_3}{2}\cdot(V_1-V_3)=\frac{1}{2}\left(P_1V_1+P_3V_1-P_1V_3-P_3V_3\right).$$

Используем уравнение состояния идеального газа для точек 1 и 3. Тогда имеем следующее равенство

$$\Delta U_{31}=\frac{33}{7}A_{31};\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{3}{2}\nu RT(T_1-T_3)=\frac{33}{7}\cdot\frac{1}{2}\left(\nu R(T_1-T_3)+P_3V_1-P_1V_3\right).$$

Как видно, для того чтобы выразить температуру T_3, необходимо найти связь P_3V_1 и P_1V_3. Надо воспользоваться симметричностью прямых $1-2$ и $2-3$, заметим что в относительных координатах $\frac{P}{P_3}\left(\frac{V}{V_3}\right)$ ось симметрии проходит через начало координат и точку с координатами $(1;1)$ — то есть угловой коэффициент прямой равен 1. Отсюда следует, что, так как $1-3$ и $2-3$ симметричные, отношение давлений равно отношению объёмов

$$\frac{P_1}{P_3}=\frac{V_2}{V_3}=\frac{3V_1}{V_3}.$$

Из уравнения состояния идеального газа для точек 1 и 2 следует, что

$$\frac{P_3V_3}{P_1V_1}=\frac{T_3}{T_1}=\frac{V_3^2}{3V_1^2}=\frac{3P_3^2}{P_1^2};\quad\Longrightarrow\quad P_3=P_1\sqrt{\frac{T_3}{3T_1}}.$$

Теперь можем находить температуру T_3, подставляя найденные значения P_3 и V_3 через P_1 и V_1 соответственно, получим

$$\frac{11}{7}\left(\nu R(T_1-T)3)-2P_1\sqrt{\frac{T_3}{3T_1}}V_1\right)=\nu R(T_1-T_3).$$

Подставляя уравнение состояние идеального газа для точки 1 $P_1V_1 = \nu RT_1$, получим

$$11\nu R\left(T_1 - T_3 - 2\sqrt{\frac{T_3T_1}{3}}\right) = 7\nu R(T_1 - T_3).$$

Это квадратное уравнение относительно T_3, оставим его решению читателю. Конечный ответ

$$T_3 = 100\ \text{К}.$$

Теперь найдём работу газа при охлаждении, то есть в процессе $2-3$. Будем вычислять её через площадь под графиком

$$A_{23} = \frac{P_2 + P_3}{2}\left(V_3 - V_2\right) = \frac{1}{2}\left(P_2V_3 + \nu RT_3 - \nu RT_2 - P_3V_2\right).$$

Рассмотрим точки (V_3, P_1) и (V_2, P_3). По построению они симметричны относительно оси, следовательно принадлежат одной изотерме и $P_1V_3 = P_3V_2$. Это также легко понять, если посмотреть на эти точки в относительных координатах. По той же логике точки (V_3, P_2) и (V_1, P_3) симметричны относительно оси, поэтому $P_2V_3 = P_3V_1$. Тогда

$$A_{23} = \frac{1}{2}\left(\nu R\left(T_3 - T_2\right) + P_3V_1 - P_1V_3\right).$$

Разность $P_3V_1 - P_1V_3$ мы уже находили, она была равна

$$P_3V_1 - P_1V_3 = -2\sqrt{\frac{T_3T_1}{3}}R.$$

Откуда получаем

$$A_{23} = \frac{1}{2}\nu R\left(T_3 - T_1 - 2\sqrt{\frac{T_1T_3}{3}}\right) = -6{,}2\ \text{кДж}.$$

Чтобы вычислить КПД цикла необходимо вычислить величину подведённой теплоты и работу газа за цикл. Тепло подводилось на участках $1-2$ и $3-1$, поэтому

$$Q_{\text{подв}} = Q_{12} + Q_{31} = A_{12} + A_{31} + \Delta U_{31}.$$

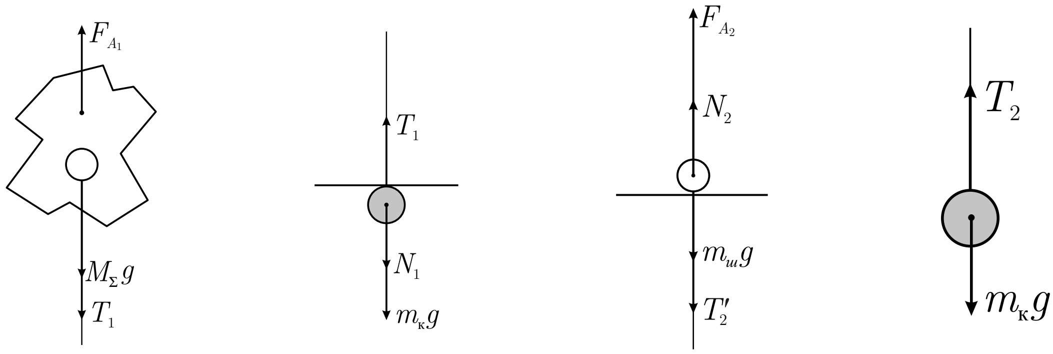
Работа газа за цикл равна сумме работ на всех участках

$$A_{\text{цикл}} = A_{12} + A_{23} + A_{31}.$$

После всех вычислений, находим

$$\eta = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_{\text{подв}}} = 0{,}28.$$

Решение 4. Запишем теорему о движении центра масс в проекции на вертикальную ось для шарика и камушка в начале и конце таяния



$$\begin{cases} F_{\text{А}1} = T_1' + M_{\sum} g; \\ T_1 = N_1 + m_{\text{к}} g. \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{\text{А}2} + N_2 = m_{\text{ш}} g + T_2'; \\ T_2 = m_{\text{к}} g. \end{cases}$$

В обоих случаях разница сил натяжения на концах нити есть сила тяжести действующая на нить, то есть

$$\Delta T = T_1' - T_1 = T_2' - T_2 = m_{\text{к}} g.$$

Тогда

$$\begin{cases} \rho_{\text{в}} g \left(V_{\text{л}} + V_{\text{ш}}\right) = N_1 + m_{\text{к}} g + m_{\text{н}} g + \rho_{\text{л}} g + m_{\text{ж}} g; \\ \rho_{\text{в}} g V_{\text{ш}} + N_2 = m_{\text{ж}} g + m_{\text{к}} g + m_{\text{н}} g. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\rho_{\text{в}} g V_{\text{л}} + m_{\text{ш}} g + m_{\text{к}} g + m_{\text{н}} g - N_2 = N_1 + m_{\text{к}} g + m_{\text{ш}} g + m_{\text{н}} g + \rho_{\text{л}} V_{\text{л}} g.$$

Следовательно

$$\left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}\right) g V_{\text{л}} = N_1 + N_2; \quad \Longrightarrow \quad V_{\text{л}} = \frac{N_1 + N_2}{g\left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}\right)}.$$

Объём воды, который получился после таяния льда, равен

$$V_{\text{в из л}} = \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} V_{\text{л}} = \frac{9}{10} V_{\text{л}}.$$

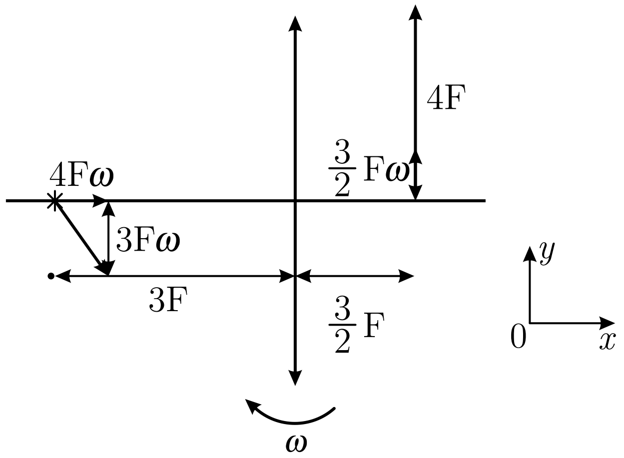
Окончательно

$$\Delta h = \frac{V_{\text{л}} - V_{\text{в из л}}}{\pi r^2} = \frac{N_1 + N_2}{g \pi r^2 \rho_{\text{в}}} = 12{,}7 \text{ см}.$$

Решение 5. Запишем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}; \quad \Longrightarrow \quad b=\frac{3}{2}F.$$

Здесь мы сразу использовали $a = 3F$.



Найдём скорость источника в системе отсчёта линзы (умножая ω на соответствующее расстояние)

$$v_y=-3F\omega; \qquad v_x=4F\omega.$$

Тогда вертикальная проекция скорости изображения

$$v'_y=-\left(\frac{b}{a}\right)v_y=\frac{3}{2}F\omega.$$

Горизонтальная проекция скорости изображения равна

$$v'_x=\left(\frac{b}{a}\right)^2 v_x=\frac{1}{4}F\omega\cdot 4=F\omega.$$

Возвращаемся в лабораторную систему отсчёта, для этого из соответствующих компонент скорости вычитаем ω умноженное на нужное расстояние. Получим

$$\begin{cases} u_y=v'_y-\dfrac{3}{2}F\omega=0;\\ u_x=v'_x-4F\omega=-3F\omega \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_{\sum}=\sqrt{\left(u'_y\right)^2+\left(u'_x\right)^2}=3F\omega.$$

Замечание. Здесь мы воспользовались формулами продольного и поперечного увеличения линзы. Формула для продольной скорости выводится из формулы тонкой линзы (необходимо продифференцировать по времени). Формула для поперечной скорости следует из подобия соответствующих треугольников.