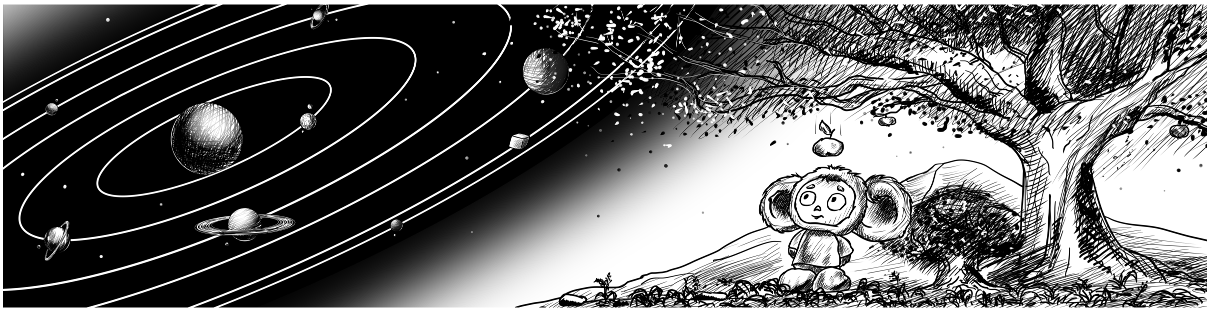
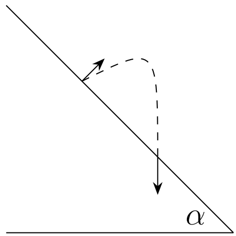


Отделение физики Physolimp

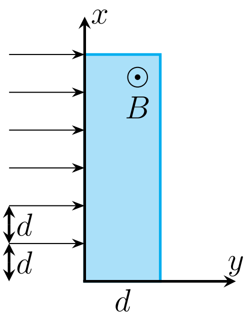
Тренировочная олимпиада 4

Задача 1. *(9-11)* Мячик бросают под углом 2α ($\sin\alpha = 3/5$) к наклонной плоскости. В момент падения мячика на плоскость его скорость вертикальна и равна изначальной $v = 5$ м/с. Найдите время падения, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости мячика. Плоскость наклонена под углом α к горизонту.



Задача 2. *(11)* Поток заряженных частиц массой m и зарядом $q > 0$ влетает перпендикулярно границе в узкую область магнитного поля шириной d. Индукция магнитного поля возрастает с координатой по закону $B = \alpha x$. Скорость частиц $v \gg Bqd/m$.

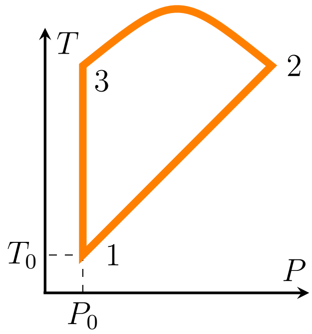
1. На сколько отклонится частица, вошедшая в поле на расстоянии $x = 3d$?
2. В какой точке частицы пересекут ось OY, если расстояния между ними d?



Задача 3. *(10-11)* Над одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, изображенный на рисунке. Цикл состоит из процесса прямо пропорциональной зависимости температуры от давления (1-2), участка параболы (2-3) и изобары (3-1). Минимальная температура газа в цикле 200К. Уравнение параболы

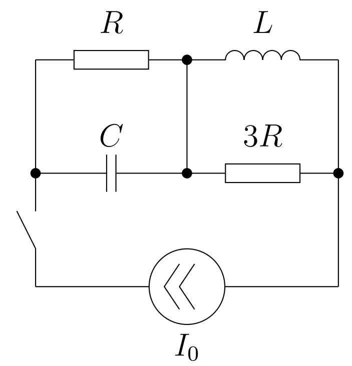
$$T = -\frac{T_0 P^2}{P_0^2} + 5P\frac{T_0}{P_0}.$$

1. Какая максимальная температура газа в цикле?
2. Какую работу газ совершает за цикл?
3. Найдите КПД цикла.



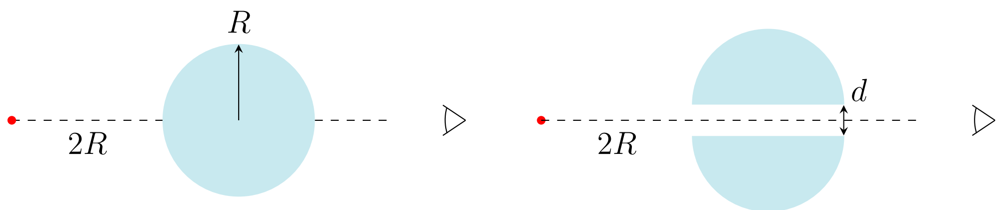
Задача 4. *(11)* К цепи, изображенной на рисунке, подключают источник тока. В начальный момент времени ток в цепи отсутствует, конденсатор разряжен, затем ключ замыкают. Все характеристики элементов цепи даны на рисунке.

1. Какие токи протекали через резисторы в момент замыкания ключа?
2. Какой заряд протечет через резистор сопротивлением 3R за большой промежуток времени?



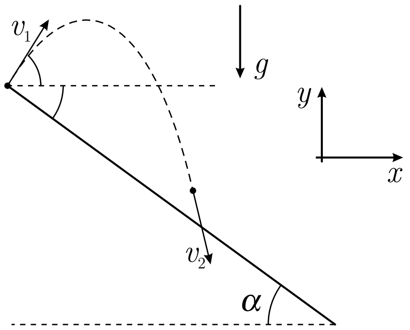
Задача 5. *(9-11)* На расстоянии $2R$ от стеклянного шара радиусом R расположен точечный источник света. Показатель преломления стекла $n = 4/3$. С другой стороны от шара расположен глаз человека.

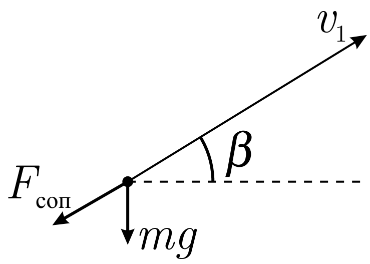
1. На каком расстоянии от центра шара виден источник?
2. Шар разрезали пополам и разнесли половинки на небольшое расстояние d. Найдите расстояние между получившимися изображениями.



Решение тренировочной олимпиады 4

Решение 1. Рассмотрим силы, действующие на тело, в произвольный момент времени





Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось

$$m\frac{dv_y}{dt} = -\gamma v_y - mg.$$

На горизонтальную ось

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x,$$

откуда получаем

$$-\frac{m}{\gamma}dv_x = v_x dt = dx.$$

Интегририруем полученное выражение

$$-\frac{m}{\gamma}(v_{x\text{кон}} - v_{x\text{нач}}) = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = \Delta x,$$

$$\Delta x = \frac{m}{\gamma}v\cos\alpha = \frac{4mv}{5\gamma}.$$

Аналогично для вертикальной проекции получаем

$$mdv_y = -\gamma v_y dt - mgdt,$$

$$m(v_{y\text{кон}} - v_{y\text{нач}}) = -\gamma(y_{\text{кон}} - y_{\text{нач}}) - mg\tau = -\gamma\Delta y - mg\tau.$$

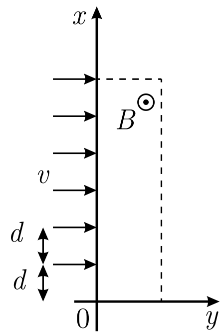
Тогда

$$m\left(-v - \frac{3}{5}v\right) = \gamma \cdot \frac{3}{4}\Delta x - mg\tau.$$

Окончательно находим

$$\tau = \frac{11v}{5g} = 1,1 \text{ с}.$$

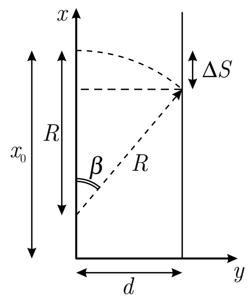
Решение 2. Предположим, что смещение частицы вдоль оси OX мало, то есть поле $|\vec{B}|$ изменяется не сильно $\Delta|\vec{B}| \ll |\vec{B}|$.



Тогда на каждую частицу, вошедшую в поле на расстоянии x, действует сила Лоренца $|\vec{F}_{\text{Л}}| = qvB; \vec{F}_{\text{Л}} \perp \vec{v}$. Следовательно частица движется по окружности

$$a_{\text{ц.с.}} = \frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m}; \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}.$$

Тогда найдем смещение геометрически. Если x_0 — координата частицы, то, т.к. $B = \alpha x$, получаем



$$R = \frac{mv}{q\alpha x_0}.$$

Из рисунка видно, что $\Delta S = R - R\cos\beta$. По условию

$$v \gg \frac{Bqd}{m}; \quad \Longrightarrow \quad \frac{mv}{qB} \gg d; \quad \Longrightarrow \quad R \gg d,$$

следовательно β — малый угол. Тогда $\cos\beta = 1 - \beta^2/2$, $\beta = d/R$. Подставим это в выражение для ΔS

$$\Delta S = \frac{R\beta^2}{2}; \quad \Longrightarrow \quad \Delta S = \frac{d^2}{2R} = \frac{d^2 q\alpha x_0}{2mv}.$$

Заметим, что, с учетом того что $mv \gg Bqd$, получаем

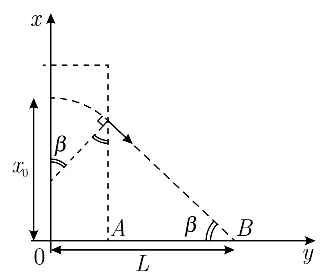
$$\Delta S = \frac{d}{2} \cdot \frac{Bqd}{mv} \ll d,$$

значит предположение, сделанное в начале решения, верно.

Выразив угол β для значения $x_0 = 3d$, получим

$$\beta = \frac{d}{R} = \frac{3q\alpha d^2}{mv}.$$

В предположении того, что после прохождения области магнитного поля частицы движутся прямолинейно, найдем точку пересечения частицей оси OY.



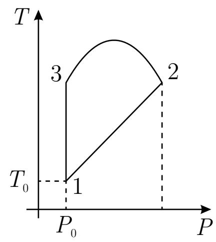
$$\begin{cases} L = d + AB, \\ \dfrac{x_0}{AB} = \operatorname{tg}\beta \approx \beta. \end{cases}$$

Тогда получаем

$$L = d + \frac{x_0}{\beta} = d + \frac{x_0 R}{d}; \quad \Longrightarrow \quad L = d + \frac{mv}{q\alpha d} \approx \frac{mv}{q\alpha d}.$$

Полученное выражение не зависит от x_0, значит все частицы пересекут ось OY в этой точке.

Решение 3. Максимальное значение температуры достигается в вершине параболы, значит



$$P_{max} = -\frac{5T_0}{P_0} \cdot \frac{P_0^2}{-2T_0} = \frac{5}{2}P_0,$$

$$T_{max} = -\frac{T_0}{P_0^2} \cdot \frac{25}{4}P_0^2 + 5\frac{T_0}{P_0} \cdot \frac{5}{2}P_0 = \frac{25}{4}T_0.$$

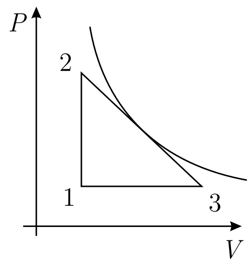
Найдем точку 2 как точку пересечения прямой 12 и параболы

$$\begin{cases} T = \dfrac{T_0}{P_0}P, \\ T = -\dfrac{T_0}{P_0^2}P^2 + \dfrac{5PT_0}{P_0}. \end{cases}$$

Отсюда, так как $P \neq 0$, получаем

$$P = 4P_0 = P_2; \quad \Longrightarrow \quad T_2 = 4T_0.$$

Процесс 23 в PV координатах представляет собой прямую, так как



$$\left(-\frac{T_0P}{P_0^2} + \frac{5T_0}{P_0}\right)R = V_{23}; \quad \Longrightarrow \quad P_{23} = \frac{P_0}{T_0}\left(5T_0 - \frac{P_0V_{23}}{R}\right).$$

В таком случае работа за цикл

$$A_{\text{цикла}} = \frac{(P_2 - P_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{3P_0}{2} \cdot \left(\frac{RT_0}{P_0} - \frac{RT_2}{P_0}\right) = \frac{9}{2}P_0V_0.$$

Для того, чтобы найти точку на участке 23, до которой тепло подводится к газу, найдем точку x касания прямой 23 и адиабаты

$$PV^\gamma = \text{const}; \quad \Longrightarrow \quad V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1}dV = 0; \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{dV} = -\frac{\gamma PV^{\gamma-1}}{V^\gamma} = -\gamma\frac{P}{V}.$$

На участке 23

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P_0}{V_0}; \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{3P_0}{5V_0}V.$$

Пересечение этой прямой и прямой 23 — точка касания адиабаты.

$$\frac{3P_0}{5V_0}V = \frac{P_0}{T_0}\left(5T_0 - \frac{P_0V}{R}\right); \quad \Longrightarrow \quad 5P_0 = V\left(\frac{3P_0}{5V_0} + \frac{P_0^2}{RT_0}\right) = V\left(\frac{3P_0}{5V_0} + \frac{P_0}{V_0}\right) = \frac{8P_0V}{5V_0},$$

$$V = \frac{25V_0}{8}.$$

Количество теплоты, подведенное к газу во время процесса 12

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{9}{2}P_0V_0.$$

Количество теплоты, подведенное к газу во время процесса 23 до найденной ранее точки x

$$Q_{2x} = A_{2x} + \Delta U_{2x} = \frac{3}{2}\left(-4P_0V_0 + \frac{15}{8}P_0 \cdot \frac{25}{8}V_0\right) + A_{2x}.$$

Работа на этом участке процесса 23 равна

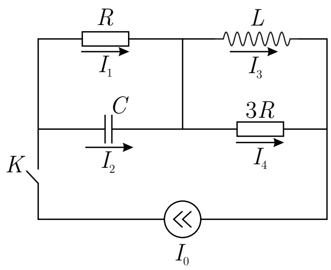
$$A_{2x} = \frac{1}{2}\left(4P_0 + \frac{15}{8}P_0\right)(\frac{25}{8}V_0 - V_0) = \frac{799}{128}P_0V_0.$$

$$Q_{2x} = \frac{799}{128}P_0V_0 + \frac{357}{128}P_0V_0 = \frac{289}{32}P_0V_0.$$

Подставим полученные выражения в определение КПД

$$\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_{12} + Q_{2x}} = \frac{144}{433} \approx 0{,}33.$$

Решение 4. В момент замыкания ключа $U_c = 0$, следовательно $I_R = 0$.



В момент замыкания ключа $I_L = 0$, значит весь ток в начальный момент течет по контуру, состоящему из источника, конденсатора и резистора $3R$, тогда получаем $I_{3R} = I_0$.

Чтобы ответить на второй вопрос, запишем законы Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_0, \\ I_3 + I_4 = I_0, \\ \dfrac{q_2}{C} = I_1R, \\ L\dfrac{dI_3}{dt} = 3I_4R. \end{cases}$$

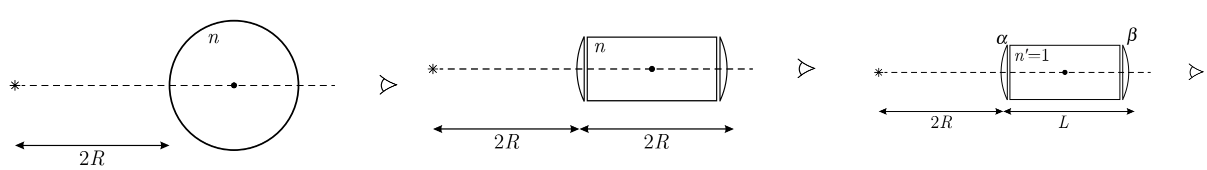
Из последнего уравнения системы получаем

$$dI_3 = \frac{3R}{L}dq_4; \quad \Longrightarrow \quad q_4 = \frac{L}{3R}\Delta I_3.$$

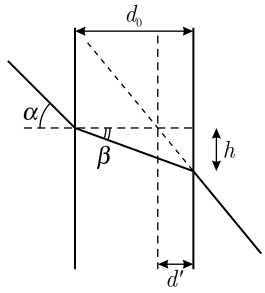
В начальный момент $I_3 = 0$, через достаточно большое время все процессы в цепи установятся и токи будут постоянными, значит $U_L = 0$, следовательно $I_3 = I_0 - I_4 = I_0$. Тогда получаем

$$q_4 = \frac{LI_0}{3R}.$$

Решение 5. Шар можно представить в виде двух тонких линз и плоскопараллельной пластины длиной $2R$ с показателем преломления n, расположенной между ними.



Докажем, что пластину длиной $2R$ с показателем преломления n можно заменить на пластину длиной L с показателем преломления $n' = 1$. Действительно, из рисунка следует, что



$$\frac{h}{d_0} = \operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n} = \frac{h}{d'n}; \quad \Longrightarrow \quad d_0 = d'n.$$

Тогда находим длину новой пластины

$$L = \frac{3}{2}R.$$

Оптическая сила линз равна

$$D = \frac{n-1}{R} = \frac{1}{F_\alpha} = \frac{1}{F_\beta}.$$

Найдем где находится изображение источника в линзе α

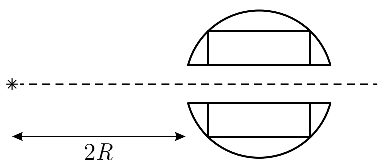
$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{x_\alpha}; \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha = -6R.$$

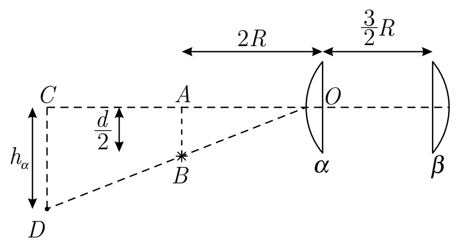
Изображение в линзе β находится на расстоянии

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{x_\beta} + \frac{1}{6R + 3R/2}; \quad \Longrightarrow \quad x_\beta = 5R.$$

Расстояние от изображения до центра шара равно $l = x_\beta + R = 6R$.

Во второй части задачи представим половинки шаров так же, как целый шар в первой части.





Рассмотрим мнимое изображение в линзе α. Из подобия треугольников $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$

$$h_\alpha = \frac{3}{2}d.$$

Рассмотрим изображение в линзе β. Из подобия треугольников $\triangle OWM$ и $\triangle ODC$

$$h_\beta = d.$$

Тогда получаем, что расcстояние между изображениями равно $l = 3d$.