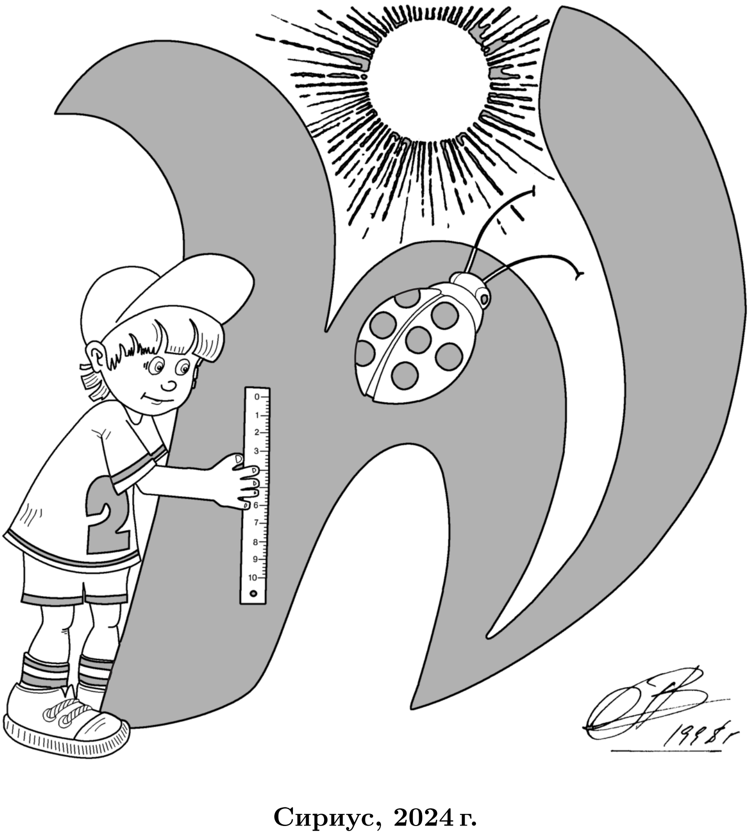
Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Экспериментальный тур



Сириус, 2024 г.

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

9 класс

- **9-E1**. Ольга Инишева, Сергей Кармазин
- **9-E2**. Денис Рубцов, Алексей Заяц

11 класс

- **11-E1**. Юрий Черников, Александр Аполонский

10 класс

- **10-E1**. Игорь Говорун, Ярослав Поздняк

9 класс

Задача №1. Весы Роберваля

Максимальный балл за задание — 25 баллов.

Основой конструкции весов Роберваля является параллелограмм (рамка), состоящий из четырёх жёстких деревянных стержней (см. рисунок 1).

Обозначения на рисунке:

1 – основание весов;

2 – нижний центральный шарнир, жёстко соединённый с рамкой весов;

3 – верхний центральный шарнир, жёстко соединённый с основанием весов.

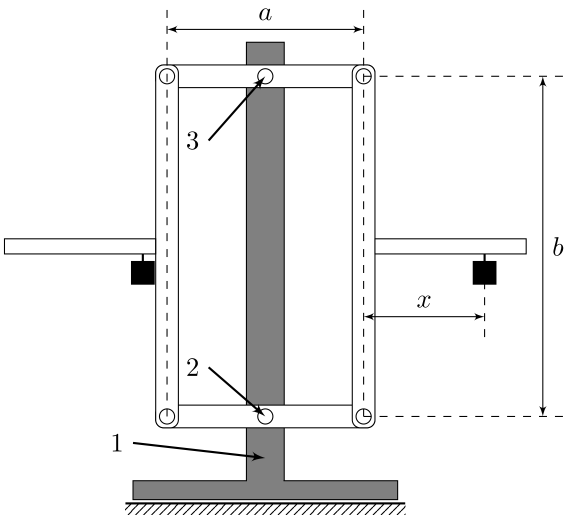


Рис. 1

Середины двух противоположных (исходно горизонтальных) сторон параллелограмма шарнирно закреплены на вертикальном основании. При этом две другие его стороны в любой конфигурации параллелограмма остаются вертикальными. Перпендикулярно к этим сторонам жёстко прикреплены «полки» весов, на которых располагаются взвешиваемые грузы (см. рисунок). Удивительным свойством этой механической системы является то, что, если массы грузов одинаковы, весы находятся в равновесии независимо от места расположения грузов. Возникает ощущение, что не выполняется правило моментов. Особенностью конструкции весов, используемых в данной работе, является большой размер нижнего отверстия в основании, обеспечивающий свободное перемещение в этом отверстии (наличие определённого люфта) нижнего центрального шарнира.

1. Запишите номер весов, указанный на нижней части основания. Установите весы на крае стола и закрепите их двумя зажимами. Измерьте в миллиметрах длины сторон параллелограмма a и b между центрами угловых шарниров.

Сбалансируйте весы. Для этого, устраняя трение в шарнирах лёгким постукиванием по нижней части основания, добейтесь устойчивости горизонтального положения верхней рейки параллелограмма, надевая дополнительные шайбы с диаметром отверстия 6 мм на шурупы верхних торцов вертикальных реек.

2. Только в рамках пунктов 1–3 задания считайте, что все силы трения скольжения данной конструкции сосредоточены в верхнем центральном шарнире радиусом R и создают в нём эффективный суммарный момент $M = F_{\text{тр}}R$ (в дру-

гих пунктах указанную модель не используйте). Определите момент силы трения M_1 сбалансированных весов без нагрузки (до установки на них тяжелых грузов). Масса большой дополнительной шайбы (с диаметром отверстия 8 мм) $m_б = 6$ г, масса малой дополнительной шайбы (с диаметром отверстия 5 мм) $m_м = 1$ г. Подробно опишите метод определения M_1.

3. Установите тяжёлые грузы на левую и правую полки весов максимально близко к вертикальным рейкам параллелограмма. (**Внимание:** инструкция по установке и снятию грузов приведена в приложении к условию). Убедитесь в устойчивости горизонтального положения верхней рейки параллелограмма. Аналогично пункту 2 задания определите эффективный суммарный момент силы трения M_2 для нагруженных весов. Чему равно отношение $n = M_2/M_1$?

При выполнении пунктов 1–3 задания построение графиков не требуется.

4. Снимите зависимость горизонтальной силы F, действующей со стороны основания на нижний центральный шарнир, от расстояния x, на которое правый груз удалён от оси вертикальной рейки параллелограмма (см. рисунок 1).

Примечание: Левый груз при этом должен располагаться на прежнем месте, т.е. максимально близко к своей вертикальной рейке. Измерения проводите при горизонтальном положении верхней и нижней реек параллелограмма. В таблице измерений предусмотрите дополнительный столбец для дальнейших исследований.

5. Постройте график полученной зависимости.

6. Выведите формулу, связывающую F и x через массу грузов и геометрические размеры установки (см. рисунок 1).

7. Используя результаты, полученные в пунктах 4–6 задания, определите массу тяжёлых грузов m_0. Оцените погрешность определения массы.

8. Проведя необходимое дополнительное измерение и используя результаты, полученные в пункте 4 задания, рассчитайте зависимость силы Q, действующей со стороны верхнего центрального шарнира на рамку весов, от расстояния x, на которое правый груз удалён от оси вертикальной рейки параллелограмма. Запишите формулу, использованную для расчета зависимости $Q(x)$.

9. Постройте график зависимости $Q(x)$. При выполнение пунктов 8 и 9 задания погрешность не рассчитывайте.

Оборудование: весы Роберваля, два больших груза одинаковой массой, два зажима, динамометр с пределом измерений 5 Н, линейка 40 см, дополнительные шайбы трёх типов по 5 шт (с диаметрами отверстий 5 мм, 6 мм и 8 мм). Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Приложение. Инструкция по установке больших грузов

1. Любые измерения с тяжёлыми грузами должны производиться только при **надёжном** креплении грузов, подвешенных к полкам весов с помощью винта, торчащего из крышки, и гайки М3, как показано на рисунке 2. В исходном состоянии на винт каждого груза (каждой бутылки с песком) навинчено по 3 гайки. Одна из них является основной, две другие – запасные. Каждую из них можно использовать при утере предыдущей. Дополнительные гайки М3, кроме имеющихся в Вашем распоряжении в начале эксперимента, выдаваться не будут.

Рис. 2

2. Левый груз устанавливается первым. Он при всех измерениях в данном задании располагается максимально близко к левой рейке параллелограмма. Его местоположение не изменяется. Удерживайте груз одной рукой ниже полки весов и, вставив винт в отверстие, другой рукой навинтите гайку таким образом, чтобы несколько витков резьбы винта **оказалось выше гайки**. Это обеспечит надёжность крепления. Имейте в виду, что падение груза на стол или на пол может привести к образованию трещин в бутылочке и высыпанию песка из неё.

3. Закрепив левый груз, плавно опустите его рукой вместе с полкой весов вниз до упора (см. рисунок 3).

Рис. 3

4. Аналогично установите правый груз в нужном месте правой полки. Плавно отпустите его и вручную переведите верхнюю и нижнюю рейки параллелограмма в горизонтальное положение (см. рисунок 4).

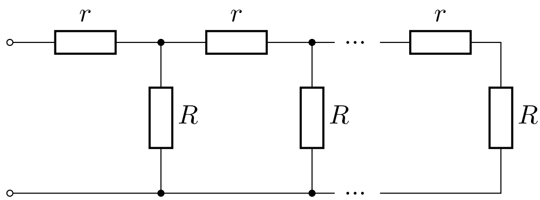
5. Перед снятием правого груза снова плавно переведите левый груз в нижнее положение. После этого изменяйте положение правого груза и вновь придавайте параллелограмму форму прямоугольника.

Рис. 4

Задача №2. Путь в бесконечность

Максимальный балл за задание — 15 баллов.

Впервые вычислить эквивалентное сопротивление электрической цепи (см. рисунок), состоящей из очень большого числа звеньев, было предложено участникам I Международной олимпиады по физике в 1967 году. С тех пор эта задача стала классической. Сегодня же вам предстоит экспериментально исследовать, как зависит сопротивление данной цепи от числа звеньев в ней.



1. Определите сопротивления всех резисторов и проверьте, что все резисторы r и все резисторы R ($r \ll R$) имеют одинаковые сопротивления в пределах точности измерений мультиметра. Считайте погрешность мультиметра в этом и последующих пунктах равной трём единицам последнего разряда. Если есть резисторы R, сопротивление которых отличается больше, чем на 1%, попросите их заменить. Вычислите средние значения R и r и их погрешности.

2. Снимите зависимость эквивалентного сопротивления цепи (см. рисунок) $\Omega(n)$ от числа звеньев n для $n = 1,2,\ldots,7$. Для $n = 7$ начертите Вашу схему подключения резисторов, проводов и мультиметра на макетной плате. Для этого Вам выдан бланк с напечатанной схемой макетной платы. Резисторы сопротивлением R обозначайте на схеме в виде закрашенных прямоугольников, а резисторы сопротивлением r – в виде незакрашенных. Если схему для $n = 7$ собрать не удалось, то начертите схему подключения для цепи с максимальным числом звеньев. **Без начерченной схемы Ваши экспериментальные данные и расчеты не будут оцениваться.**

3. Используя средние значения r и R из первого пункта, рассчитайте теоретическое значение $\Omega(\infty)$ сопротивления цепи, состоящей из очень большого ($n \gg 1$) числа звеньев.

4. Нанесите точки снятой зависимости $\Omega(n)$ на график. Соедините эти точки гладкой линией. На этом же графике постройте горизонтальную прямую $\Omega = \Omega(\infty)$. Это тот предел (горизонтальная асимптота), к которой должны стремиться точки измеренной зависимости $\Omega(n)$.

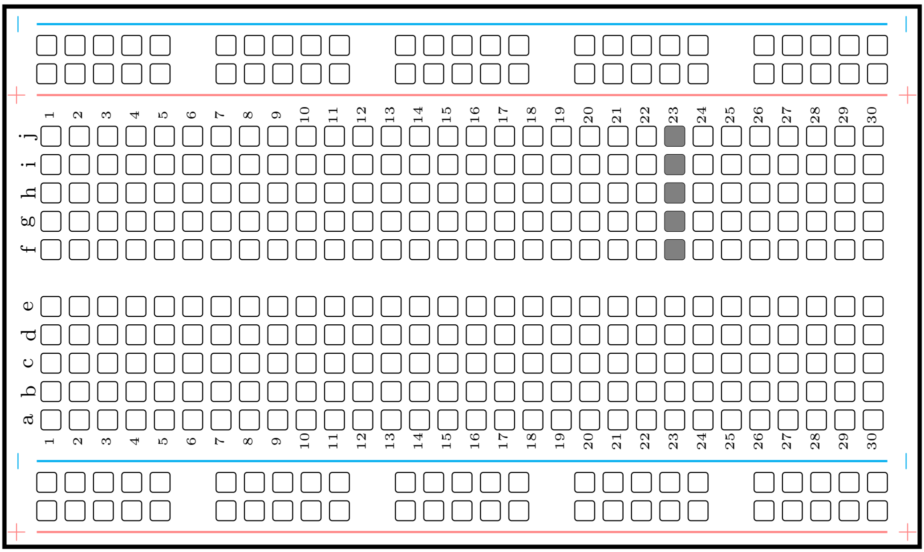
5. В приближении $n^2 r \ll R$ (считайте, что данное приближение верно для всех $n \leqslant 7$) зависимость эквивалентного сопротивления от количества звеньев принимает вид $\Omega(n) = F(R, n) + f(r, n)$, где $f(r, n)$ - небольшая добавка, равная

$f(r,n) = \frac{(2n+1)(n+1)}{6n}r$, а $F(R,n)$ – основной член, зависящий только от R и n. Чему равна функция $F(R,n)$?

6. С учётом теоретической зависимости, полученной в предыдущем пункте, подберите такие координаты, в которых измеренная Вами зависимость $\Omega(n)$ будет линейной. Постройте график линеаризованной зависимости.

7. Из графика, построенного в предыдущем пункте, определите сопротивления r и R и их погрешности. Сравните полученные значения R и r с результатами прямых измерений в пункте 1.

Примечание: макетная плата используется для соединения проводов и подключения различных элементов. Каждые пять соседних гнёзд макетной платы, расположенные в одном столбце, внутри платы соединены между собой. Например, соединены выводы, отмеченные серым на рисунке. Все гнёзда макетной платы, расположенные в двух крайних строках платы с каждой её стороны, промаркированные красным и синим цветами, также соединены между собой.



Оборудование: макетная плата, 7 пар резисторов r и R ($R \gg r$) в зип-пакете, мультиметр с проводами типа «банан–крокодил», пара соединительных проводов для макетной платы.

10 класс

Задача №1. Тепловое сопротивление

Оборудование: установка (см. рис.), струбцина для фиксации установки на столе, два куска проволоки, канцелярская кнопка, два стакана разного размера, пластиковая бутылка, термометр, два мультиметра, источник питания, три пары проводов «банан–крокодил», шприц, горячая вода и вода примерно комнатной температуры по требованию.

Погрешность мультиметра и термометра считайте равной трём единицам последнего разряда.

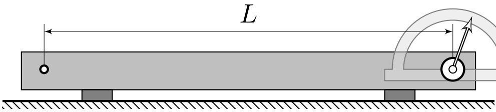
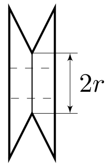


Схема установки



Колёсико на установке

Расстояние L указано на установке с точностью 2 мм, радиус средней части колёсика $r = (3.50 \pm 0.05)$ мм. Масса пластиковой бутылки $m_0 = (16.2 \pm 0.2)$ г. Выданные куски проволоки сделаны из одного и того же неизвестного сплава, имеют длины $l_1 = (100.0 \pm 0.2)$ см, $l_2 = (150.0 \pm 0.2)$ см и одинаковый диаметр $d = (0.150 \pm 0.002)$ мм. Плотность воды $\rho = 1.00$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

Относительным удлинением $\varepsilon = \Delta l/l$ называется отношение изменения длины проволоки Δl к её начальной длине l.

Модуль Юнга E характеризует упругие свойства материала проволоки и связывает её относительное удлинение ε с растягивающей силой F:

$$F = ES\varepsilon,$$

где S – площадь поперечного сечения проволоки.

Коэффициент теплового расширения β характеризует изменение линейных размеров тела при изменении температуры. Длина проволоки $l(t + \Delta t)$ при температуре $t + \Delta t$ связана с её длиной $l(t)$ при температуре t формулой

$$l(t + \Delta t) = l(t) \cdot (1 + \beta\Delta t).$$

Важно! Для уменьшения вклада трения перед выполнением экспериментов убедитесь, что колёсико не касается транспортира и головки винта. Не прикладывайте к проволоке силу, превышающую 3.0 Н, так как это может привести к необратимым её деформациям.

1. Снимите зависимость относительного удлинения проволоки ε от растягивающей её силы F. Постройте график полученной зависимости. Определите модуль Юнга E материала проволоки и оцените его погрешность.

2. Снимите зависимость относительного удлинения участка проволоки ε и напряжения U на его концах от силы тока I, который течёт через него. То есть для каждого значения силы тока I определите значение ε и U. Проведите эксперимент, сначала увеличивая силу тока в диапазоне от 0 А до 2 А, и затем, не выключая источник, уменьшая силу тока в том же диапазоне. Предложите две величины, выраженные через U, I и ε, зависимость между которыми предположительно линейна. Постройте график этой зависимости.

3. Предложите метод, позволяющий определить коэффициент теплового расширения β проволоки. Проведите серию измерений, необходимых для определения β. Обработайте результаты измерений при помощи линеаризованного графика. Найдите значение β и оцените его погрешность.

11 класс

Задача №1. Немокрая вода

Характеристики некоторых веществ могут показаться неожиданными в сравнении с другими веществами, часто встречающимися в нашей жизни. В данной работе Вам предлагается, используя весьма ограниченный набор оборудования, придумать методы и определить некоторые физические характеристики одного из таких веществ, которое часто называют «сухой водой». Учтите, что количество этого вещества ограничено и Вы должны тщательно продумывать свои действия, чтобы обойтись той порцией, что предоставлена в Ваше распоряжение. Дополнительная жидкость Вам выдаваться не будет! В целях её экономии рекомендуется при выполнении задания отливать небольшую часть в баночку с крышкой. Если в Вашем эксперименте жидкость оказалась в одном сосуде с водой, то обратите внимание на то, что обычная вода и «сухая вода» не смешиваются и разделены между собой. Для извлечения «сухой воды» из сосуда достаточно откачать ее с помощью шприца.

Чтобы Вы могли работать спокойно, сообщаем, что исследуемые жидкость и её пары не токсичны, она не горючая, не вступает в какие-либо химические реакции с водой и оборудованием. При этом она весьма летучая (быстро испаряется), ее температура кипения ниже 60°C.

Примите атмосферное давление равным $p_0 = 100$ кПа и ускорение свободного падения равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

Задание

Перед началом выполнения работы укажите номер пакета с оборудованием.

Обратите внимание, что оборудование указано к каждой части задачи отдельно. Использование оборудования из других частей запрещено.

Пенопластовые стаканчики в перечень оборудования не входят и нужны для хранения холодной и горячей воды.

Часть 1

В данной части задачи требуется оценка погрешности только однократного измерения, проведение многократных измерений не требуется.

1.1. Определите плотность жидкости при комнатной температуре (комнатную температуру запишите).

1.2. Определите коэффициент объемного теплового расширения жидкости в диапазоне температур приблизительно $[20 - 40]$°C. Обратите внимание на то, что сосуд, в который помещается исследуемая жидкость, также изменяет свой объем при изменении температуры. Считая, что плотность воды при изменении температуры от 20°C до 40°C уменьшается на $\Delta\rho_{\text{в}} = 7{,}0$ кг/м^3, учтите влияние объемного расширения сосуда, в который будет помещена «сухая вода» во время опыта по измерению ее коэффициента объемного расширения.

Для получения результата достаточно использовать измерения при двух разных температурах.

Примечание. Коэффициент объемного теплового расширения β – физическая величина, характеризующая относительное изменение объёма тела с увеличением температуры на 1 K при постоянном давлении:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V\Delta T}, \tag{1}$$

где V – объём жидкости, ΔV – приращение объёма жидкости при изменении температуры на малую величину ΔT.

Оборудование: «Сухая вода» в бутылке, весы электронные, баночка с крышкой, термометр электронный, штатив с лапкой и муфтой, мерный цилиндр 250 мл, ведёрко для слива воды, горячая вода (по требованию), вода при комнатной температуре (по требованию), шприц 10 мл, шприц 1 мл, линейка 30 см, силиконовая трубка большого сечения, поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Часть 2

В данной части задачи требуется оценка погрешности только однократного измерения, проведение нескольких серий измерений не требуется.

2.1. Определите динамическую вязкость η «сухой воды» при комнатной температуре. Для определения η можно воспользоваться исследованием объёмного расхода Q жидкости при течении её через цилиндрический канал. Объёмный расход при ламинарном течении описывается формулой Пуазейля (см. рис. 1):

$$Q = \frac{\pi D^4(\Delta p + \rho g h)}{128\eta l}, \tag{2}$$

где D – диаметр канала, Δp – разность давлений на концах канала, l – длина канала, Q – объёмный расход жидкости, измеряемый в м^3/с, h – разность высот начала и конца канала, ρ – плотность жидкости.

Для получения результата снимите не менее 5 экспериментальных точек при разных объемных расходах жидкости. Произведите графическую обработку измерений.

2.2. Переход от ламинарного течения к турбулентному определяется параметрами течения жидкости. Безразмерное число, характеризующее параметры

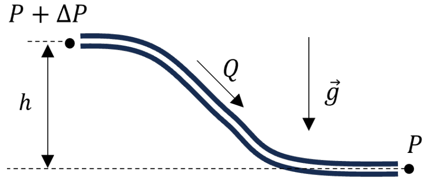


Рис. 1. Протекание жидкости по каналу.

движения, называется числом Рейнольдса и может быть рассчитано для течения жидкости через цилиндрический канал как:

$$\mathrm{Re} = \frac{Q\rho}{D\eta}. \tag{3}$$

В выбранном Вами методе измерений для максимальной скорости течения проверьте, что число Рейнольдса не превышает критическое значение $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 200$, то есть течение является ламинарным. Вычисления занесите в работу.

При необходимости измените параметры установки и проведите эксперимент (пункты 2.1 и 2.2) заново.

Оборудование: «Сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, штатив с лапкой и муфтой, секундомер, весы, шприц 1 мл, шприц 10 мл, линейка 30 см, силиконовая трубка малого сечения с штуцером (розовая игла), поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Обратите внимание, что в крышке банки есть отверстие, в которое может быть вставлен конец силиконовой трубки.

Часть 3

В данной части задачи требуется оценить как погрешность однократного измерения, так и случайную погрешность. Проведите не менее трех измерений требуемой величины.

3. Определите молярную массу «сухой воды».

Оборудование: «Сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, штатив с лапкой и муфтой, шприц 1 мл, шприц 50 мл, резиновая пробочка для носика шприца 50 мл, мерный цилиндр 250 мл, ведёрко для слива воды, горячая вода (по требованию), вода при комнатной температуре (по требованию), термометр электронный, весы электронные, поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Примечание. Резиновая пробочка предназначена для герметизации внутреннего объёма шприца, надевается на носик шприца. При небольшой разнице давлений она может быть проткнута иглой шприца 1 мл и после извлечения иглы сохранять герметичность.

Часть 4

В данной части задачи требуется оценка погрешности только однократного измерения, проведение многократных измерений не требуется.

Связь давления насыщенного пара с абсолютной температурой описывается уравнением Клапейрона–Клаузиуса. При предположениях о независимости удельной теплоты парообразования L от температуры и о малости плотности пара по сравнению с плотностью жидкости уравнение принимает вид:

$$\ln\frac{p_{н1}}{p_{н2}} = -\frac{L\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right), \tag{4}$$

где $p_{н1}$ и $p_{н2}$ – давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 соответственно, μ – молярная масса жидкости, R – универсальная газовая постоянная.

4. Вычислите значение L для «сухой воды». Для этого определите две точки зависимости давления насыщенного пара «сухой воды» от температуры. Выберите точки, позволяющие вычислить L с максимальной точностью.

Оборудование: «Сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, штатив с лапкой и муфтой, шприц 1 мл, шприц 50 мл, резиновая пробочка для носика шприца 50 мл, мерный цилиндр 250 мл, ведёрко для слива воды, горячая вода (по требованию), вода при комнатной температуре (по требованию), термометр электронный, поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Часть 5

В данной части задачи требуется оценить как погрешность однократного измерения, так и случайную погрешность. Проведите не менее трех измерений требуемой величины.

5. Определите показатель преломления n жидкости.

Оборудование: «Сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, кювета пластиковая, линейка деревянная 50 см, линейка пластмассовая 30 см, лист бумаги А4, штатив с лапкой и муфтой, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Возможные решения

Задача №9-Е1. Весы Роберваля

Фото установленных и сбалансированных весов представлено на рисунке 1. Геометрические размеры установки: $a = 184$ мм, $b = 300$ мм.

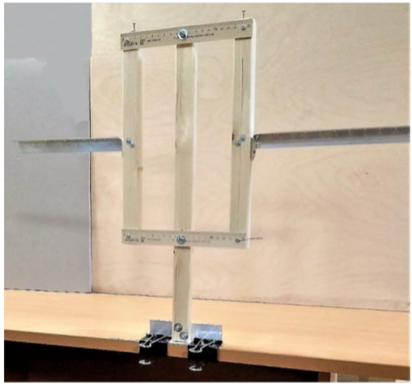


Рис. 1

Для определения момента силы трения M в шарнире будем добавлять малые грузы (дополнительные шайбы) в любом месте полки весов, пока не начнётся движение полки вниз. Это произойдет при общей массе малых грузов Δm. Рассчитаем момент силы трения в шарнире, используя метод виртуальных перемещений. Он основан на том факте, что при выводе механической системы из положения равновесия на бесконечно малое расстояние суммарная работа внешних сил равна нулю.

При опускании правого конца рычага длиной $a/2$ на расстояние Δh, жёстко связанный с ним цилиндр шарнира радиусом R поворачивается на угол φ и, соответственно, проскальзывает с силой трения $F_{\text{тр}}$ по неподвижному основанию на длину дуги ΔL (см. рисунок 2). В нашем случае:

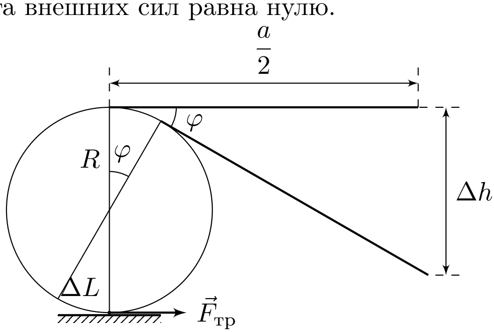


Рис. 2

$$\Delta m g \Delta h = F_{\text{тр}} \Delta L; \Delta m g \frac{a}{2} \varphi = F_{\text{тр}} R \varphi; M = F_{\text{тр}} R = \Delta m g \frac{a}{2}.$$

В силу конструктивного несовершенства исследуемой установки масса дополнительного груза Δm, выводящего весы из положения равновесия, может зависеть от того, с какой стороны расположен этот груз. Целесообразно проверить, насколько совпадают или отличаются значения Δm при размещении их на левой или правой полках весов. На контрольной установке были получены следующие результаты при расположении дополнительных грузов справа: $\Delta m_{\text{п}} = 4$ г и $M_{1\text{п}} = \Delta m_{\text{п}} g \frac{a}{2} = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ Н $\cdot$ м. При расположении грузов слева: $\Delta m_{\text{л}} = 3$ г и $M_{1\text{л}} = \Delta m_{\text{л}} g \frac{a}{2} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ Н $\cdot$ м. Усредним полученные результаты. Момент силы трения в верхнем шарнире наших весов без нагрузки равен:

$M_1 \approx 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

Закрепим большие грузы максимально близко к вертикальным рейкам. Убедимся в устойчивости горизонтального положения верхней и нижней реек весов. Определим массу дополнительного груза Δm, выводящего систему из состояния покоя в нагруженном состоянии. На контрольной установке были получены следующие результаты при расположении дополнительных грузов справа: $\Delta m_{\text{п}} = 17$ г и $M_{2\text{п}} = \Delta m_{\text{п}} g \frac{a}{2} \approx 16 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

При расположении грузов слева: $\Delta m_{\text{л}} = 15$ г и $M_{2\text{л}} = \Delta m_{\text{л}} g \frac{a}{2} \approx 14 \cdot 10^{-3}$ Н·м. Усредним полученные результаты и получим, что момент силы трения в верхнем шарнире наших весов под нагрузкой равен:

$M_2 = 15{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н · м, а отношение $n = \frac{M_2}{M_1} \approx 4{,}7$.

Горизонтальную силу F, действующую со стороны основания на нижний центральный шарнир, измеряем динамометром, зацепляя его за проволочную петлю, расположенную в нижней части правой рейки весов (см. рисунок 3).

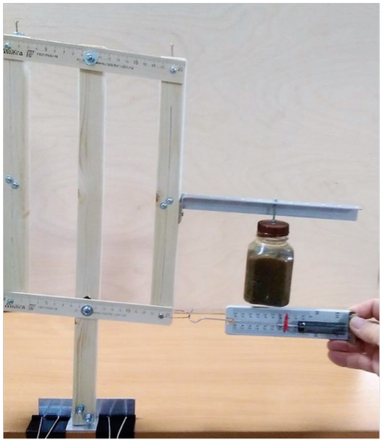


Рис. 3

Показания динамометра снимаем в тот момент, когда шарнир не касается боковых стенок большого отверстия в основании весов, а динамометр расположен горизонтально. В этот момент горизонтальная сила, создаваемая пружиной динамометра, заменяет горизонтальную силу реакции опоры со стороны боковой стенки отверстия. Измерения нужно проводить, тщательно подбирая положение динамометра в горизонтальной плоскости, обеспечивающее отсутствие перекосов нижнего основания весов, когда центральный шарнир свободно перемещается в отверстии.

Для удобства измерения величины x прочертим линию, соединяющую шарниры правой вертикальной рейки параллелограмма. Расстояние от этой линии до ближайшего отверстия на горизонтальной полке равно 52 мм. Так как остальные отверстия расположены с интервалом 20 мм, то все возможные для измерений расстояния x_i определяются соотношением $x_i = (52 + 20i)$ мм. Занесём эти значения в таблицу.

Последовательно перевешивая правый груз в отверстиях правой полки, снимаем зависимость $F(x)$. Результаты измерений представлены в таблице.

x, мм	72	92	112	132	152	172	192	212	232
F, Н	0,2	0,6	1,0	1,3	1,8	2,1	2,5	2,9	3,2

График полученной зависимости представлен на рисунке 4. На графике отложена погрешность измерений по оси F, которая принимается равной цене деления динамометра 0,1 Н.

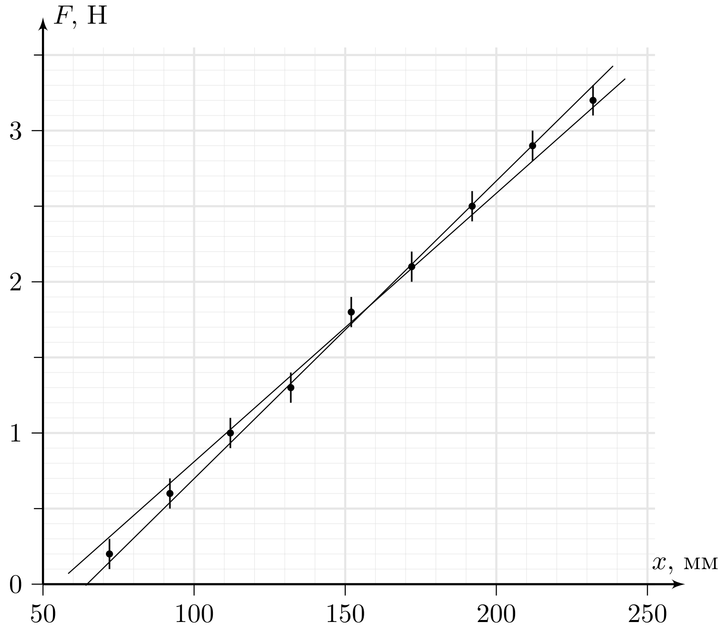


Рис. 4

Для нахождения массы грузов используем условие равновесия относительно верхнего шарнира. Правило моментов в этом случае имеет вид:

$$m_0 g(x + a/2) = m_0 g(x_0 + a/2) + Fb + M_{\text{трп}}, \tag{1}$$

где x_0 – расстояние от точки подвеса левого груза до оси левой рейки параллелограмма, $M_{\text{трп}}$ – суммарный момент, создаваемый силами трения покоя. Сила тяжести, действующая на рамку весов, не создаёт вращательного момента, так как приложена в центре параллелограмма и направлена вертикально вниз, её плечо относительно верхнего шарнира равно нулю. После преобразований получаем:

$$F = \frac{m_0 g x}{b} + C. \tag{2}$$

$F(x)$ является линейной зависимостью, угловой коэффициент которой $k = m_0 g/b$ даёт возможность определить массу груза. Второе слагаемое C в (2) является константой.

Проведём на графике прямые с максимально и минимально возможными наклонами (см. рисунок 4). Угловые коэффициенты этих прямых $k_{max} = 20{,}0$ Н/м и $k_{min} = 17{,}7$ Н/м, из которых получаем $m_{0max} = 610$ г и $m_{0min} = 540$ г. Среднее значение массы груза $m_0 = 575$ г, погрешность ± 40 г.

Окончательно для массы груза $m_0 = (580 \pm 40)$ г. Погрешность составляет 6%. Эталонное значение массы груза $m_0 = 560$ г.

Сила, действующая на рамку со стороны верхнего шарнира, представляет собой векторную сумму вертикальной силы $F_в = 2m_0g + Mg$, где M – полная масса рамки весов, и горизонтальной силы $F_г$, которая равна по величине и противоположно направлена силе F, действующей со стороны основания на нижний шарнир. Модули последних двух сил равны друг другу, так как они являются единственными горизонтальными силами, действующими на рамку, а вращательный момент относительно центра тяжести рамки отсутствует. Таким образом,

$$Q = \sqrt{F_в^2 + F^2}. \tag{3}$$

Для вычисления Q необходимо знать M. Положим основание весов на угол стола так, чтобы рамка не касалась стола (см. рисунок 5).

Потянем динамометром рамку вверх за проволочную петлю и зафиксируем его показание F_1 в том положении, где центральный шарнир не касается стенок большого отверстия в основании. В этом положении рамка находится в равновесии под действием двух сил, правило моментов для которых имеет вид: $F_1 b = Mg\frac{b}{2}$.

Так как в нашем случае измерения дают результат $F_1 = 1{,}4$ Н, находим $M = 290$ г, а $F_в = 2m_0g + Mg = 14{,}1$ Н. Подставляя это значение в (3) и используя данные таблицы пункта 5, вычисляем зависимость $Q(x)$ и заносим результаты в ту же таблицу измерений.

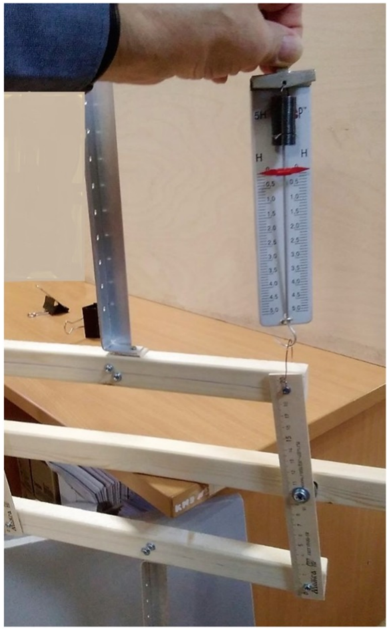


Рис. 5

x, мм	72	92	112	132	152	172	192	212	232
F, Н	0,2	0,6	1,0	1,3	1,8	2,1	2,5	2,9	3,2
Q, Н	14,10	14,11	14,13	14,16	14,21	14,26	14,32	14,39	14,46

График зависимости $Q(x)$ представлен на рисунке 6. График похож на параболу. Убедимся, что так и должно быть. В нашем случае можно считать, что $F \ll F_{\text{в}}$. Тогда

$$Q = \sqrt{F_{\text{в}}^2 + F^2} = F_{\text{в}}\sqrt{1 + \frac{F^2}{F_{\text{в}}^2}} \approx F_{\text{в}}\left(1 + \frac{F^2}{2F_{\text{в}}^2}\right) = F_{\text{в}} + \frac{F^2}{2F_{\text{в}}},$$

а в искомое выражение входит квадрат линейной зависимости $F(x)$. Что и требовалось доказать. Здесь мы воспользовались тем, что $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ при $\alpha \ll 1$.

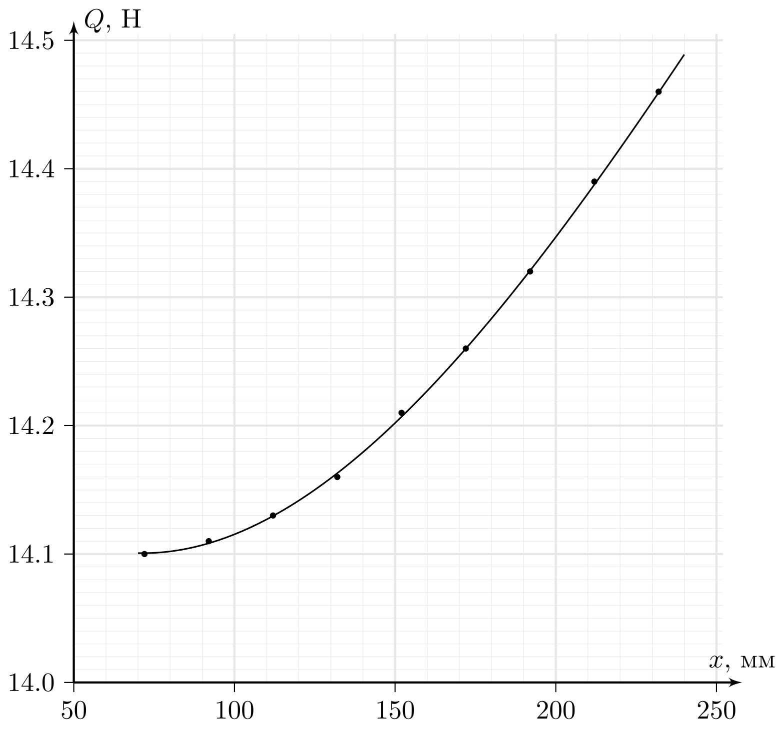


Рис. 6

Задача №9-Е2. Путь в бесконечность

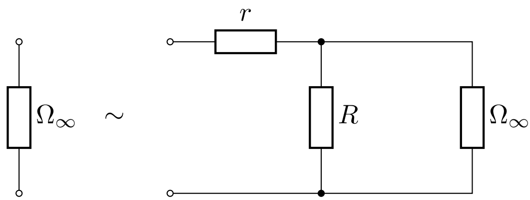
Мультиметром в режиме омметра измерим сопротивления всех резисторов. Полученные данные занесем в таблицу. Получим

$$r = (9{,}95 \pm 0{,}06)\ \text{кОм}, R = (998 \pm 4)\ \text{кОм}$$

r, кОм	R, кОм
$9{,}89 \pm 0{,}03$	997 ± 3
$9{,}94 \pm 0{,}03$	998 ± 3
$9{,}99 \pm 0{,}03$	998 ± 3
$9{,}95 \pm 0{,}03$	996 ± 3
$9{,}98 \pm 0{,}03$	997 ± 3
$9{,}93 \pm 0{,}03$	997 ± 3
$9{,}94 \pm 0{,}03$	1000 ± 3

Снимем зависимость эквивалентного сопротивления цепи $\Omega(n)$ от числа звеньев n.

n	Ω, кОм
1	1007 ± 3
2	511 ± 3
3	348 ± 3
4	268 ± 3
5	221 ± 3
6	191 ± 3
7	170 ± 3



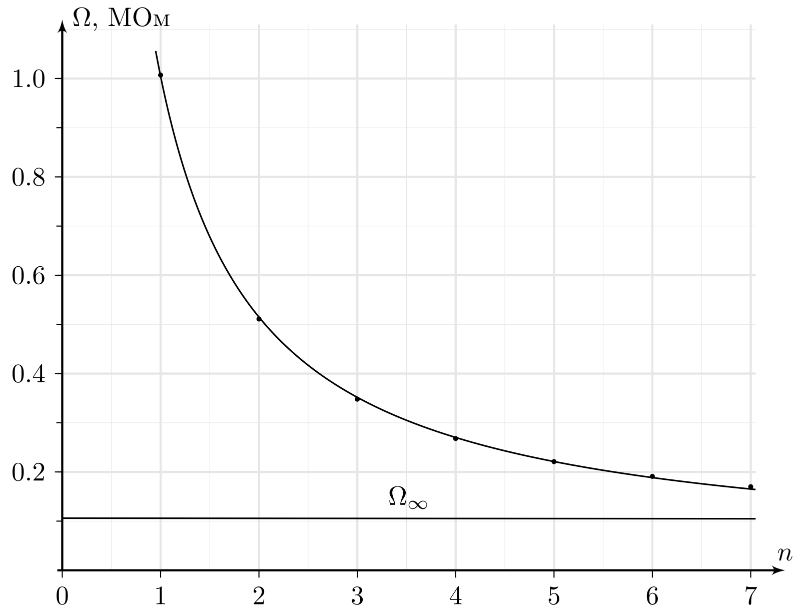
Если к цепи, состоящей из бесконечного (или очень большого) числа звеньев, добавить еще одно звено, то эквивалентное сопротивление цепи не изменится. Условие равенства эквивалентных сопротивлений:

$$\Omega(\infty) = r + \frac{R\Omega(\infty)}{R + \Omega(\infty)}$$

Решение этого уравнения дает результат

$$\Omega(\infty) = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2} \approx (104{,}8 \pm 0{,}5)\ \text{кОм}$$

Второй отрицательный корень уравнения физического смысла не имеет.



При $r = 0$ наша цепь превращается в n параллельно соединенных резисторов R

$$\Omega(n) = \frac{R}{n} = F(R, n).$$

Таким образом

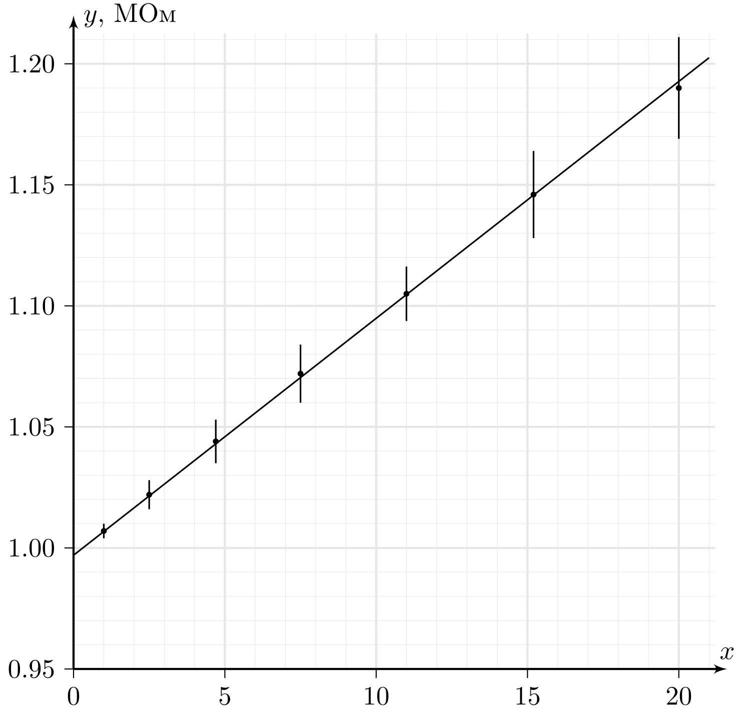
$$\Omega(n) = F(R, n) + f(r, n) = \frac{R}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} r. \qquad (*)$$

Если обозначить $y = n\Omega$ и $x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$, то уравнение $(*)$ примет вид

$$y = rx + R$$

Пересчитаем таблицу $\Omega(n)$ в таблицу $y(x)$ и построим график.

$y = n\Omega$, кОм	$x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
1007 ± 3	1,0
1022 ± 6	2,5
1044 ± 9	4,7
1072 ± 12	7,5
1105 ± 15	11,0
1146 ± 18	15,2
1190 ± 21	20,0

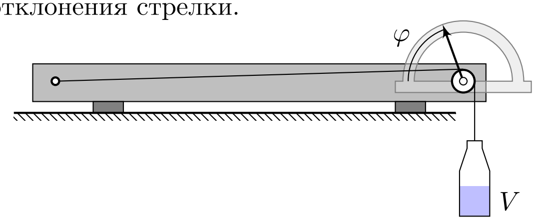


Свободный коэффициент линейного графика равен $R = (997 \pm 4)$ кОм. Угловой коэффициент равен $r = (9{,}7 \pm 1{,}2)$ кОм. Эти значения совпадают в рамках погрешности со значениями, полученными в пункте 1.

Задача №10-Е1. Тепловое сопротивление

Результаты приведены для эксперимента с авторской установкой, которая отличалась массой пустой бутылки и маркой проволоки.

Подвесим пустую бутылку к измерительному стенду с помощью куска проволоки большей длины и выставим стрелку в некоторое положение (см. рисунок). Обратим внимание, что изначально куски проволоки скручены в витки, и вследствие этого могут проявлять нелинейность растяжения по нагрузке. Проверим, что колесико свободно вращается, не касаясь транспортира и головки винта. Начнём наливать в бутылку воду с помощью шприца порциями по 20 мл, измеряя при этом угол φ отклонения стрелки.



φ, °	V, мл	F, Н	ε
35	0	0,18	0,00000
37	20	0,37	0,00013
37	40	0,57	0,00013
39	60	0,76	0,00025
40	80	0,96	0,00031
42	100	1,16	0,00044
43	120	1,35	0,00050
45	140	1,55	0,00063
46	160	1,74	0,00069
48	180	1,94	0,00082
50	200	2,14	0,00094
51	220	2,33	0,00101
53	240	2,53	0,00113
54	260	2,72	0,00120
56	280	2,92	0,00132

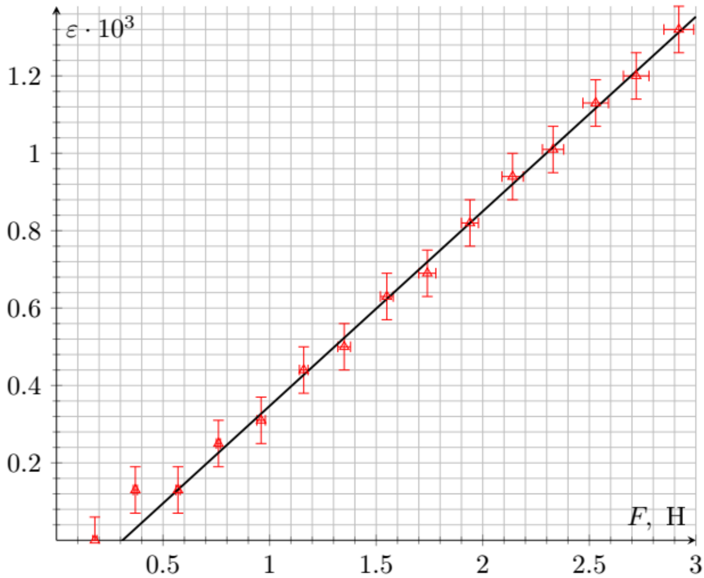
В представленной таблице расчёт растягивающей силы F и относительного удлинения ε произведён по формулам

$$F = \rho V g + m_0 g,$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{(\varphi - \varphi_0) r}{L},$$

где φ_0 – начальный угол отклонения стрелки. Построенный график ε от F имеет линейный вид в пределах погрешности.

Погрешность определения силы составляет $\Delta F = (0{,}5 \text{ мл}/20 \text{ мл}) \cdot F$, погрешность определения относительного удлинения составляет $\Delta\varepsilon = (\pi/180^\circ) \cdot 1^\circ \cdot r/L = 6 \cdot 10^{-5}$.

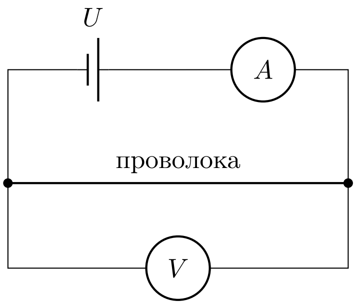


Зависимость ε от F

Наблюдаемый сдвиг по оси F может быть обусловлен наличием силы трения между колесиком и осью. Угловой коэффициент сглаживающей прямой $k_1 = 1/ES = (0{,}50 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}$ Н$^{-1}$, где $S = \pi d^2/4$, тогда модуль Юнга $E = 1/k_1 S = (113 \pm 7)$ ГПа. В работе используется неизолированная медная проволока. Табличное значение модуля Юнга для меди $E_{\text{Cu}} = 118$ ГПа.

$$E = (113 \pm 7) \text{ ГПа}.$$

Подвесим к свободному концу куска длинной проволоки пустую бутылку и затем нальём небольшое количество воды (≈ 100 мл). Это надо для того, чтобы преодолеть зону застоя, связанную с наличием трения в оси колёсика. Соберем электрическую цепь, схема которой изображена на рисунке.



Подключим кусок проволоки, амперметр и источник последовательно. Параллельно с куском проволоки подключим мультиметр в режиме вольтметра.

Возможные хорошие варианты:

- «Крокодилы» проводов подключаем к проводу вблизи болта и проводу около колесика на вертикальном участке проволоки.
- «Крокодилы» проводов подключаем к небольшим свободным концам проволоки в местах крепления к бутылке и болту. Значения напряжений при этом пересчитываем.

Первое измерение проведем при температуре проволоки близкой к комнатной (при малых значениях сил токов). При этом используем мультиметр в режиме «200 mA».

Посмотрим, как меняется длина медной проволоки при пропускании через неё «амперных токов». Для этого переведём амперметр в режим «10 A». Далее, увеличивая напряжение на источнике, измеряем угол поворота стрелки φ, силу тока I на амперметре и напряжение U на вольтметре в режиме «нагревания» (увеличения силы тока) и «остывания» (уменьшения силы тока).

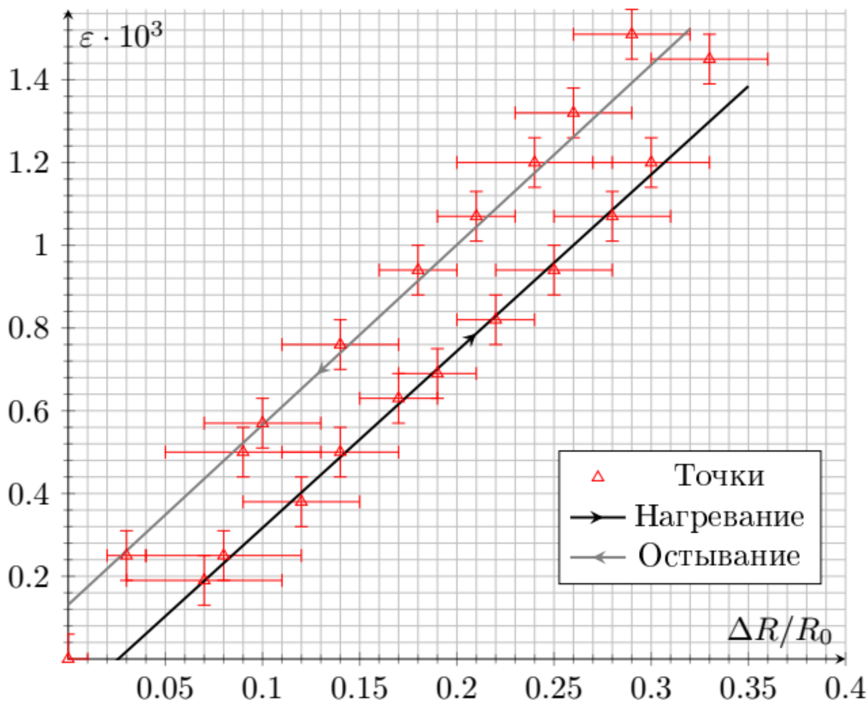
Последнее измерение проводим опять при температуре проволоки близкой к комнатной. При этом используем мультиметр в режиме «200 mA».

φ, °	I, A	U, В	$\Delta R/R_0$	ε
36	0,0824	0,0858	0,00	0,00000
Нагревание				
39	0,75	0,837	0,07	0,00019
40	0,86	0,965	0,08	0,00025
42	1,07	1,252	0,12	0,00038
44	1,21	1,438	0,14	0,00050
46	1,35	1,649	0,17	0,00063
47	1,45	1,803	0,19	0,00069
49	1,56	1,984	0,22	0,00082
51	1,66	2,16	0,25	0,00094
53	1,73	2,30	0,28	0,00107
55	1,83	2,48	0,30	0,00120
60	2,02	2,71	0,29	0,00151
Остывание				
59	1,93	2,67	0,33	0,00145
57	1,76	2,31	0,26	0,00132
55	1,62	2,09	0,24	0,00120
53	1,51	1,901	0,21	0,00107
51	1,37	1,68	0,18	0,00094
48	1,18	1,401	0,14	0,00076
45	0,99	1,132	0,10	0,00057
44	0,82	0,927	0,09	0,00050
40	0,0442	0,0473	0,03	0,00025

Исследуемая температурная зависимость сопротивления определяется формулой $R = R_0(1+\alpha\Delta t)$, поэтому $\Delta R/R_0 = (R-R_0)/R_0 = \alpha\Delta t$, где R_0 – начальное сопротивление. Такой же вид и у зависимости относительного удлинения проволоки от температуры: $\varepsilon = \Delta l/l = \beta\Delta t$. А значит график зависимости ε от $\Delta R/R_0$ будет линейным.

Сопротивление R будем рассчитывать по формуле $R = U/I$, а относительное удлинение ε – по формуле $\varepsilon = (\pi/180°)\cdot(\varphi-\varphi_0)r/L$.

Погрешность относительного удлинения находим по формуле $\Delta\varepsilon = (\pi/180°)\cdot 1°\cdot r/L = 6\cdot 10^{-5}$, погрешность $\Delta R_0 = (\Delta I_0/I_0 + \Delta U_0/U_0)\,R_0 = 0{,}007$ Ом. Погрешность для ΔR находим аналогично, в результате чего погрешность значения $R - R_0$ оказывается порядка 0,04 Ом. Основной вклад в погрешность данной величины дает погрешность амперметра в режиме «10 А».



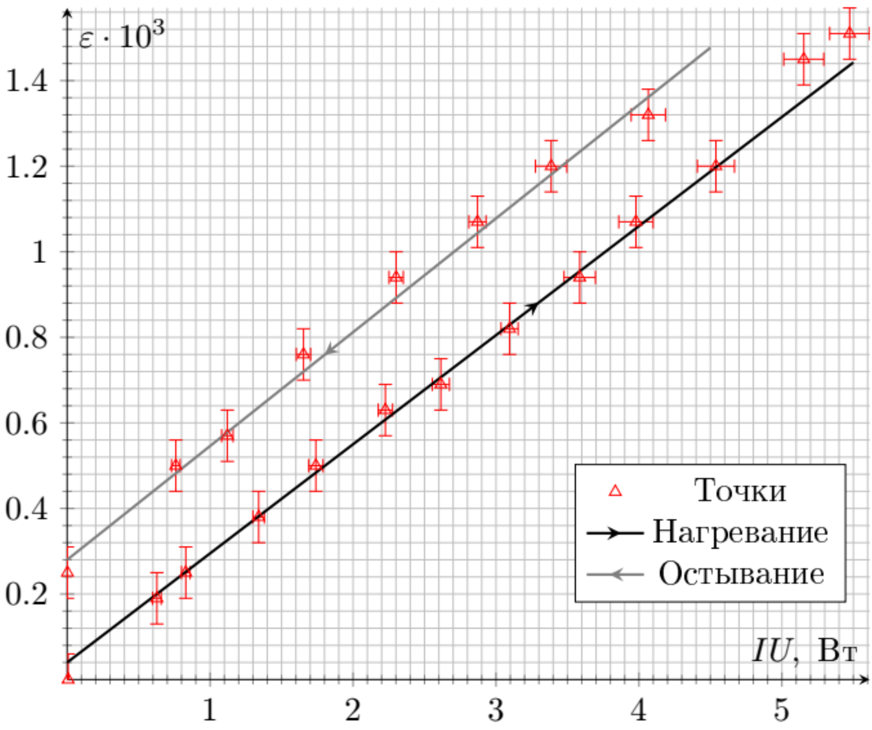
Зависимость ε от $\Delta R/R_0$

На графике приведены линейные участки снятых зависимостей. Отчётливо виден гистерезис, связанный с изменением направления силы трения в колесике при смене режима «нагревания» на режим «остывания». При этом угловые коэффициенты $k_{наг} = (4{,}3\pm0{,}4)\cdot 10^{-3}$, $k_{ост} = (4{,}4\pm0{,}4)\cdot 10^{-3}$ совпадают в пределах погрешности. В рамках используемой модели угловой коэффициент графика должен быть равен β/α. Для его нахождения усредним $k_{\text{наг}}$ и $k_{\text{ост}}$:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{k_{\text{наг}} + k_{\text{ост}}}{2} = (4{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}.$$

Чем больше масса подвешенного груза, тем сильнее проявляется гистерезис, и при правильном выборе объема воды налитого в бутылку ($V > 60$ мл) он всегда проявляется. При этом $\frac{k_{\text{наг}}+k_{\text{ост}}}{2}$ остается постоянным.

Возможно выбрать другие координаты, линеаризующие снятую зависимость. Считая мощность теплопотерь $W_{\text{пот}}$ пропорциональной разности температур Δt между проволокой и внешней средой: $W_{\text{пот}} = k_{\text{пот}}\Delta t$, можем записать уравнение теплового баланса $IU = W_{\text{пот}} = k_{\text{пот}}\Delta t$. Таким образом, зависимость относительного удлинения ε от IU должна быть линейной.



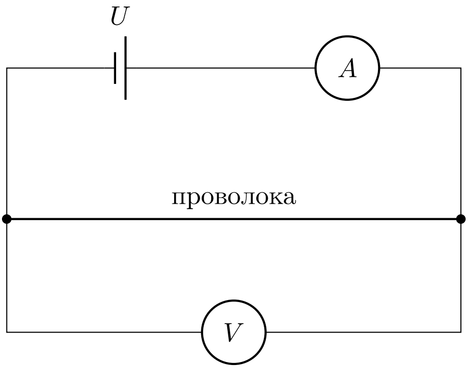
Зависимость ε от IU

На этом графике также отчётливо виден гистерезис, связанный с изменением направления силы трения в колесике при смене режима «нагревания» на режим «остывания». Угловые коэффициенты тоже совпадают в пределах погрешности.

Для определения коэффициента β нужно использовать соотношение $\frac{\beta}{\alpha}$, найденное описанным выше методом. Независимо найдем температурный коэффициент сопротивления α.

Исследуем, как зависит сопротивление медной проволоки от температуры. Для этого поместим короткий кусок проволоки в горячую воду, температуру которой измерим термометром. Подадим на проволоку небольшое напряжение от источника порядка 200 мВ. Далее снимем значения силы тока в цепи и напряжения на концах куска проволоки от температуры воды.

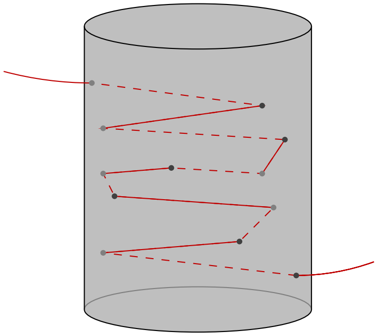
Для определения сопротивления через проволоку пропустим «небольшой» ток (в диапазоне до 200 мА). Силу тока измерим «миллиамперметром», а напряжение на концах проволоки – «милливольтметром». Обратим внимание, что сопротивление проволоки при длине $l = 1$ м составляет порядка 1 Ом, в связи с чем амперметр нельзя считать идеальным.



Выданная проволока неизолированная, так что при помещении её в воду важно, чтобы не было касания (т.е. электрического контакта) друг с другом витков проволоки. Если допустить контакты между витками проволоки, то они могут смещаться при наливании воды, меняя сопротивление проволоки.

Этого можно добиться, например, сделав в маленьком стаканчике отверстия канцелярской кнопкой и пропустив через них проволоку. Обратим внимание, что сопротивление проволоки не меняется при помещении её в воду комнатной температуры.

$t, {}^\circ$C	U, мВ	I, мА	$\Delta R/R_0$
33,7	46,5	45,2	0 ,000
Остывание			
87,0	51,2	41,9	0,188
85,0	51,1	42,0	0,183
83,0	51,1	42,1	0,180
81,0	50,8	42,3	0,167
79,0	50,6	42,4	0,160
77,0	50,5	42,5	0,155
75,0	50,3	42,6	0,148
73,0	50,0	42,8	0,136
71,0	49,8	42,9	0,128
69,0	49,7	43,0	0,124
67,0	49,6	43,2	0,116
65,0	49,4	43,3	0,109
63,0	49,2	43,4	0,102
61,0	49,1	43,5	0,097
59,0	48,9	43,7	0,088
58,0	48,8	43,7	0,085
57,0	48,6	43,7	0,081
56,0	48,6	43,8	0,079
55,0	48,4	43,9	0,072
54,0	48,4	43,9	0,072
53,0	48,3	43,9	0,069
52,0	48,2	44,0	0,065
51,0	48,0	44,0	0,060
41,5	47,0	44,6	0,024



Схематичный вид стакана с проволокой

Полученную систему опустим в большой стакан с горячей водой. Не меняя значение напряжения на источнике, снимем значения силы тока I и напряжения U на концах куска проволоки при разных температурах воды t. Для расчёта R_0 используем данные, полученные при практически комнатной температуре.

Как уже говорилось ранее, температурная зависимость сопротивления определяется формулой $R = R_0(1 + \alpha\Delta t)$, поэтому в координатах $\Delta R/R_0$ от t график должен быть линейным.

Погрешность t составляет 0,3°C, погрешность $\Delta R/R_0$ определяется аналогично прошлому пункту. Отметим, что основной вклад в погрешность вносит погрешность термометра.

Пока производим расчёты, вода успевает остыть. Это даёт возможность снять две дополнительных точки при более низких температурах.

С помощью графика, который получился линейным, определяем угловой коэффициент $k_4 = (3{,}60 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Этот угловой коэффициент совпадает с температурным коэффициентом сопротивления $\alpha = k_4 = (3{,}60 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Табличное значение температурного коэффициента сопротивления для меди: $\alpha_{\mathrm{Cu}} = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

С учётом значения $\beta/\alpha = (4{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, найденного в предыдущем пункте, вычисляем $\beta = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Табличное значение температурного коэффициента расширения для меди $\beta_{\mathrm{Cu}} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

$$\beta = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}.$$

Примечание: Температурная зависимость сопротивления определяется не только зависимостью ее удельного сопротивления $\Delta\rho/\rho = \gamma\Delta t$ от температуры но и изменением ее геометрических размеров: $\Delta l/l = \beta\Delta t$, $\Delta S/S = \Delta(r^2)/r^2 = 2r\Delta r/r^2 = 2\beta\Delta t$, так как они все вместе входят в конечную формулу $R = \rho l/S$.

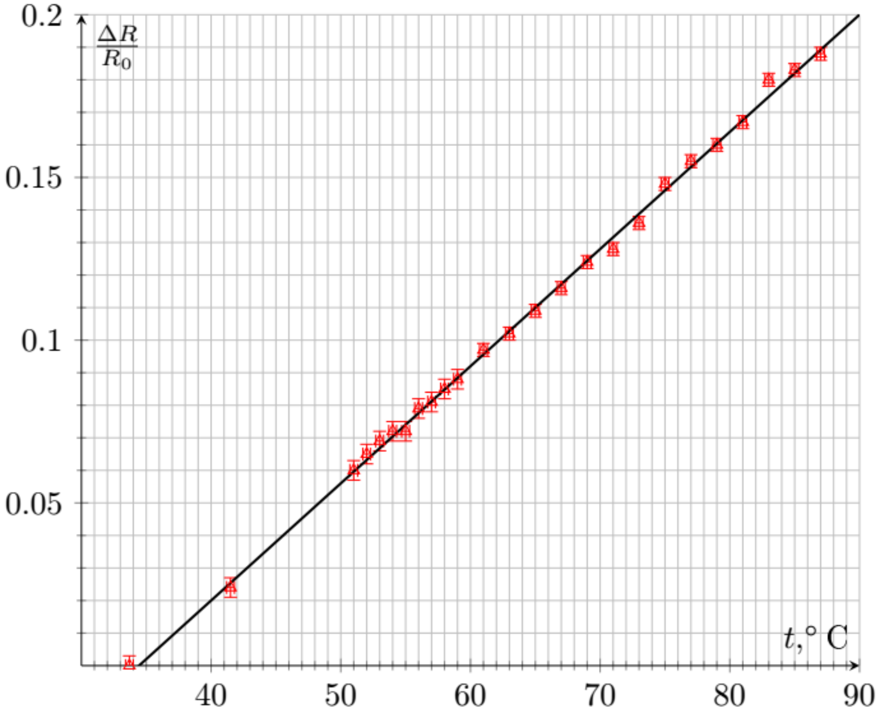


График $\Delta R/R_0$ от T

Итого:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta S}{S} = (\gamma - \beta)\Delta t,$$

но в нашем случае $\beta \ll \gamma$, поэтому $\alpha \simeq \gamma$. Учет этих факторов никаким образом не влияет на представленное решение задачи.

Задача №11-Е1. Немокрая вода

Положим на весы шприц объемом 10 мл, обнулим показания весов. Перельем «сухую воду» из бутылки в баночку. Наберем из баночки в шприц объем $V = (9{,}8 \pm 0{,}1)$ мл жидкости. Положим шприц на весы и запишем их показания $m = (15{,}94 \pm 0{,}16)$ г. Выльем сухую воду в баночку. Рассчитаем плотность жидкости:

$$\rho = \frac{m}{V} = (1{,}63 \pm 0{,}03)\ \text{г/см}^3 \tag{5}$$

Погрешность полученного значения рассчитаем через сумму относительных погрешностей измеренных массы и объема:

$$\sigma_\rho = \rho\left(\frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_V}{V}\right) = 0{,}03\ \text{г/см}^3. \tag{6}$$

Измерим площадь поперечного сечения толстой силиконовой трубки. Для этого наберем в шприц объемом 1 мл воду. Наденем на шприц трубку. Вытолкнем часть воды из шприца в трубку и сделаем отметку на трубке. Запишем значение объема воды в шприце $v_{1б} = (0{,}96 \pm 0{,}01)$ мл. Надавим на поршень шприца так, чтобы большая часть воды из шприца переместилась в трубку. Сделаем еще одну отметку на трубке в месте положения мениска. Запишем конечное значение объема воды в шприце $v_{2б} = (0{,}12 \pm 0{,}01)$ мл. Измерим расстояние между отметками на трубке $l_б = (11{,}5 \pm 0{,}1)$ см. Рассчитаем сечение трубки:

$$s_б = \frac{v_{1б} - v_{2б}}{l_б} = (7{,}30 \pm 0{,}24)\ \text{мм}^2. \tag{7}$$

Погрешность полученного значения рассчитаем через сумму относительных погрешностей объема воды в трубке и длины ее столба:

$$\sigma_{s_б} = s_б\left(\frac{2\sigma_v}{v_{1б} - v_{2б}} + \frac{\sigma_{l_б}}{l_б}\right) = 0{,}24\ \text{мм}^2. \tag{8}$$

Наберем в шприц объемом 10 мл воду. Наденем на носик шприца трубку. Нажмем на поршень шприца, чтобы часть воды оказалась в трубке. Также запишем объем воды в шприце $V_0 = (10{,}5 \pm 0{,}2)$ мл. Нальем холодную воду в мерный цилиндр. Измерим ее температуру $T_{cw} = (18{,}8 \pm 0{,}3)$°C. Поместим в воду шприц, подвесив его за трубку в лапке штатива. Через некоторое время мениск в трубке перестанет передвигаться. Отметим местоположение мениска в трубке ручкой. Вынем шприц из воды. Выльем часть холодной воды из мерного цилиндра и добавим горячую воду в таком количестве, чтобы температура смеси была около 30°C. Измерим температуру воды $T_{hw} = (31{,}8 \pm 0{,}3)$°C термометром. Поместим в воду шприц и вновь дождемся момента, когда мениск воды в трубке перестанет двигаться. Видно, что с учетом точности измерений мениск практически не сдвинулся. Последнее означает, что объем внутри шприца из-за расширения пластика увеличился примерно также, как и объем воды. То есть объемные коэффициенты расширения шприца и воды в пределах точности эксперимента одинаковы. В указанном диапазоне температур этот коэффициент можно рассчитать, зная значения плотности воды в указанном диапазоне температур:

$$\beta_{\text{воды}} = \frac{\Delta\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}(T_{40} - T_{20})} = 0{,}35 \cdot 10^{-3}. \tag{9}$$

Проведем аналогичный опыт с «сухой водой», заполним шприц тем же объемом, чтобы изменение объема шприца происходило аналогичным образом. В результате опыта при изменении температуры жидкости от $T_{cn} = (16{,}8 \pm 0{,}3)^\circ$C до $T_{hn} = (35{,}0 \pm 0{,}3)^\circ$C мениск переместился в строну от носика на расстояние $l_n = (4{,}4 \pm 0{,}1)$ см.

Запишем геометрические соотношения для объемов в данном случае:

$$l_n s = (\beta - \beta_{\text{воды}})V_0(T_{hn} - T_{cn}), \tag{10}$$

откуда для коэффициента объемного расширения жидкости имеем:

$$\beta = \frac{l_n s}{(T_{hn} - T_{cn})V_0} + \beta_{\text{воды}} = (2{,}0 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,{}^\circ\text{C}^{-1} \tag{11}$$

Рассчитаем погрешность измеренной величины:

$$\sigma_\beta = (\beta - \beta_{\text{воды}})\left(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_{l_n}}{l_n} + \frac{2\sigma_T}{T_{hn} - T_{cn}}\right) = 0{,}1 \cdot 10^{-3}\,{}^\circ\text{C}^{-1} \tag{12}$$

Табличное значение составляет $\beta_{\text{табл}} = 1{,}84 \cdot 10^{-3}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$.

Наберем в шприц объемом 1 мл воду. Наденем на кончик шприца розовую иглу, на которую в свою очередь наденем силиконовую трубку. Нажмем на поршень шприца, выдавив в трубку небольшое количество воды. Отметим на трубке ручкой положение мениска воды. Запишем объем воды в шприце в этот момент $v_1 = (0{,}98 \pm 0{,}01)$ мл. Протолкнем воду в трубке практически до конца трубки. Сделаем вторую отметку на трубке. Запишем значение объема воды в шприце в этом случае $v_2 = (0{,}50 \pm 0{,}01)$ мл. Измерим линейкой расстояние $l = (59{,}3 \pm 0{,}2)$ мм между отметками на трубке. Рассчитаем площадь поперечного сечения трубки:

$$s = \frac{v_1 - v_2}{l} = (0{,}81 \pm 0{,}04)\ \text{мм}^2 \tag{13}$$

Погрешность полученного значения рассчитаем через сумму относительных погрешностей объема воды в трубке и длины ее столба:

$$\sigma_s = s\left(\frac{2\sigma_v}{v_1 - v_2} + \frac{\sigma_l}{l}\right) = 0{,}04\ \text{мм}^2. \tag{14}$$

В этой части работы будем использовать шприц объемом 10 мл. Измерим линейкой высоту $H = (5{,}7 \pm 0{,}1)$ см, соответствующую $V_{10} = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ мл его шкалы. Соберем установку, изображенную на рисунке 1. Для этого нальем сухую воду в баночку. В крышку банки вставим один конец трубки. Наберем в шприц «сухую воду». Подсоединим к шприцу с помощью розовой иглы силиконовую трубку. Закрепим шприц в штативе так, чтобы высота начала шкалы была немного выше уровня конца трубки, вставленного в банку. Выдернем поршень из шприца, после чего жидкость начнет движение по трубке. Измерим зависимость $V(t)$ объема жидкости в шприце от времени.

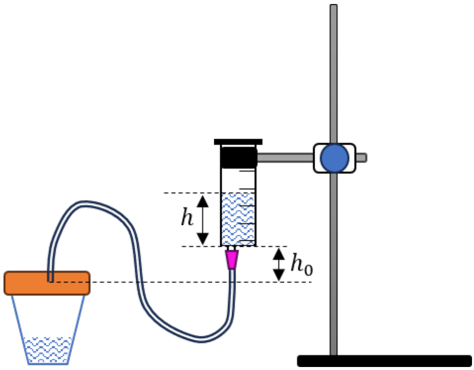


Рис. 1. Установка для измерения вязкости жидкости

После снятия зависимости измерим разность высот начала шкалы шприца и конца силиконовой трубки, вставленного в банку $h_0 = (1{,}2 \pm 0{,}2)$ см. Разница давлений на концах силиконовой трубки определяется высотой h столба жидкости в шприце:

$$h = V\frac{H}{V_{10}}. \tag{15}$$

Тогда, согласно формуле Пуазейля, для объемного потока жидкости можно записать:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{s^2\rho g\left(V\frac{H}{V_{10}} + h_0\right)}{8\pi\eta l}. \tag{16}$$

Разделим переменные:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V\frac{H}{V_{10}} + h_0} = -\frac{s^2\rho g\,\mathrm{d}t}{8\pi\eta l}. \tag{17}$$

И проинтегрируем:

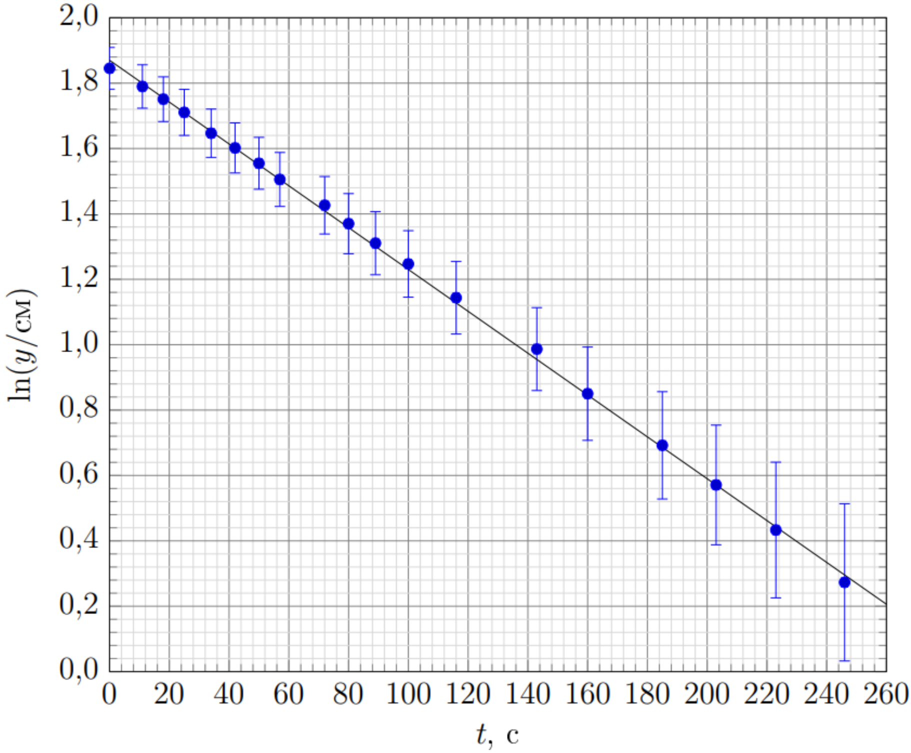
$$\ln\left(V\frac{H}{V_{10}} + h_0\right) = -\frac{Hs^2\rho g t}{8V_{10}\pi\eta l} + \mathrm{const}\,. \tag{18}$$

Введем для удобства величину $y = V\frac{H}{V_{10}} + h_0$ (суть которой в движущей силе жидкости в трубке). Рассчитаем величину $\ln y$ в таблице. Построим график зависимости $\ln y(t)$.

Погрешность времени примем равной $\sigma_t = 1$ с. Абсолютная погрешность $\ln y$ равна относительной погрешности y:

$$\sigma_{\ln y} = \frac{\sigma_{h_0} + V\frac{H}{V_{10}}\left(\frac{\sigma_V}{V} + \frac{\sigma_H}{H}\right)}{V\frac{H}{V_{10}} + h_0} \tag{19}$$

t, с	V, мл	y, см	$\ln(y/\text{см})$	$\sigma_{\ln(y/\text{см})}$
0	9,0	6,3	1,85	0,06
11	8,4	6,0	1,79	0,07
18	8,0	5,8	1,75	0,07
25	7,6	5,5	1,71	0,07
34	7,0	5,2	1,65	0,07
42	6,6	5,0	1,60	0,08
50	6,2	4,7	1,55	0,08
57	5,8	4,5	1,51	0,08
72	5,2	4,2	1,43	0,09
80	4,8	3,9	1,37	0,09
89	4,4	3,7	1,31	0,10
100	4,0	3,5	1,25	0,10
116	3,4	3,1	1,14	0,11
143	2,6	2,7	0,99	0,13
160	2,0	2,3	0,85	0,14
185	1,4	2,0	0,69	0,16
203	1,0	1,8	0,57	0,18
223	0,6	1,5	0,43	0,21
246	0,2	1,3	0,27	0,24



Видно, что экспериментальные точки на графике хорошо описываются линейной функцией с модулем углового коэффициента:

$$k = \frac{Hs^2\rho g}{8V_{10}\pi\eta l} = (6{,}4 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-3}\ \text{с}^{-1}. \tag{20}$$

Измерим полную длину силиконовой трубки $l = (63{,}5 \pm 1{,}0)$ см. Погрешность здесь оценим в $\sigma_l = 1{,}0$ см, так как игла имеет примерно такую длину, и ее гидродинамическое сопротивление неизвестно. Рассчитаем на основе полученных данных динамическую вязкость жидкости:

$$\eta = \frac{Hs^2\rho g}{8V_{10}\pi kl} = (5{,}8 \pm 1{,}2)\cdot 10^{-4}\ \text{Па}\cdot\text{с}. \tag{21}$$

Погрешность полученного значения оценим, сложив относительные погрешности, входящих в формулу величин:

$$\sigma_\eta = \eta\left(\frac{\sigma_H}{H} + \frac{2\sigma_s}{s} + \frac{\sigma_\rho}{\rho} + \frac{\sigma_k}{k} + \frac{\sigma_l}{l}\right) = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{Па}\cdot\text{с}. \tag{22}$$

Табличное значение динамической вязкости, полученное через произведение кинематической вязкости ν и плотности жидкости, для температуры в 25 °C составляет:

$$\eta_{\text{табл}} = \nu \cdot \rho = 0{,}39 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{3} \text{ Па} \cdot \text{с} = 6{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Проверим, что движение жидкости в трубке является ламинарным. Для этого оценим число Рейнольдса для экспериментальной точки с максимальным объемным расходом.

$$\mathrm{Re}_{max} = \frac{Q_{max}\rho}{D\eta} = \frac{(9 - 8{,}4) \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{3}}{11 \cdot 5{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} = 150 < \mathrm{Re}_{\text{кр}}. \tag{23}$$

Для определения молярной массы жидкости необходимо узнать, сколько молей содержится в порции этого вещества определенной массы. Наиболее простой способ – превратить это вещество в газ при известных внешних параметрах: температура и давление. Поместим определенную порцию жидкости в сосуд под подвижный поршень, с противоположной стороны которого атмосферное давление, и начнем нагревать. При достижении температуры кипения давление паров жидкости достигнет атмосферного давления, и поршень придет в движение. Дальнейшее повышение температуры приведет к тому, что вся жидкость выкипит и получившийся газ расширится так, чтобы его давление сравнялось с атмосферным. В этом случае будут известными давление вещества, его объем и температура, по которым легко определить количество молей вещества в газообразном состоянии.

Реализуем идею на имеющемся оборудовании. В качестве сосуда с подвижным поршнем будем использовать шприц объемом 60 мл. В описанной выше теоретической модели важно, чтобы поршень имел небольшую силу трения о стенки шприца по сравнению с силой атмосферного давления. Для проверки этого параметра наберем в шприц $V_{\text{нач}} = 60$ мл воздуха, заткнем пальцем носик шприца, нажмем на поршень, а затем отпустим его. Поршень начнет возвращаться обратно, через некоторое небольшое время поршень остановится примерно на отметке в $V_{\text{кон}} = V_{\text{нач}} - \Delta V = 59$ мл. Можно ввести поправку на избыточное давление, связанное с трением поршня. В предположении о независимости силы трения в шприце от положения поршня давление в шприце, при движении поршня в сторону увеличения, объема будет равным:

$$p_0' = p_0 \frac{V_{\text{нач}}}{V_{\text{кон}}} \approx p_0 + p_0 \frac{\Delta V}{V_{\text{нач}}} = p_0 + \Delta p_0 = (102 \pm 2) \text{ кПа}. \tag{24}$$

То есть будет больше атмосферного на величину $\Delta p_0 = 2$ кПа. Погрешность давлений p_0 и p_0' будем в дальнейшем принимать равным 2 кПа.

Переместим поршень шприца на отметку в 0 мл. Наденем на носик шприца резиновую пробочку. Положим шприц на весы и обнулим показания весов. Наберем в шприц объемом 1 мл приблизительно 0,2–0,3 мл «сухой воды». Проткнем иглой шприца резиновую пробочку и введем в большой шприц жидкость. Вытащим из пробочки иглу малого шприца и вновь положим большой шприц на весы. Показания весов $m = (0{,}57 \pm 0{,}02)$ г будут равны массе «сухой воды» в большом шприце.

Нальем в мерный цилиндр горячую воду и опустим туда шприц, прижав его корпус к верхнему торцу цилиндра лапкой штатива. Если температура в цилиндре превышает температуру кипения, то жидкость в шприце достаточно быстро закипит, и поршень шприца придет в движение. Через некоторое время поршень шприца остановится и далее будет медленно опускаться с падением температуры внутри цилиндра. Будем считать, что в эти моменты газ в шприце и вода в мерном цилиндре находятся в тепловом равновесии, то есть их температуры равны. Измерим в этот момент объем газа в шприце $V = (50{,}0 \pm 0{,}5)$ мл и температуру в мерном цилиндре $T = (69{,}5 \pm 0{,}3)$ °C $= (342{,}7 \pm 0{,}3)$ K.

Запишем закон Менделеева–Клапейрона для газа внутри шприца:

$$p_0' V = \frac{m}{\mu} RT. \tag{25}$$

Откуда для молярной массы получаем:

$$\mu = \frac{m}{p_0' V} RT = 319 \text{ г/моль}. \tag{26}$$

Систематическую погрешность значения оценим как сумму относительных погрешностей входящих величин:

$$\sigma_{\text{систематич.}\mu} = \mu \left(\frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_{p_0'}}{p_0'} + \frac{\sigma_V}{V} + \frac{\sigma_T}{T} \right) = 21 \text{ г/моль}. \tag{27}$$

Для того, чтобы убедиться в достоверности результата, можно провести эксперимент повторно.

m, г	V, мл	T, °C	μ, г/моль
0,57	50,0	69,5	319
0,51	41,5	64,4	338
0,36	29,0	57,5	334

По полученным результатам оценим случайную погрешность полученных значений как $\sigma_{\text{случ.}\mu} = 10$ г/моль. Окончательно для молярной массы имеем

$$\mu = (330 \pm 30)\ \text{г/моль}$$

Табличное значение составляет $\mu_{\text{табл}} = 316$ г/моль.

Для измерения давления насыщенного пара жидкости при температурах ниже температуры кипения необходимо, чтобы под поршнем шприца находился не только пар, но и воздух, так как давление паров меньше атмосферного. То есть тогда сумма давления воздуха $p_{\text{в}}$ и давления насыщенного пара $p_{\text{нп}}$ будет равна давлению p_0':

$$p_0' = p_{\text{нп}} + p_{\text{в}}. \tag{28}$$

Вынем поршень из большого шприца и подождем некоторое время. Продуем его и вставим поршень обратно, тем самым добившись того, что шприц будет заполнен только воздухом. Установим шприц на отметку $V_0 = (30{,}0 \pm 0{,}5)$ мл при атмосферном давлении и комнатной температуре $T_0 = (22{,}2 \pm 0{,}3)\ {}^\circ\text{C} = (295{,}4 \pm 0{,}3)$ К. Закроем носик шприца пробкой. Проткнем пробку иглой шприца объемом 1 мл и введем приблизительно 0,3 мл «сухой воды» в шприц. Этого количества жидкости будет достаточно для того, чтобы в дальнейшем часть вещества оставалась в жидком состоянии, и пар был насыщенным. Вынем иглу малого шприца из пробки. Жидкость в шприце начнет испаряться, поршень начнет двигаться. Его движение прекратится, когда давление воздуха уменьшится до разности атмосферного давления и давления насыщенного пара жидкости. При испарении жидкость остывает, поэтому системе требуется некоторое время, чтобы прийти в тепловое равновесие с окружающей средой. Немного потрясем шприц так, чтобы жидкость омыла внутреннюю поверхность стенок шприца, и подождем время 5–10 мин, периодически отмечая положение поршня. Когда положение поршня перестанет меняться, запишем значение объема газа в шприце $V_{\text{в}} = (49{,}0 \pm 0{,}5)$ мл.

Давление воздуха в шприце легко рассчитать на основе закона Бойля–Мариотта:

$$p_{\text{в}} = p_0 \frac{V_0}{V}. \tag{29}$$

Давление пара выражается разностью давления p_0' и давления воздуха в шприце:

$$p_{\text{нп}} = p_0' - p_0 \frac{V_0}{V} = p_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) + \Delta p_0 = (40{,}8 \pm 2{,}4)\ \text{кПа}. \tag{30}$$

Погрешность величины оценим как:

$$\sigma_{p_{\text{нп}}} = (p_{\text{нп}} - \Delta p_0) = \left(\frac{\sigma_{p_0}}{p_0} + \frac{\frac{V_0}{V}\left(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_V}{V}\right)}{1 - \frac{V_0}{V}} \right) = 2{,}4\ \text{кПа}. \tag{31}$$

Выбор второй точки обусловлен двумя факторами: точностью измерений и удаленностью по температуре от комнатной температуры. Точка, отвечающая равенству давления паров атмосферному давлению, то есть соответствующая температуре кипения жидкости, удовлетворяет одновременно обоим условиям. Действительно, если выбрать другую точку, то погрешность измерения температуры будет определяться не только приборной погрешностью термометра, но и предположением о равенстве температур внутри шприца и окружающей его среды, ведь поместить термометр в закрытый шприц не представляется возможным. С другой стороны, при расчете давления в погрешность внесут вклад не только погрешность атмосферного давления, но и погрешности измерения объемов в шприце. Измерение же давления паров при более высоких температурах, чем температура кипения, с помощью данного оборудования крайне затруднительно.

Определить температуру кипения совсем несложно. Для этого нальем небольшое количество жидкости в банку и пустим баночку плавать в горячей воде. Жидкость через некоторое время закипит, ее температура при этом составит

$$T_{\text{кип}} = (50{,}8 \pm 0{,}3)\ ^\circ\text{C} = (332{,}0 \pm 0{,}3)\ \text{K}$$

Рассчитаем величину удельной теплоты парообразования жидкости:

$$L = \frac{R}{\mu}\frac{T_0 T_{\text{кип}}}{T_{\text{кип}} - T_0}\ln\frac{p_0}{p_{\text{нп}}} = (76 \pm 13)\ \text{Дж/г}. \tag{32}$$

Погрешность величины оценим по следующей формуле:

$$\sigma_L = L\left(\frac{2\sigma_T}{T_{\text{кип}} - T_0} + \frac{\sigma_\mu}{\mu} + \frac{\frac{V_0}{V}\left(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_V}{V}\right)}{\left(1 - \frac{V_0}{V}\right)\ln\left(1 - \frac{V_0}{V}\right)}\right) = 13\ \text{Дж/г}. \tag{33}$$

Табличное значение при температуре кипения($T_{\text{кип.табл.}} = 49{,}2^\circ\text{C}$) составляет $L_{\text{табл}} = 88$ Дж/г.

Наполним кювету жидкостью. На листе бумаги нарисуем достаточно контрастную точку. Поставим кюветы на лист бумаги так, чтобы точка оказалась под плоской частью дна кюветы. Если смотреть на боковую поверхность кюветы, то точка, расположенная под ее дном, видна не со всех ракурсов (см. рис. 2).

Свет, рассеянный точкой, распространяется внутри кюветы в соответствии с законом Снеллиуса внутри конуса с половинным углом раствора:

$$\alpha_{\text{кр}} = \arcsin\frac{1}{n}. \tag{34}$$

Лучи, попадая на боковую поверхность кюветы, выходят из нее преломляясь. При этом область видимости точки ограниченна крайним лучем, который падает на боковую поверхность кюветы под углом $(90^\circ - \alpha_{\text{кр}})$. Преломляясь, этот луч

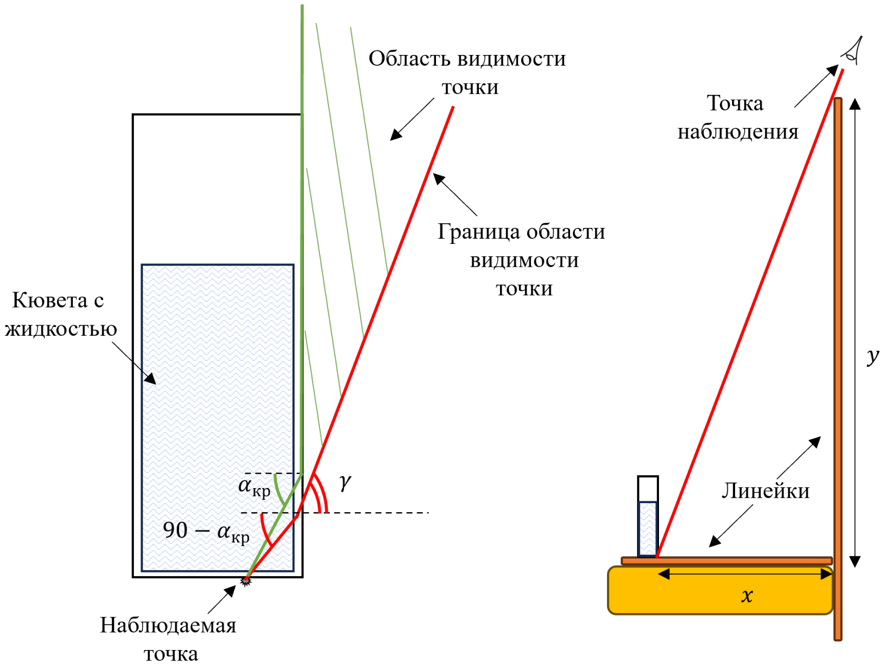


Рис. 2. Схема измерения показателя преломления жидкости

выходит из боковой поверхности кюветы под углом γ. Запишем закон преломления света для этого крайнего луча:

$$n\sin\left(90^\circ - \alpha_{кр}\right) = n\cos(\alpha_{кр}) = \sqrt{n^2-1} = \sin\gamma. \tag{35}$$

Таким образом для показателя преломления имеем:

$$n = \sqrt{1+\sin^2\gamma}. \tag{36}$$

Измерим этот угол с помощью линеек. Одной линейкой будем измерять горизонтальное расстояние между краем стола и кюветой, а другую прижмем к торцу столешницы в вертикальном положении. Найдем положение головы, при котором точка начинает исчезать. Подвинем верхний конец вертикальной линейки на линию наблюдения точки. Измерим расстояние между торцом стола и кюветой $x = (36{,}1 \pm 0{,}2)$ см и расстояние между верхним торцом вертикальной линейки $y = (45{,}5 \pm 1{,}0)$ см. Погрешность измерения вертикального расстояния оценим в

$\sigma_y = 1$ см из-за субъективности наблюдателя при суждении о пропадании и появлении точки, а также из-за того, что точно не определена точка выхода лучей из кюветы. Можем записать для угла преломления наблюдаемого луча:

$$\gamma = \arctan \frac{y}{x} = 51{,}6^\circ. \tag{37}$$

Систематическую погрешность оценим методом границ:

$$\sigma_{\text{сист.}\gamma} = \frac{\arctan \frac{y+\sigma_y}{x-\sigma_x} - \arctan \frac{y-\sigma_y}{x+\sigma_x}}{2} = 0{,}8^\circ. \tag{38}$$

Случайную погрешность $\sigma_{\text{случ.}\gamma} \approx 2^\circ$ можно оценить, проведя опыты несколько раз для разных расстояний x. Тогда окончательно для угла преломления луча запишем $\gamma = (51{,}6 \pm 3{,}0)^\circ$.

Рассчитаем на основе полученного значения показатель преломления жидкости. Погрешность также оценим методом границ.

$$n = (1{,}27 \pm 0{,}02)$$

Заметим, что стенки кюветы на самом деле не вертикальны, однако более детальные расчеты показывают, что существенной ошибки в измерениях от этого не происходит. Табличное значение показателя преломления $n_{\text{табл.}} = 1{,}264$.

Данные, указанные в решении, получены на авторском оборудовании. Длины трубок и точность шкал шприцев могут быть отличным от выданного участникам олимпиады. Все диапазоны численных значений и погрешностей, по которым жюри будет оценивать работы, указаны в критериях оценивания. Табличные данные доступны по ссылкам:

- `https://multimedia.3m.com/mws/media/1626453O/novec-1230-datasheet-ru-2018.pdf`
- `https://www.chemspider.com/Chemical-Structure.2062563.html`