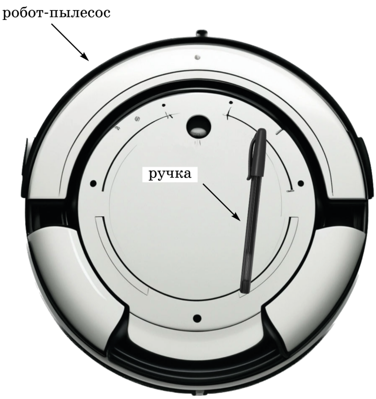
7 класс
Теоретический тур

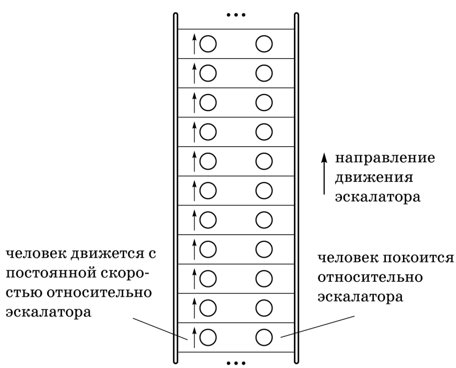
Задача №1. Робот-пылесос



Экспериментатор Глюк приобрел робот-пылесос iBot PylSosung и решил его опробовать. Оказалось, что робот может качественно убрать пустую комнату в квартире площадью 250 000 [. . .] за 30 [. . .]. Для того чтобы убраться качественно, пылесос проходит по каждому участку комнаты ровно 3 раза. Глюк посчитал, что средняя скорость пылесоса при уборке равна 50 000 [. . .]. Однако, он забыл указать, в каких единицах записаны эти величины. Опираясь на ваш жизненный опыт, восстановите пропущенные единицы измерения, а также найдите ширину (диаметр) пылесоса.

Глюк точно помнил, что расстояние и площадь он измерял, соответственно, в обычных и квадратных миллиметрах, сантиметрах, метрах или километрах. Время — в секундах, минутах или часах. Площадью мертвых зон комнаты (мест, в которые пылесос не может добраться, например, углов) можно пренебречь.

Задача №2. Час пик

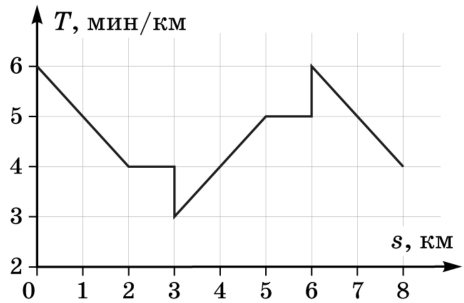


В часы пик на движущемся вверх с неизвестной скоростью u эскалаторе метрополитена на каждой ступеньке находятся по два человека. Справа люди просто стоят, а слева — поднимаются с неизвестной постоянной скоростью v. Человек, стоящий справа, подсчитал, что за время его подъёма по эскалатору, слева от него успевают пройти N_1 людей. Человек, идущий по эскалатору, подсчитал, что за время его подъёма, он проходит мимо N_2 стоящих людей.

1. Что больше: N_1 или N_2?

2. Сколько людей N одновременно находятся на эскалаторе? Ответ необходимо выразить через величины N_1 и N_2.

Задача №3. Рекорды скорости



Семиклассник Стас тренируется бегать на длинные дистанции. Во время пробежки смартфон следит за положением Стаса при помощи сигнала GPS и рассчитывает темп бега T в минутах на километр. После окончания пробежки смартфон показывает график зависимости темпа бега от расстояния s, которое пробежал спортсмен с момента старта (см. рисунок). С помощью графика этой зависимости определите:

1. Чему равнялись максимальная и минимальная скорости во время пробежки? Выразите эти скорости в километрах в час.
2. За какое минимальное время Стас пробегал участок длиной в один километр? Участок может начинаться в любой части дистанции.
3. За какое минимальное время Стас пробегал участок длиной в пять километров? Участок может начинаться в любой части дистанции.

Задача №4. Консервированные снежки

У Бабы Яги в школе никогда не было уроков физики, но были уроки домоводства и огромное желание заготовить на лето снежки. Помня школьные уроки, она решила воспользоваться рецептом по засолке огурцов. Зимой Баба Яга слепила очень плотные снежки, которые снаружи покрыла тонкой корочкой льда. Этими снежками она до краёв наполнила берёзовую кадушку объёмом $V = 12$ л, масса снежков при этом оказалась $m_1 = 4$ кг. Все пустоты между снежками она засыпала поваренной солью, затем залила кадушку доверху холодной водой и выставила её на улицу. На следующий день она с удивлением обнаружила в кадушке только очень солёную воду.

Известно, что в кадушку помещается $m_2 = 6$ кг плотно утрамбованного снега, плотность которого совпадает с плотностью снега в снежках. Считайте, что за время заполнения кадушки вода проникает между крупинками соли, но ледяная корочка предохраняет снежки от намокания. Консервирование снежков происходит быстро, и соль не успевает прореагировать со снежками. При растворении соли в воде объёмы воды и соли складываются. Поваренная соль, купленная Бабой Ягой, была насыпана в пачки размерами $18 \times 10 \times 6$ см и массой $m_п = 1$ кг. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность кристаллической поваренной соли $\rho_с = 2150$ кг/м^3. Массой и объёмом ледяной корочки снежка можно пренебречь.

1. Определите насыпную плотность $\rho_{нас}$ поваренной соли.
2. Какая масса m_c соли была насыпана в кадушку?
3. Какой объём $V_в$ занимает солёная вода?

4. Чему равна масса M солёной воды в кадушке?
5. Чему равна плотность $\rho_к$ солёной воды в кадушке?

7 класс

Задача №7-Т1. Робот-пылесос

Комнаты в квартирах обычно имеют площадь, не превышающую нескольких десятков квадратных метров. Поэтому, можно предположить, что площадь измерялась в см^2 .

Вряд ли пылесос сможет убрать такую площадь за 30 секунд, это очень маленькое время, а 30 часов, напротив, время очень большое. Вряд ли мы бы стали пользоваться таким медленным пылесосом. Поэтому время измеряется в минутах.

Ширина пылесоса должна иметь значение порядка нескольких десятков сантиметров.

Величины, задействованные в задаче связаны между собой формулой:

$$v = \frac{3S}{d \cdot t},$$

где S – площадь комнаты, d – ширина пылесоса, а t – время уборки.

Попробуем подставить в формулу наши значения для площади и времени, а в качестве ширины возьмём величину, близкую по порядку $(20 - 40$ см), например, 20 см. И определим, в каких единицах измерения скорость будет иметь порядок сотен:

$$v = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{20 \text{ см} \cdot 30 \text{ мин}} = 1250 \ \frac{\text{см}}{\text{мин}} = \frac{1250 \cdot 0{,}01 \text{ м}}{\frac{1}{60} \text{ ч}} = 750 \ \frac{\text{м}}{\text{ч}} = 75000 \ \frac{\text{см}}{\text{ч}} = 12500 \ \frac{\text{мм}}{\text{мин}}.$$

Таким образом, очень вероятно, что скорость посчитана в см/ч. Проверим это предположение, посчитав ширину пылесоса:

$$d = \frac{3S}{vt} = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{50000 \ \frac{\text{см}}{\text{ч}} \cdot 30 \text{ мин}} = \frac{3 \cdot 25 \text{ м}^2}{500 \ \frac{\text{м}}{\text{ч}} \cdot 0{,}5 \text{ ч}} = 0{,}3 \text{ м} = 30 \text{ см}.$$

Полученное значение ширины совпадает с ожиданиями; значит, наши предположения были верны.

Можно было также проверить теорию, что скорость посчитана в мм/мин. Однако в этом случае диаметр получился бы в 6 раз меньше – 5 см, что, очевидно, слишком мало.

Задача №7-Т2. Час пик

Обозначим длину одной ступеньки эскалатора l_0, скорость эскалатора u, собственную скорость идущих людей v, а число ступенек эскалатора N_0. Время движения человека, стоящего на эскалаторе $t_{\text{стоя}} = \frac{N_0 l_0}{u}$. Время движения человека, идущего по эскалатору $t_{\text{ид}} = \frac{N_0 l_0}{u+v}$. В системе отсчёта эскалатора (или стоящего на эскалаторе человека) относительно стоящего человека проходит колонна людей со скоростью v. Длина этой колонны $vt_{\text{стоя}} = \frac{v}{u}N_0 l_0$, а значит людей в этой колонне

$$N_1 = \frac{v}{u}N_0 \tag{1}$$

В системе отсчёта человека, идущего по эскалатору, справа от него во встречном к нему направлении идет колонна людей со скоростью v. Длина этой колонны $vt_{\text{ид}} = \frac{v}{v+u}N_0 l_0$, а значит людей в этой колонне

$$N_2 = \frac{v}{v+u}N_0 \tag{2}$$

Из свойств дробей получаем, что $N_2 < N_1$, то есть N_1 больше. На этот вопрос можно было ответить и из качественных соображений: каждый раз, когда люди слева делают шаг, они встречают нового соседа справа, а люди справа встречают соседа слева. То есть частота встречи нового соседа у левых и правых людей одинакова. Но те, кто находятся на эскалаторе дольше, встречают больше людей.

Из (1) и (2) уравнений следует, что $N_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2}$. Людей на эскалаторе в два раза больше, чем ступенек

$$N = 2N_0 = \frac{2N_1 N_2}{N_1 - N_2}$$

Задача №7-Т3. Рекорды скорости

Темп бега – величина обратная к скорости $T = \frac{1}{v}$. Поэтому чем меньше темп бега, тем больше скорость.

Минимальный темп бега 3 мин/км, что соответствует скорости 20 км/час. Максимальный темп бега 6 мин/км, что соответствует скорости 10 км/час.

При движении с постоянной скоростью v время движения на участке s можно вычислить как $t = \frac{s}{v} = sT$. Поэтому время движения на каком-то участке пропорционально площади под графиком зависимости темпа бега от расстояния на этом участке. Минимальному времени, за которое спортсмен пробежал один километр, соответствует участок графика, площадь под которым минимальна. При подсчете площади под графиком необходимо учитывать, что на графике, приведенном в условии, смещено начало координат. Из графика видно, что минимальное время одного километра было на участке с третьего по четвертый километры. Так как площадь одной клетки графика пропорциональна одной минуте, минимальное время, затраченное на прохождение одного километра, равно 3,5 мин.

Минимальное время одного километра на участке с третьего по четвертый километры и равно 3,5 минуты.

Минимальное время на участке длиной 5 км с первого по шестой километры и равно 21,5 минуты.

Задача №7-Т4. Консервированные снежки

Между снежками, насыпанными в кадушку, существуют пустоты. Так как $m_2 = 6$ кг плотно утрамбованного снега занимают всю кадушку, то $m_1 = 4$ кг снега такой же плотности в снежках имеют объём, равный $\frac{2V}{3}$, то есть 8 литров. Следовательно, на пустоты между снежками приходится объём $\frac{V}{3} = 4$ литра. Засыплем эти пустоты солью. Так как соль состоит из крупинок, то после засыпания солью пустот между снежками, останутся пустоты между крупинками соли, но объём пустот станет меньше. Для нахождения объёма пустот между крупинками соли нам нужна насыпная плотность соли. Определим её, зная, что килограммовая пачка соли имеет объём

$$V_{\text{пачки}} = 18 \cdot 10 \cdot 6\ \text{см}^3 = 1080\ \text{см}^3.$$

Тогда насыпная плотность соли равна

$$\rho_{\text{нас}} = \frac{1000}{1080} \approx 0{,}93\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 930\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Определим массу соли, насыпанной в кадушку

$$m_{\text{с}} = \rho_{\text{нас}} \cdot \frac{V}{3};$$

$$m_{\text{с}} = 930 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3{,}7\ \text{кг}$$

Определим объём самой соли:

$$V_{\text{с}} = \frac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}};$$

$$V_{\text{с}} = \frac{3{,}7}{2150} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 = 1{,}7\ \text{л}.$$

Теперь найдем объёмы пустот между крупинками соли. Объём пустот между снежками был равен 4 литра, соль имеет чистый объём 1,7 литра, поэтому объём пустот между крупинками равен:

$$V_{\text{пустот}} = 4 - 1{,}7 = 2{,}3\ \text{л}.$$

По условию задачи Баба Яга полностью заполняет кадушку водой, поэтому объём воды совпадает с объёмом пустот $V_{\text{пустот}}$. Остаётся определить объём солёной воды и её массу. Объём солёной воды складывается из объёма воды, полученной после таяния снега (растаяло 4 кг снега, получилось 4 кг воды, имеющих объём 4 л), объёма соли 1,7 л и объёма налитой воды 2,3 л. Поэтому получаем:

$$V_{\text{в}} = 4 + 1{,}7 + 2{,}3 = 8\ \text{л}.$$

Масса солёной воды M складывается из 4 кг воды, полученной после таяния снега, массы соли (3,7 кг) и массы налитой воды (2,3 кг)

$$M = 4 + 3{,}7 + 2{,}3 = 10 \text{ кг}.$$

Плотность солёной воды равна:

$$\rho_\text{к} = \frac{M}{V_\text{в}};$$

$$\rho_\text{к} = \frac{10}{8} = 1{,}25\ \frac{\text{г}}{\text{л}} = 1250\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Шифр

$\sum$

7-Т1. Робот-пылесос

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Правильно записаны (или верно используются в процессе расчетов) соотношения между разными единицами длины.	1.0		
2	Правильно записаны (или верно используются в процессе расчетов) соотношения между разными единицами времени.	1.0		
3	Определено, что площадь измерялась в см^2.	2.0		
4	Определено, что время измерялось в минутах.	2.0		
5	Записана формула, связывающая величины из условия *В случае отсутствия правильной конечной формулы за данный пункт можно поставить:* *1) наличие формулы пути, пройденного пылесосом, $l = vt$ или аналогичная* **(1 балл)**; *2) наличие формулы площади, которую пылесос захватывает за время t, $s = vtd$ или аналогичная* **(1 балл)**.	3.0		
6	Сделано предположение о порядке величины для ширины пылесоса (несколько десятков см) или о возможной скорости пылесоса (порядка 10 см/с).	2.0		
7	Проведен анализ, на основании которого сделан вывод о том, что скорость измерялась в см/ч).	2.0		
8	Найдена ширина пылесоса.	2.0		

Шифр

$\sum$

7-Т2. Час пик

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Ответ на первый вопрос : N_1 больше.	2.0		
1.2	Обоснование ответа на первый вопрос (формульное или качественное).	2.0		
2.1	Выражено время движения стоящего человека ($t_{\text{стоя}} = \frac{N_0 l_0}{u}$ или аналогичное).	2.0		
2.2	Выражено время движения идущего человека ($t_{\text{ид}=\frac{N_0 l_0}{u+v}}$ или аналогичное).	2.0		
2.3	$N_1 = \frac{v}{u} N_0$ или аналогичное.	2.0		
2.4	$N_2 = \frac{v}{v+u} N_0$ или аналогичное.	2.0		
2.5	Найдено число ступенек $N_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2}$.	1.0		
2.6	Ответ на второй вопрос $N = \frac{2N_1 N_2}{N_1 - N_2}$.	2.0		

Шифр

$\sum$

7-Т3. Рекорды скорости

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Получено значение максимальной скорости 20 км/ч.	2.0		
1.2	Получено значение минимальной скорости 10 км/ч.	2.0		
2.1	Обоснование того, что время пропорционально площади под графиком.	2.0		
2.2	Показано, что минимальное время 1 км на участке с третьего по четвертый километры.	2.0		
2.3	Получено значение минимального времени на дистанции 1 км, равное 3,5 минутам — Если забыли про смещенное начало оси и получили 1,5 минуты	2.0 *1.0*		
3.1	Показано, что минимальное время на дистанции 5 км будет с первого по шестой километры.	3.0		
3.2	Получено значение минимального времени на дистанции 5 км, равное 21,5 минутам. — Если забыли про смещенное начало оси и получили 11,5 минут	2.0 *1.0*		

Шифр

$\sum$

7-Т4. Консервированные снежки

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Определен объём пачки соли.	1.0		
1.2	Определена насыпная плотность поваренной соли $\rho_{\text{нас}} = 930$ кг/м^3.	2.0		
2.1	Определён объём пустот между снежками (4 литра).	3.0		
2.2	Определена масса соли m_c, насыпанной в кадушку (3,7 кг).	2.0		
3.1	Определён объём воды, налитой в кадушку (2,3 л).	2.0		
3.2	Определён объём $V_{\text{в}}$ соленой воды (8 л).	2.0		
4.1	Определена масса солёной воды M в кадушке (10 кг).	2.0		
5.1	Найдена плотность солёной воды $\rho_{\text{к}}$ в кадушке (1250 кг/м^3)	1.0		

7 класс

Задача №7-Т1. Робот-пылесос

Комнаты в квартирах обычно имеют площадь, не превышающую нескольких десятков квадратных метров. Поэтому, можно предположить, что площадь измерялась в см^2 .

Вряд ли пылесос сможет убрать такую площадь за 30 секунд, это очень маленькое время, а 30 часов, напротив, время очень большое. Вряд ли мы бы стали пользоваться таким медленным пылесосом. Поэтому время измеряется в минутах.

Ширина пылесоса должна иметь значение порядка нескольких десятков сантиметров.

Величины, задействованные в задаче связаны между собой формулой:

$$v = \frac{3S}{d \cdot t},$$

где S – площадь комнаты, d – ширина пылесоса, а t – время уборки.

Попробуем подставить в формулу наши значения для площади и времени, а в качестве ширины возьмём величину, близкую по порядку $(20-40$ см), например, 20 см. И определим, в каких единицах измерения скорость будет иметь порядок сотен:

$$v = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{20 \text{ см} \cdot 30 \text{ мин}} = 1250 \ \frac{\text{см}}{\text{мин}} = \frac{1250 \cdot 0{,}01 \text{ м}}{\frac{1}{60} \text{ ч}} = 750 \ \frac{\text{м}}{\text{ч}} = 75000 \ \frac{\text{см}}{\text{ч}} = 12500 \ \frac{\text{мм}}{\text{мин}}.$$

Таким образом, очень вероятно, что скорость посчитана в см/ч. Проверим это предположение, посчитав ширину пылесоса:

$$d = \frac{3S}{vt} = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{50000 \ \frac{\text{см}}{\text{ч}} \cdot 30 \text{ мин}} = \frac{3 \cdot 25 \text{ м}^2}{500 \ \frac{\text{м}}{\text{ч}} \cdot 0{,}5 \text{ ч}} = 0{,}3 \text{ м} = 30 \text{ см}.$$

Полученное значение ширины совпадает с ожиданиями; значит, наши предположения были верны.

Можно было также проверить теорию, что скорость посчитана в мм/мин. Однако в этом случае диаметр получился бы в 6 раз меньше – 5 см, что, очевидно, слишком мало.

Задача №7-Т2. Час пик

Обозначим длину одной ступеньки эскалатора l_0, скорость эскалатора u, собственную скорость идущих людей v, а число ступенек эскалатора N_0. Время движения человека, стоящего на эскалаторе $t_{\text{стоя}} = \frac{N_0 l_0}{u}$. Время движения человека, идущего по эскалатору $t_{\text{ид}} = \frac{N_0 l_0}{u+v}$. В системе отсчёта эскалатора (или стоящего на эскалаторе человека) относительно стоящего человека проходит колонна людей со скоростью v. Длина этой колонны $vt_{\text{стоя}} = \frac{v}{u}N_0 l_0$, а значит людей в этой колонне

$$N_1 = \frac{v}{u}N_0 \tag{1}$$

В системе отсчёта человека, идущего по эскалатору, справа от него во встречном к нему направлении идет колонна людей со скоростью v. Длина этой колонны $vt_{\text{ид}} = \frac{v}{v+u}N_0 l_0$, а значит людей в этой колонне

$$N_2 = \frac{v}{v+u}N_0 \tag{2}$$

Из свойств дробей получаем, что $N_2 < N_1$, то есть N_1 больше. На этот вопрос можно было ответить и из качественных соображений: каждый раз, когда люди слева делают шаг, они встречают нового соседа справа, а люди справа встречают соседа слева. То есть частота встречи нового соседа у левых и правых людей одинакова. Но те, кто находятся на эскалаторе дольше, встречают больше людей.

Из (1) и (2) уравнений следует, что $N_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2}$. Людей на эскалаторе в два раза больше, чем ступенек

$$N = 2N_0 = \frac{2N_1 N_2}{N_1 - N_2}$$

Задача №7-Т3. Рекорды скорости

Темп бега – величина обратная к скорости $T = \frac{1}{v}$. Поэтому чем меньше темп бега, тем больше скорость.

Минимальный темп бега 3 мин/км, что соответствует скорости 20 км/час. Максимальный темп бега 6 мин/км, что соответствует скорости 10 км/час.

При движении с постоянной скоростью v время движения на участке s можно вычислить как $t = \frac{s}{v} = sT$. Поэтому время движения на каком-то участке пропорционально площади под графиком зависимости темпа бега от расстояния на этом участке. Минимальному времени, за которое спортсмен пробежал один километр, соответствует участок графика, площадь под которым минимальна. При подсчете площади под графиком необходимо учитывать, что на графике, приведенном в условии, смещено начало координат. Из графика видно, что минимальное время одного километра было на участке с третьего по четвертый километры. Так как площадь одной клетки графика пропорциональна одной минуте, минимальное время, затраченное на прохождение одного километра, равно 3,5 мин.

Минимальное время одного километра на участке с третьего по четвертый километры и равно 3,5 минуты.

Минимальное время на участке длиной 5 км с первого по шестой километры и равно 21,5 минуты.

Задача №7-Т4. Консервированные снежки

Между снежками, насыпанными в кадушку, существуют пустоты. Так как $m_2 = 6$ кг плотно утрамбованного снега занимают всю кадушку, то $m_1 = 4$ кг снега такой же плотности в снежках имеют объём, равный $\frac{2V}{3}$, то есть 8 литров. Следовательно, на пустоты между снежками приходится объём $\frac{V}{3} = 4$ литра. Засыплем эти пустоты солью. Так как соль состоит из крупинок, то после засыпания солью пустот между снежками, останутся пустоты между крупинками соли, но объём пустот станет меньше. Для нахождения объёма пустот между крупинками соли нам нужна насыпная плотность соли. Определим её, зная, что килограммовая пачка соли имеет объём

$$V_{\text{пачки}} = 18 \cdot 10 \cdot 6 \text{ см}^3 = 1080 \text{ см}^3.$$

Тогда насыпная плотность соли равна

$$\rho_{\text{нас}} = \frac{1000}{1080} \approx 0{,}93 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 930 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Определим массу соли, насыпанной в кадушку

$$m_{\text{с}} = \rho_{\text{нас}} \cdot \frac{V}{3};$$

$$m_{\text{с}} = 930 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3{,}7 \text{ кг}$$

Определим объём самой соли:

$$V_{\text{с}} = \frac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}};$$

$$V_{\text{с}} = \frac{3{,}7}{2150} = 1{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1{,}7 \text{ л}.$$

Теперь найдем объёмы пустот между крупинками соли. Объём пустот между снежками был равен 4 литра, соль имеет чистый объём 1,7 литра, поэтому объём пустот между крупинками равен:

$$V_{\text{пустот}} = 4 - 1{,}7 = 2{,}3 \text{ л}.$$

По условию задачи Баба Яга полностью заполняет кадушку водой, поэтому объём воды совпадает с объёмом пустот $V_{\text{пустот}}$. Остаётся определить объём солёной воды и её массу. Объём солёной воды складывается из объёма воды, полученной после таяния снега (растаяло 4 кг снега, получилось 4 кг воды, имеющих объём 4 л), объёма соли 1,7 л и объёма налитой воды 2,3 л. Поэтому получаем:

$$V_{\text{в}} = 4 + 1{,}7 + 2{,}3 = 8 \text{ л}.$$

Масса солёной воды M складывается из 4 кг воды, полученной после таяния снега, массы соли (3,7 кг) и массы налитой воды (2,3 кг)

$$M = 4 + 3{,}7 + 2{,}3 = 10 \text{ кг}.$$

Плотность солёной воды равна:

$$\rho_\text{к} = \frac{M}{V_\text{в}};$$

$$\rho_\text{к} = \frac{10}{8} = 1{,}25\ \frac{\text{г}}{\text{л}} = 1250\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

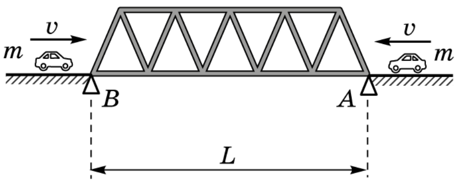
8 класс

Теоретический тур

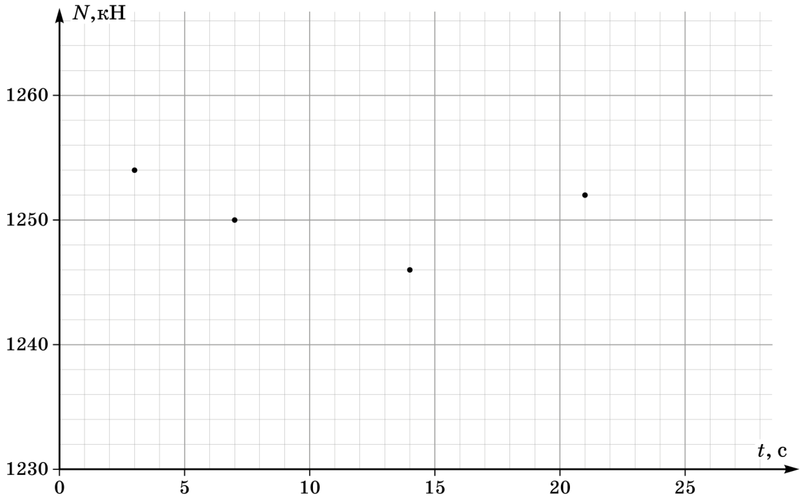
Задача №1. Черти

В момент времени $t = 0$ катер обогнал свободно плывущий по течению реки плот. В момент времени τ катер поравнялся с теплоходом, идущим против течения реки, а в момент времени 2τ катер быстро развернулся и поплыл с той же скоростью (относительно реки) в обратном направлении. При этом через некоторое время после разворота катер встретил плот, а еще через такое же время второй раз поравнялся с теплоходом. В какой момент времени теплоход встретился с плотом? Чему равно отношение собственных скоростей катера и теплохода?

Задача №2. Два автомобиля



Автомобильный мост установлен на опорах A и B. Под опорой A расположен датчик, снимающий зависимость силы реакции опоры N от времени t. В начальный момент на мост со стороны опоры A со скоростью 18 км/ч въезжает небольшой легковой автомобиль. Спустя время Δt со стороны опоры B на мост с той же скоростью въезжает другой такой же автомобиль. Из-за нестабильной связи с датчиком на графике зависимости $N(t)$ удалось получить лишь несколько точек (см. рисунок).



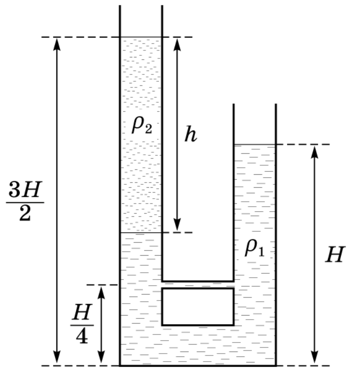
1. Восстановите график до 30-й секунды.

Определите:

2. длину L моста;
3. время Δt;
4. массу M моста;
5. массу m автомобиля.

Примечание. Мост можно считать однородным, а размеры автомобиля пренебрежимо малыми. Другие участники движения на мосту за время наблюдения не появлялись. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

Задача №3. Сообщающиеся сосуды



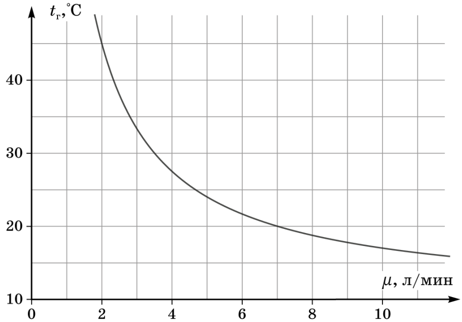
Два сообщающихся сосуда с одинаковой площадью сечения S соединены дополнительной тонкой трубочкой на высоте $\frac{H}{4}$ от их дна. В сосуды налили жидкость с плотностью ρ_1. После этого в левый сосуд добавили жидкость с плотностью $\rho_2 < \rho_1$, высота столба которой оказалась равной h (см. рисунок). Высота столба жидкости в правом сосуде равна H, а суммарная высота столба жидкости в левом сосуде равна $\frac{3H}{2}$. Жидкости не смешиваются.

1. Чему равна плотность ρ_2, если плотность ρ_1 известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

2. Определите, при какой массе m поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосуде в положении равновесия будут расположены на одном уровне.

Задача №4. Нагреватель



Проточный водонагреватель — это устройство, которое обеспечивает подачу горячей воды из крана путём нагрева холодной воды, которая проходит через него. На графике представлена зависимость температуры $t_г$ горячей воды на выходе из крана от объёмного расхода μ воды через проточный нагреватель.

1. Найдите мощность P водонагревателя.

2. Найдите температуру $t_н$ холодной воды, поступающей в нагреватель.

3. При каком объёмном расходе μ_1 температура горячей воды будет равна $t_к = 100$ °C?

Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$° C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Считайте, что мощность нагревателя постоянна, тепловыми потерями можете пренебречь.

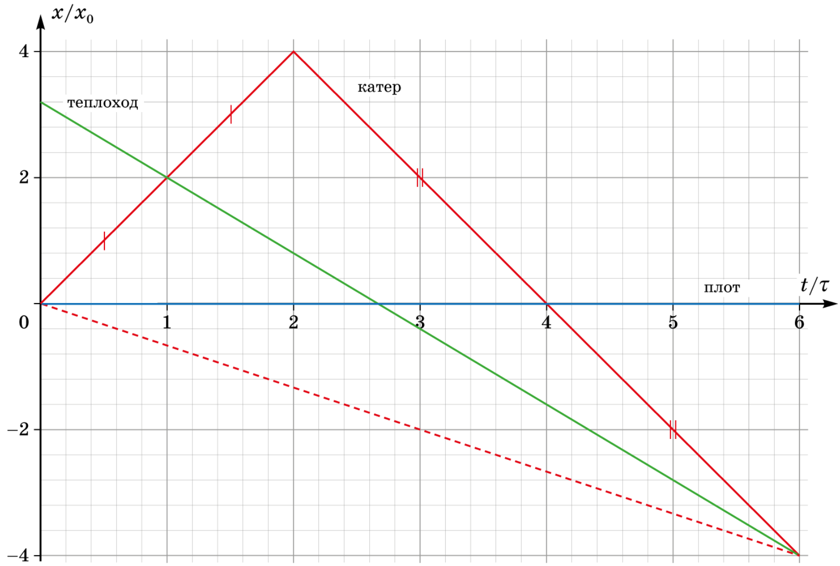
8 класс

Задача №8-Т1. Черти

Обозначим скорость реки - u, а скорости катера и теплохода в СО реки - $v_{\text{к}}$ и $v_{\text{т}}$ соответственно.

Графические методы решения

1 метод (графический в СО реки):



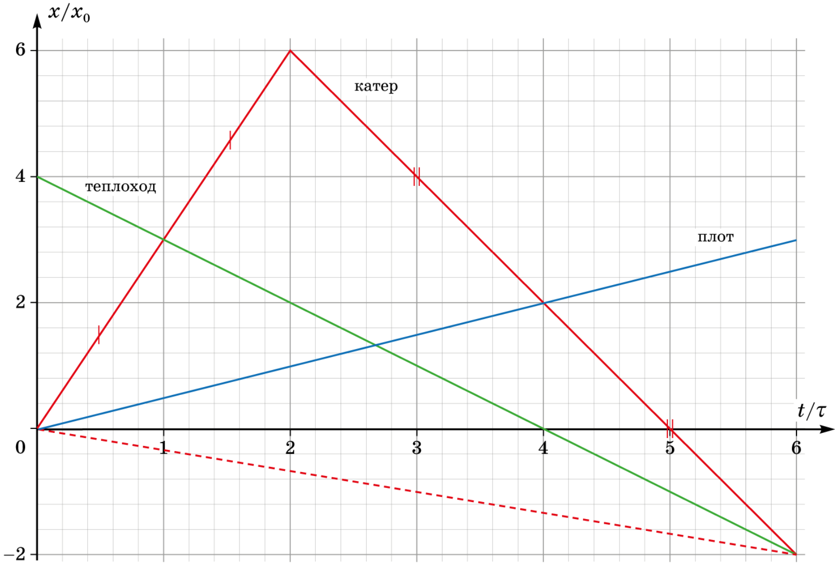
Построим графики зависимостей координат тел в подвижной системе отсчета, связанной с рекой, от времени. Катер и до, и после разворота плыл со скоростью $v_{\text{к}}$. Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ, а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ. Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, катер прошел $10x_0$ (x_0 - условная единица) , а теплоход - $6x_0$. Следовательно,

$$\frac{v_{\text{к}}}{v_{\text{т}}} = \frac{5}{3}.$$

2 метод (графический в СО Земли):



Построим графики зависимостей координат тел в системе отсчета Земли. Относительно плота катер и до, и после разворота плыл со скоростью $v_к$. Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ, а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ. Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, перемещение катера составило $(v_к - u)4\tau - (v_к + u)\tau$, а перемещение теплохода – $(v_т - u)5\tau$. Приравнивая соответствующие перемещения, получим

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}$$

Аналитические методы решения

3 метод (аналитический в СО Земли):

Запишем уравнения движения тел в СО Земли:

$$\begin{cases} x_\text{п} = ut \\ x_\text{к} = (v_\text{к} + u)t, \text{при } t \in [0,2\tau] \\ x_\text{к} = (v_\text{к} + u)2\tau - (v_\text{к} - u)(t - 2\tau), \text{при } t > 2\tau \\ x_\text{т} = x_0 - (v_\text{т} - u)t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ:

$$x_0 - (v_\text{т} - u)\tau = (v_\text{к} + u)\tau,$$

откуда $x_0 = (v_\text{к} + v_\text{т})\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1:

$$(v_\text{к} + u)2\tau - (v_\text{к} - u)(t_1 - 2\tau) = ut_1,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ. Условие этой встречи:

$$(v_\text{к} + u)2\tau - (v_\text{к} - u)(6\tau - 2\tau) = x_0 - (v_\text{т} - u)6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_\text{к}}{v_\text{т}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$u\tau_0 = x_0 - (v_\text{т} - u)\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau\frac{v_\text{к} + v_\text{т}}{v_\text{т}} = \frac{8}{3}\tau.$$

4 метод (аналитический в СО реки):

Запишем уравнения движения тел в СО реки:

$$\begin{cases} x_\text{п} = 0 \\ x_\text{к} = v_\text{к}t, \text{при } t \in [0,2\tau] \\ x_\text{к} = v_\text{к}2\tau - v_\text{к}(t - 2\tau), \text{при } t > 2\tau \\ x_\text{т} = x_0 - v_\text{т}t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ:

$$x_0 - v_т\tau = v_к\tau,$$

откуда $x_0 = (v_к + v_т)\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1:

$$v_к 2\tau - v_к(t_1 - 2\tau) = 0,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ. Условие этой встречи:

$$v_к 2\tau - v_к(6\tau - 2\tau) = x_0 - v_т 6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$0 = x_0 - v_т\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau\frac{v_к + v_т}{v_т} = \frac{8}{3}\tau$$

Задача №8-Т2. Два автомобиля

Правило моментов относительно точки B после въезда первого автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt)$$

Следовательно

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{vt}{L} \tag{1}$$

Правило моментов относительно точки B после въезда второго автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt) + mgv(t - \Delta t)$$

Откуда

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{v\Delta t}{L} \tag{2}$$

Правило моментов относительно точки B после съезда первого автомобиля с моста:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mgv(t - \Delta t)$$

То есть

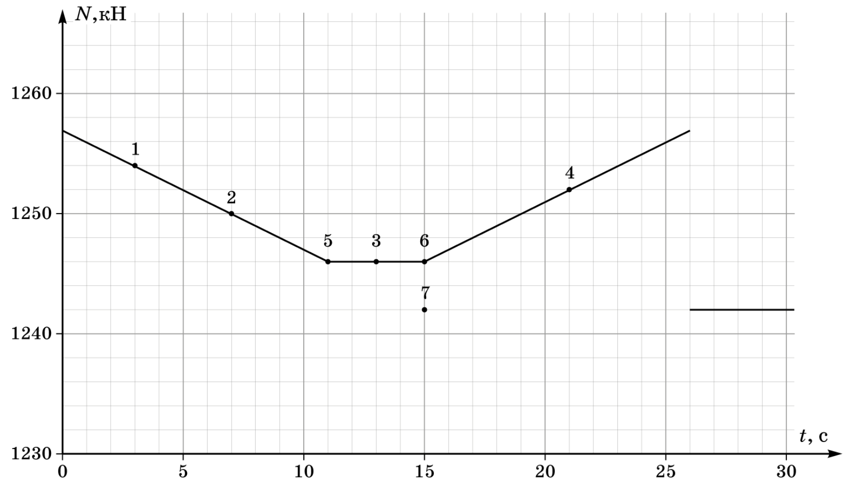
$$N = \frac{1}{2}Mg - mg\frac{v\Delta t}{L} + mg\frac{vt}{L} \tag{3}$$

После того, как второй автомобиль съедет с моста

$$N = \frac{1}{2}Mg \tag{4}$$

С учетом полученных выражений график зависимости $N(t)$ состоит из 4 линейных участков: первый — убывающий, с угловым коэффициентом $-\frac{mgv}{L}$; второй — горизонтальный (N в (2) не зависит от времени); третий — возрастающий, с угловым коэффициентом $\frac{mgv}{L}$; и четвертый — горизонтальный ($N = \frac{1}{2}Mg$). Заметим, что угловые коэффициенты на первом и третьем отрезке одинаковы по величине, но противоположны по знаку. То есть эти отрезки симметричны.

Анализируя точки на исходном графике, не сложно прийти к выводу, что точки 1 и 2 относятся к первому отрезку, точка 3 – ко второму, а 4 – к третьему. При стабильной связи график выглядел бы так:



Каждый из автомобилей проводит на мосту 15 секунд (точка 6 – момент съезда первого автомобиля). А значит длина моста $L = vt_6 = 75$ м.

Время между въездами машин на мост – $\Delta t = 11$ с (начало горизонтального отрезка).

Точка 7, в которую первая прямая пришла бы к 15-й секунде, дает возможность определить массу моста $M = 248{,}4$ т.

Разность начального значения силы реакции опоры с N_7 дает возможность определить массу автомобиля $m = 1{,}5$ т.

Задача №8-Т3. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{3}{2}H - h) = \rho_1 gH$$

$\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ ($h > \frac{H}{2}$).

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{5H}{4} - h) = \rho_1 g\frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 \ - \rho_2)hS \ = \rho_1\frac{H}{2}S$$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H. Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gH + \rho_1 g\frac{H}{4} = \rho_1 g(\frac{9H}{4} - h) + \rho_2 g(h - H)$$

или

$$m = \rho_1(2H - h)S + \rho_2(h - 2H)S = \rho_1\frac{H(2H - h)}{2h}S$$

Задача №8-Т4. Нагреватель

Пусть P – мощность водонагревателя, τ – время, в течение которого вода находится в нагревателе, тогда количество теплоты, переданное нагревателем за это время воде, равно

$$Q_1 = P\tau$$

Суммарное количество теплоты, полученное водой за время нахождения в нагревателе:

$$Q_2 = cm(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau = cm(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

Так как масса воды равна $m = \rho V = \rho\mu\tau$, где V – объём нагревателя, то

$$P\tau = c\rho V(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

$$P = c\rho\mu(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

На графике можем выбрать точки с координатами, которые «хорошо» определяются $t_{\text{г}1} = 45\ °\text{C}$,$\mu_1 = 2\ \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{2}{60}\frac{\text{л}}{\text{с}}$ и $t_{\text{г}2} = 20\ °\text{C}$,$\mu_2 = 7\ \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{7}{60}\frac{\text{л}}{\text{с}}$ Тогда

$$\begin{cases} P = c\rho\mu_1(t_{\text{г}1} – t_{\text{н}}) \\ P = c\rho\mu_2(t_{\text{г}2} – t_{\text{н}}) \end{cases}$$

Из системы получим

$$t_{\text{н}} = \frac{\mu_2 t_{\text{г}2} - \mu_1 t_{\text{г}1}}{\mu_2 - \mu_1} = 10\ \ °\text{C}$$

$$P = 4200 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}002}{60} \cdot (45 - 10) = 4{,}9\ \text{кВт}$$

Объемный расход, при котором температура нагретой воды будет равна 100 °C, равен

$$\mu_1 = \frac{4900}{4200 \cdot 1000 \cdot 90} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 0{,}78\frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

.

Шифр

$\sum$

8-Т1. Черти

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	**Метод 1.** Построены графики зависимостей координат тел от времени (плот, 2 участка катера, теплоход) в СО реки или в СО Земли.	4 графика по 1.5		
2	**Метод 1.** Вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ.	2.0		
3	**Метод 1.** Вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ.	1.0		
4	**Метод 1.** $\tau_0 = \frac{8}{3}\tau$.	2.0		
5	**Метод 1.** Проведено сравнение путей от одной до второй встречи теплохода и катера.	2.0		
6	**Метод 1.** $\frac{v_{\text{К}}}{v_{\text{Т}}} = \frac{5}{3}$.	2.0		
7°	**Метод 2.** Написаны уравнения движения тел (плот, катер в двух случаях, теплоход) в СО реки или в СО Земли.	4 уравн по 1.0		
8°	**Метод 2.** Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ.	1.0		
9°	**Метод 2.** Условие второй встречи катера с плотом.	1.0		
10°	**Метод 2.** Вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ.	2.0		
11°	**Метод 2.** Вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ.	1.0		
12°	**Метод 2.** Условие второй встречи катера с теплоходом.	1.0		
13°	**Метод 2.** $$\frac{v_{\text{К}}}{v_{\text{Т}}} = \frac{5}{3}.$$	2.0		
14°	**Метод 2.** Условие встречи теплохода и плота.	1.0		
15°	**Метод 2.** $$\tau_0 = \frac{8}{3}\tau.$$	2.0		

Шифр

$\sum$

8-Т2. Два автомобиля

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Правило моментов после въезда первого автомобиля на мост	2.0		
1.2	Правило моментов после въезда второго автомобиля на мост	2.0		
1.3	Правило моментов после съезда первого автомобиля с моста	2.0		
1.4	Правильно восстановлен график (по одному баллу за каждый из 4 отрезков)	4 отрез по 1.0		
2.1	Найдено значение L	2.0		
3.1	Найдено значение Δt	1.0		
4.1	Найдено значение M	1.0		
5.1	Найдено значение m	1.0		

Шифр

$\sum$

8-Т3. Сообщающиеся сосуды

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано равенство давлений жидкости в двух сосудах	2.0		
1.2	Получено выражение для плотности второй жидкости $\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$	2.0		
2.1	Для случая $h < H$ записаны уровни жидкостей в первом сосуде	1.0		
2.2	Для случая $h < H$ получено $m = \rho_1 \frac{H}{2} S$	2.0		
2.3	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ есть понимание, что вторая жидкость перетекает через трубочку и всплывает в правом сосуде (качественное понимание, описание словами)	2.0		
2.4	Найдено, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$	2 соотн по 1.5		
2.5	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ получено $m = \rho_1 \frac{H(2H-h)}{2h} S$	3.0		

Шифр

$\sum$

8-Т4. Нагреватель

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Использована формула для суммарного количества теплоты, переданного нагревателем $Q_1 = Pt$	1.0		
1.2	Использована формула для суммарного количества теплоты, полученного водой $Q_2 = cm(t_г – t_н)$	1.0		
1.3	Составлено уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2$. Если сразу записан правильный эквивалент формулы $P\tau = cm(t_г – t_н)$, то за пункты 1, 2, 3 ставится полный балл	2.0		
1.4	Использована формула $m = \rho V$	1.0		
1.5	Записана или используется в процессе решения формула, связывающая объем нагревателя V и μ $(V = \mu t)$	1.0		
1.6	Получена формула, связывающая мощность нагревателя и объемный расход или эквивалентная	1.0		
1.7	На графике выбраны две хорошие точки и составлена система уравнений	1.0		
1.8	Объемный расход переведен в $\frac{л}{с}$ или $\frac{м^3}{с}$	0.5		
1.9	Правильно найдена мощность нагревателя P	2.0		
2.1	Правильно найдена температура холодной воды $t_н$	2.0		
3.1	Составлено выражение для μ_1	0.5		
3.2	Правильно найден объемный расход μ_1	2.0		

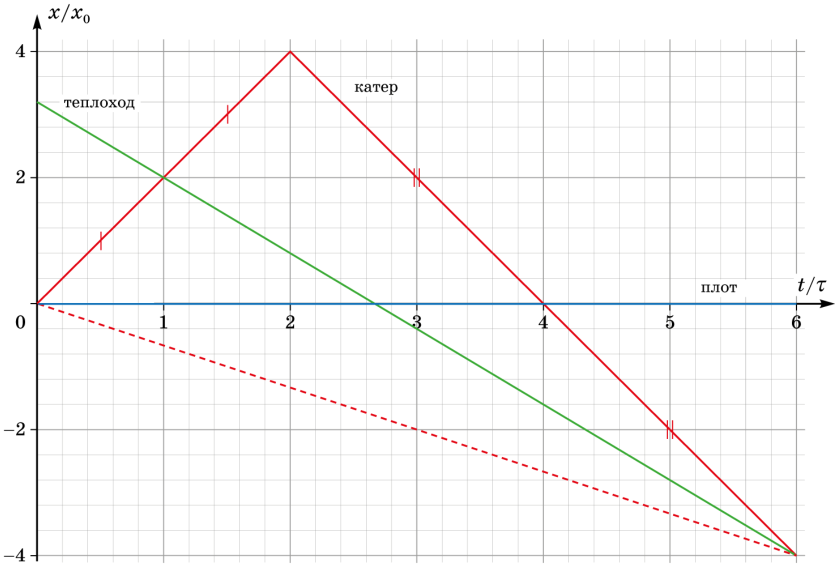
8 класс

Задача №8-Т1. Черти

Обозначим скорость реки - u, а скорости катера и теплохода в СО реки - $v_к$ и $v_т$ соответственно.

Графические методы решения

1 метод (графический в СО реки):



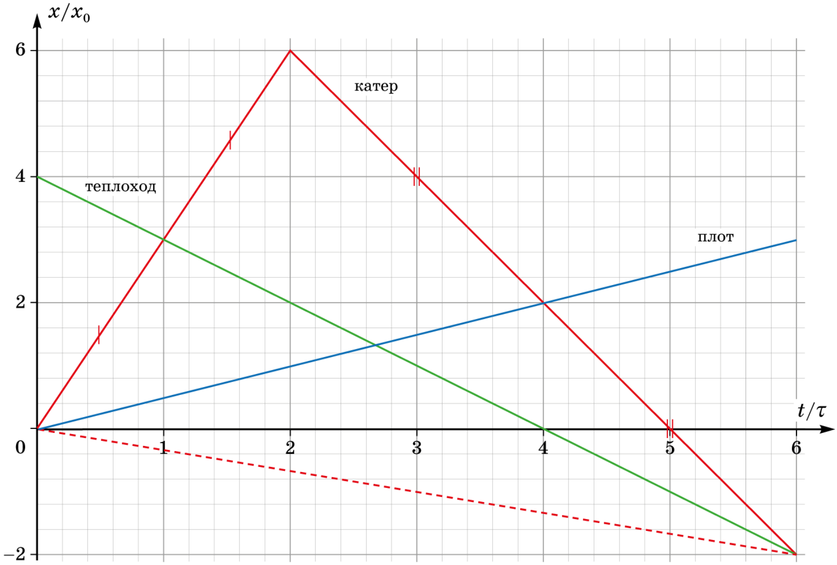
Построим графики зависимостей координат тел в подвижной системе отсчета, связанной с рекой, от времени. Катер и до, и после разворота плыл со скоростью $v_к$. Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ, а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ. Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, катер прошел $10x_0$ (x_0 - условная единица) , а теплоход - $6x_0$. Следовательно,

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}.$$

2 метод (графический в СО Земли):



Построим графики зависимостей координат тел в системе отсчета Земли. Относительно плота катер и до, и после разворота плыл со скоростью $v_к$. Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ, а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ. Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, перемещение катера составило $(v_к - u)4\tau - (v_к + u)\tau$, а перемещение теплохода – $(v_т - u)5\tau$. Приравнивая соответствующие перемещения, получим

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}$$

Аналитические методы решения

3 метод (аналитический в СО Земли):

Запишем уравнения движения тел в СО Земли:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = ut \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)t, \text{при } t \in [0{,}2\tau] \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t - 2\tau), \text{при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - (v_{\text{т}} - u)t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ:

$$x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau = (v_{\text{к}} + u)\tau,$$

откуда $x_0 = (v_{\text{к}} + v_{\text{т}})\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1:

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t_1 - 2\tau) = ut_1,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ. Условие этой встречи:

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(6\tau - 2\tau) = x_0 - (v_{\text{т}} - u)6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_{\text{к}}}{v_{\text{т}}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$u\tau_0 = x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau\frac{v_{\text{к}} + v_{\text{т}}}{v_{\text{т}}} = \frac{8}{3}\tau.$$

4 метод (аналитический в СО реки):

Запишем уравнения движения тел в СО реки:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = 0 \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}t, \text{при } t \in [0{,}2\tau] \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}2\tau - v_{\text{к}}(t - 2\tau), \text{при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - v_{\text{т}}t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ:

$$x_0 - v_т \tau = v_к \tau,$$

откуда $x_0 = (v_к + v_т)\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1:

$$v_к 2\tau - v_к(t_1 - 2\tau) = 0,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ. Условие этой встречи:

$$v_к 2\tau - v_к(6\tau - 2\tau) = x_0 - v_т 6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$0 = x_0 - v_т \tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau \frac{v_к + v_т}{v_т} = \frac{8}{3}\tau$$

Задача №8-Т2. Два автомобиля

Правило моментов относительно точки B после въезда первого автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt)$$

Следовательно

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{vt}{L} \tag{1}$$

Правило моментов относительно точки B после въезда второго автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt) + mgv(t - \Delta t)$$

Откуда

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{v\Delta t}{L} \tag{2}$$

Правило моментов относительно точки B после съезда первого автомобиля с моста:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mgv(t - \Delta t)$$

То есть

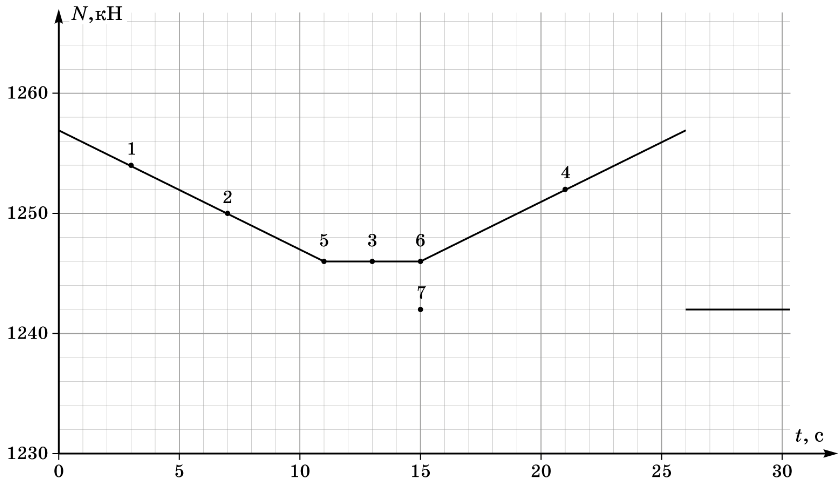
$$N = \frac{1}{2}Mg - mg\frac{v\Delta t}{L} + mg\frac{vt}{L} \tag{3}$$

После того, как второй автомобиль съедет с моста

$$N = \frac{1}{2}Mg \tag{4}$$

С учетом полученных выражений график зависимости $N(t)$ состоит из 4 линейных участков: первый — убывающий, с угловым коэффициентом $-\frac{mgv}{L}$; второй — горизонтальный (N в (2) не зависит от времени); третий — возрастающий, с угловым коэффициентом $\frac{mgv}{L}$; и четвертый — горизонтальный ($N = \frac{1}{2}Mg$). Заметим, что угловые коэффициенты на первом и третьем отрезке одинаковы по величине, но противоположны по знаку. То есть эти отрезки симметричны.

Анализируя точки на исходном графике, не сложно прийти к выводу, что точки 1 и 2 относятся к первому отрезку, точка 3 – ко второму, а 4 – к третьему. При стабильной связи график выглядел бы так:



Каждый из автомобилей проводит на мосту 15 секунд (точка 6 – момент съезда первого автомобиля). А значит длина моста $L = vt_6 = 75$ м.

Время между въездами машин на мост – $\Delta t = 11$ с (начало горизонтального отрезка).

Точка 7, в которую первая прямая пришла бы к 15-й секунде, дает возможность определить массу моста $M = 248{,}4$ т.

Разность начального значения силы реакции опоры с N_7 дает возможность определить массу автомобиля $m = 1{,}5$ т.

Задача №8-Т3. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{3}{2}H - h) = \rho_1 gH$$

$\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ $(h > \frac{H}{2})$.

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{5H}{4} - h) = \rho_1 g\frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 - \rho_2)hS = \rho_1\frac{H}{2}S$$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H. Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gH + \rho_1 g\frac{H}{4} = \rho_1 g(\frac{9H}{4} - h) + \rho_2 g(h - H)$$

или

$$m = \rho_1(2H - h)S + \rho_2(h - 2H)S = \rho_1\frac{H(2H - h)}{2h}S$$

Задача №8-Т4. Нагреватель

Пусть P – мощность водонагревателя, τ – время, в течение которого вода находится в нагревателе, тогда количество теплоты, переданное нагревателем за это время воде, равно

$$Q_1 = P\tau$$

Суммарное количество теплоты, полученное водой за время нахождения в нагревателе:

$$Q_2 = cm(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau = cm(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

Так как масса воды равна $m = \rho V = \rho\mu\tau$, где V – объём нагревателя, то

$$P\tau = c\rho V(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

$$P = c\rho\mu(t_{\text{г}} – t_{\text{н}})$$

На графике можем выбрать точки с координатами, которые «хорошо» определяются $t_{\text{г}1} = 45\ ^\circ\text{C}$,$\mu_1 = 2\ \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{2}{60}\frac{\text{л}}{\text{с}}$ и $t_{\text{г}2} = 20\ ^\circ\text{C}$,$\mu_2 = 7\ \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{7}{60}\frac{\text{л}}{\text{с}}$ Тогда

$$\begin{cases} P = c\rho\mu_1(t_{\text{г}1} – t_{\text{н}}) \\ P = c\rho\mu_2(t_{\text{г}2} – t_{\text{н}}) \end{cases}$$

Из системы получим

$$t_{\text{н}} = \frac{\mu_2 t_{\text{г}2} - \mu_1 t_{\text{г}1}}{\mu_2 - \mu_1} = 10\ \ ^\circ\text{C}$$

$$P = 4200 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}002}{60} \cdot (45 - 10) = 4{,}9\ \text{кВт}$$

Объемный расход, при котором температура нагретой воды будет равна $100\ ^\circ\text{C}$, равен

$$\mu_1 = \frac{4900}{4200 \cdot 1000 \cdot 90} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 0{,}78\frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

.

9 класс

Теоретический тур

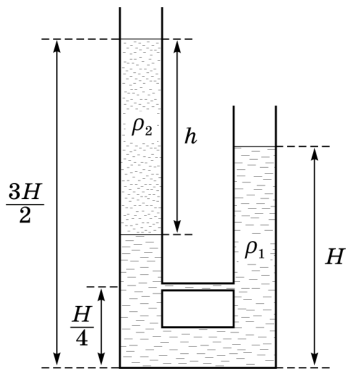
Задача №1. Лифт

Лифт начинает движение из состояния покоя и останавливается на два этажа выше через время $t_2 = 5{,}0$ с, а на четыре этажа выше — через $t_4 = 8{,}0$ с. Лифт, не останавливаясь между этажами, преодолевает необходимую дистанцию за минимально возможное время, при этом модули его скорости и ускорения не превышают некоторых неизвестных значений v_0 и a_0, соответственно. Высота всех этажей одинакова, временем открытия и закрытия дверей можете пренебречь. Используя без доказательства тот факт, что при подъёме на два этажа вверх лифт достигает предельного значения скорости v_0, найдите:

1. за какое время t_3 лифт поднимется на три этажа?
2. за какое время t_1 лифт поднимется на один этаж?

Задача №2. Сообщающиеся сосуды

Два сообщающихся сосуда с одинаковой площадью сечения S соединены дополнительной тонкой трубочкой на высоте $\frac{H}{4}$ от их дна. В сосуды налили жидкость с плотностью ρ_1. После этого в левый сосуд добавили жидкость с плотностью $\rho_2 < \rho_1$, высота столба которой оказалась равной h (см. рисунок). Высота столба жидкости в правом сосуде равна H, а суммарная высота столба жидкости в левом сосуде равна $\frac{3H}{2}$. Жидкости не смешиваются.



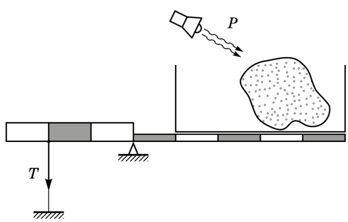
1. Чему равна плотность ρ_2, если плотность ρ_1 известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

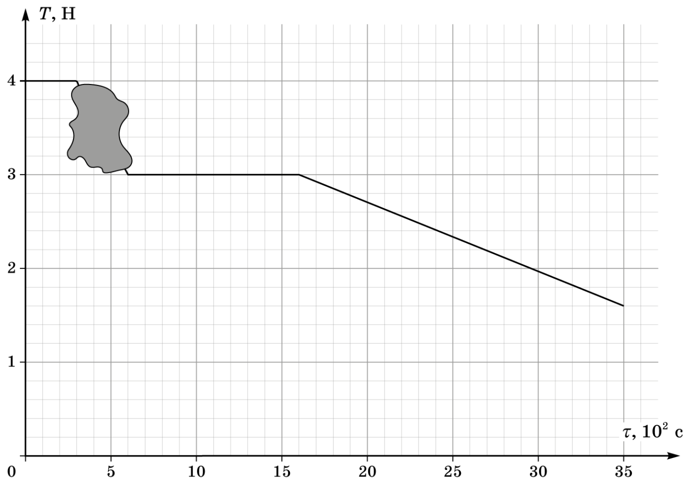
2. Определите, при какой массе m поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосуде в положении равновесия будут расположены на одном уровне.

Задача №3. Эквилибр

На неоднородном рычаге, установленном на опору, стоит вертикальный сосуд прямоугольного сечения. Слева рычаг привязан тонкой невесомой нитью к жесткому основанию. При этом нить не натянута, рычаг горизонтален.



В сосуд кладут кусок льда, после чего нагревают его содержимое с постоянной мощностью (тепловыми потерями, а также теплоёмкостью сосуда можно пренебречь). Одновременно с этим строят график зависимости силы натяжения нити от времени (начало графика совпадает с моментом начала нагрева). График приведён на рисунке. Один из участков графика утерян по неосторожности экспериментатора (на него пролилась тушь).



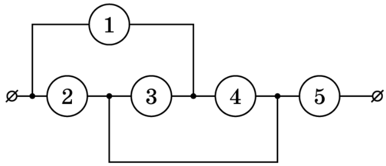
Определите, что произошло в конце утерянного участка графика (момент перелома). А также найдите:

1. массу m куска льда;
2. мощность P, с которой нагревали содержимое сосуда;
3. начальную температуру t_0 льда.

Отметки на рычаге делят его на 8 равных по длине частей. Боковая грань сосуда параллельна плоскости рисунка.

Справочные данные: удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг $\cdot ^\circ$ C), удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot ^\circ$ C), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды 2300 кДж/кг.

Задача №4. Запутанная схема



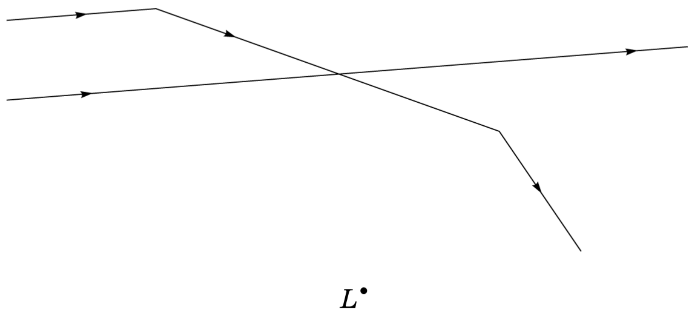
Школьник из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров собрал электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Школьник был не очень внимательным и забыл, какие приборы были установлены в каком месте схемы, но записал показания приборов. Вольтметры показывали 2 В, 12 В и 14 В, показания амперметров 200 мкА и 520 мкА.

1. Определите, на каких местах в схеме стояли амперметры, а на каких — вольтметры.

2. Определите внутренние сопротивления вольтметров и амперметров.

Задача №5. Архив Снеллиуса

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической системы (см. рисунок). От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только ход параллельных лучей через две тонкие линзы и точка L, принадлежащая плоскостям обеих линз.



1. Восстановите построением положения плоскостей обеих линз.

2. По имеющимся данным определите тип каждой линзы (собирающая или рассеивающая).

3. Найдите положения оптических центров и главных фокусов линз.

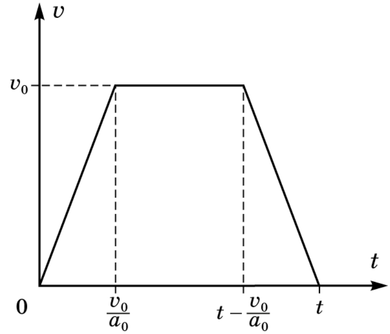
Примечание. Принципы построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры считайте известными. Указанные геометрические построения не доказывайте.

9 класс

Задача №9-Т1. Лифт

Лифт преодолевает необходимую дистанцию (n этажей высотой l_0 каждый) за минимально возможное время t, если разгоняется с ускорением a_0 до скорости v_0 , далее двигается с постоянной скоростью v_0 в течение времени $t - \frac{2v_0}{a_0}$ и тормозит до полной остановки за время $\frac{v_0}{a_0}$.

Начертим соответствующий график скорости лифта от времени. Площадь под ним пропорциональна пройденному пути:



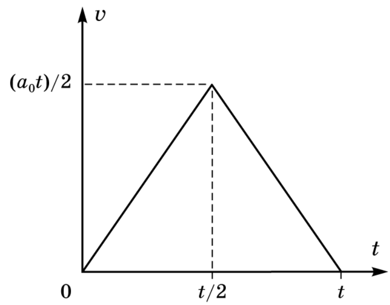
$$nl_0 = \frac{t + (t - \frac{2v_0}{a_0})}{2} v_0$$

Откуда

$$t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$$

Однако эта формула верна лишь при $t - \frac{2v_0}{a_0} > 0$, т.е. только в том случае, когда лифт успевает достичь максимальной скорости v_0 по скорости. Это условие можно переписать в виде: $n > \frac{v_0^2}{a_0 l_0}$.

Если лифт не успевает достичь максимальной скорости v_0 , то оптимальным по времени становится следующая стратегия зависимости скорости от времени. Необходимо половину времени ускоряться с a_0 и половину времени замедляться с тем же по модулю ускорением. График зависимости скорости от времени представлен на рисунке.



В этом случае пройденный путь равен

$$nl_0 = \frac{\frac{a_0 t}{2} t}{2}$$

Откуда

$$t(n) = 2\sqrt{\frac{nl_0}{a_0}}$$

По условию, обе точки принадлежат случаю $t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$: $\begin{cases} t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \\ t_4 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \end{cases}$

Тогда

$$t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} = \frac{t_2 + t_4}{2} = 6{,}5 \text{ с}$$

Из системы найдем $n_{\text{крит}} = \frac{v_0^2}{a_0 l_0} = \frac{2(2t_2 - t_4)}{t_4 - t_2} = \frac{4}{3} > 1$, то есть при подъеме на один этаж лифт не достигает максимально возможной скорости. Так что

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}} = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5 \text{ с}$$

Задача №9-Т2. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 g h + \rho_1 g(\frac{3}{2}H - h) = \rho_1 g H$$

$$\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ $(h > \frac{H}{2})$.

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g h + \rho_1 g(\frac{5H}{4} - h) = \rho_1 g \frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 \ - \rho_2) h S \ = \rho_1 \frac{H}{2} S$$

$m = \rho_1 \frac{H}{2} S$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H. Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g H + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g(\frac{9H}{4} - h) + \rho_2 g(h - H)$$

или

$$m = \rho_1(2H - h)S + \rho_2(h - 2H)S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h} S$$

Задача №9-Т3. Эквилибр

Отметим, что нить не натянута до помещения льда в сосуд. Это означает, что центр масс системы «рычаг + сосуд» находится по горизонтали на уровне опоры, что позволяет в уравнениях моментов исключать соответствующие слагаемые. График имеет 4 участка. На первом, очевидно, лед нагревается. На втором - идет плавление льда, и вода начинает стекать с льдинки в сосуд, равномерно распределяясь по его дну. Однако заканчивается этот участок раньше, чем лед полностью успевает растаять – в момент отрыва льдинки от дна. То есть в конце утерянного участка оставшийся лед всплыл. Кстати, начало этого участка также не обязательно совпадает с моментом начала плавления, ведь вода может скапливаться в каких-то углублениях на льдинке и положение центра масс льда может оставаться какое-то время неизменным. Вообще, поведение на втором участке предсказать почти невозможно, поскольку процесс сильно зависит от формы куска льда, а также от того, как именно к нему будет подводиться тепло. На третьем участке – в сосуде сначала тающий лед, плавающий на поверхности воды, а потом вода, нагревающаяся до температуры кипения. На четвертом участке вода уже достигла температуры кипения и испаряется. Изменение силы натяжения нити в начале связано с перераспределением веса содержимого по мере нагрева, а в конце – с изменением массы содержимого. Массу льда можно найти по третьему отрезку графика из правила моментов (x – длина $\frac{1}{8}$ части рычага):

$$T_3 \cdot 2x = mg \cdot 3x;$$

$T_3 = 3$ Н. Откуда $m = 0{,}2$ кг.

Мощность нагрева легко посчитать по четвертому отрезку, зная массу, испарившуюся за известный промежуток времени. Хорошие точки на графике – (1600 с; 3 Н), а также (3200 с; 1,8 Н). Из них получаем $\Delta T = 1{,}2$ Н, $\Delta m = \frac{2\Delta T}{3g} = 0{,}08$ кг, $\Delta\tau = 1600$ с. Откуда:

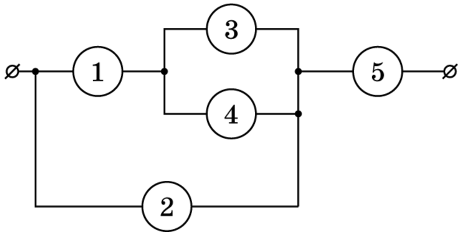
$$P = \frac{L\Delta m}{\Delta\tau} = 115 \text{ Вт}.$$

Зная мощность, не сложно посчитать начальную температуру льда:

$$t_0 = \frac{cm\Delta t_{\text{воды}} + \lambda m - P\tau_3}{c_{\text{льда}} m} \approx -81^\circ\text{C}.$$

Задача №9-Т4. Запутанная схема

Перерисуем электрическую схему. Приборы 3 и 4 соединены параллельно, а по условию нет двух вольтметров или амперметров с одинаковыми показаниями. Поэтому один из приборов 3 и 4 должен быть вольтметром, а второй – амперметром. Давайте, для определенности, будем считать 3 амперметром, а 4 – вольтметром.



Предположим, что прибор номер 1 – амперметр. Через прибор 1 протекает ток, равный сумме токов через приборы 3 и 4. Тогда из двух амперметров 1 и 3 больший ток протекает через амперметр 1. Значит через амперметр 1 протекает ток $I_1 = 520$ мкА, а через амперметр 3 протекает ток $I_3 = 200$ мкА. Соответственно через вольтметр 4 протекает ток $I_1 – I_3 = 320$ мкА. Найдём внутреннее сопротивление амперметра. Амперметр 3 включен в схему параллельно вольтметру 4, значит напряжение на амперметре 3 равно напряжению на вольтметре 4. Тогда внутреннее сопротивление амперметров $R_A = \frac{U_4}{I_3}$. Напряжение на амперметре 1 равно $U_1 = I_1 R_A = \frac{U_4 I_1}{I_3}$. Известно, что в схеме всего 2 амперметра. Если приборы 1 и 3 – амперметры, тогда прибор 2 должен быть вольтметром. Он показывает сумму напряжений на амперметрах 1 и 3, равную $U_1 + U_4 = \frac{U_4(I_1+I_3)}{I_3} = 3{,}6 U_4$. Но, по условию задачи, в схеме нет двух вольтметров, показания которых различаются в 3,6 раза. Тогда мы приходим к противоречию с предположением, что прибор 1 – амперметр. Следовательно, прибор 1 – вольтметр. Через вольтметр 1 течет ток, равный сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. Поэтому напряжение на вольтметре 1 больше, чем на вольтметре 4. Если 2 – вольтметр, то напряжение на нем равно сумме напряжений на 1 и 4. Если 5 – вольтметр, то ток через него равен сумме токов через 1 и 2, значит напряжение на 5 больше, чем напряжение на 1 и 4. В любом случае получаем, что самое маленькое напряжение из всех вольтметров (равное 2 В) показывает вольтметр 4, а вольтметр 1 показывает среднее значение $U_1 = 12$ В. Напряжение на приборе 2 равно сумме напряжений на вольтметрах 1 и 4. Тогда $U_2 = U_1 + U_4 = 14$ В. Если предположить, что прибор 2 – амперметр, то сила тока через него должна быть равна $\frac{U_2}{R_A} = \frac{U_2 I_3}{U_4} = 7 I_3$. Но это не соответствует условиям задачи, по условию показания двух амперметров отличаются в $\frac{520}{200} = 2{,}6$ раза. Следовательно прибор 2 – вольтметр и его показания $U_2 = 14$ В, а прибор 5 – амперметр. Мы узнали на каких местах в схеме стоят амперметры и вольтметры.

Приборы 1, 2 и 4 – вольтметры, 3 и 5 – амперметры.

Теперь найдем внутренние сопротивления приборов. Сила тока через амперметр 5 равна сумме токов через амперметр 3, вольтметр 4 и вольтметр 2. Следовательно, сила тока в амперметре 3 меньше, чем в амперметре 5, $I_3 = 200$ мкА,

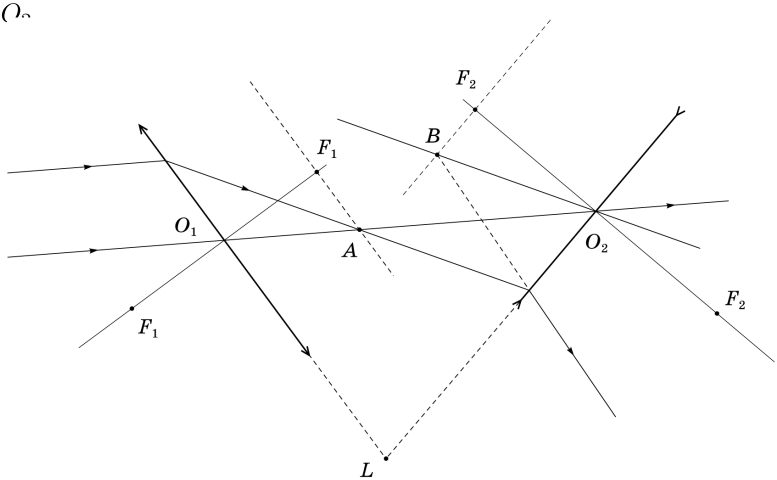
$I_5 = 520$ мкА. Тогда сопротивление амперметров $R_\text{А} = \frac{U_4}{I_3} = 10$ кОм. Сила тока через вольтметр 1 равна сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. $I_1 = \frac{U_1}{R_V} = I_3 + \frac{U_4}{R_V}$. Преобразуем это выражение $\frac{U_1 - U_4}{R_V} = I_3$ и выразим из него сопротивление вольтметров $R_V = \frac{U_1 - U_4}{I_3} = 50$ кОм.

Задача №9-Т5. Архив Снеллиуса

Проведем две прямые, проходящие через точку L и точки преломления верхнего луча. Таким образом восстановим положения линз.

Поскольку нижний луч не преломляется, он должен проходить через оптические центры обеих линз (O_1 и O_2 на рисунке), следовательно левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей.

Параллельные лучи после прохождения через собирающую линзу сходятся в фокальной плоскости (точка A). Проведем прямую параллельную левой линзе и проходящую через точку A, затем опустим из оптического центра O_1 собирающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение заднего фокуса F_1 левой линзы, для нахождения переднего фокуса F_1 отложим такое же расстояние от оптического центра O_1. Для нахождения фокусов рассеивающей линзы выполним дополнительные построения – проведем через оптический центр линзы O_2 прямую параллельную падающему лучу. Точка пересечения этой прямой и продолжения преломленного луча принадлежит фокальной плоскости рассеивающей линзы (точка B). Проведем прямую параллельную правой линзе и проходящую через точку B, затем опустим из оптического центра O_2 рассеивающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение переднего фокуса F_2 правой линзы, для нахождения заднего фокуса F_2 отложим такое же расстояние от оптического центра O_2.



Шифр

$\sum$

9-Т1. Лифт

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Описана стратегия движения в случае достижения максимального значения скорости v_0	2.0		
1.2	Описана стратегия движения в случае, когда максимальное значение скорости v_0 не достигалось	2.0		
1.3	Записано уравнение $t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ или аналогичное	0.5		
1.4	Записано уравнение $t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ или аналогичное	0.5		
1.5	Записано уравнение $t_2 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ или аналогичное	0.5		
1.6	Найдено время подъема на три этажа $t_3 = \frac{t_2+t_4}{2}$	1.0		
1.7	Численное значение времени подъема на три этажа $t_3 = 6{,}5$ с	0.5		
2.1	Обосновано, что при подъеме на один этаж лифт не достигает максимального значения скорости	2.0		
2.2	Записано уравнение $t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}}$ или аналогичное	1.0		
2.3	Найдено время подъема на один этаж $t_1 = \sqrt{2(t_4-t_2)(2t_2-t_4)}$	1.5		
2.4	Численное значение времени подъема на один этаж $t_1 \approx 3{,}4$ с	0.5		

Шифр

$\sum$

9-Т2. Сообщающиеся сосуды

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано равенство давлений жидкости в двух сосудах	1.0		
1.2	Получено выражение для плотности второй жидкости $\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$	2.0		
2.1	Для случая $h < H$ записаны уровни жидкостей в первом сосуде	1.0		
2.2	Для случая $h < H$ получено $m = \rho_1 \frac{H}{2} S$	2.0		
2.3	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ есть понимание, что вторая жидкость перетекает через трубочку и всплывает в правом сосуде (качественное понимание, описание словами)	2.0		
2.4	Найдено, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$	2 соотн по 1.0		
2.5	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ получено $m = \rho_1 \frac{H(2H-h)}{2h} S$	2.0		

Шифр

$\sum$

9-Т3. Эквилибр

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано, что в конце второго участка льдинка всплыла	3.0		
1.2	Уравнение моментов для нахождения массы	2.0		
1.3	Найдена масса $m = 0{,}2$ кг	1.0		
2.1	Найдено изменение массы Δm между двумя «хорошими» точками на 4 отрезке	1.0		
2.2	Уравнение для нахождения мощности P	1.0		
2.3	Численное значение $P = 115$ Вт	1.0		
3.1	Уравнение для нахождения начальной температуры t_0	2.0		
3.2	Численное значение $t_0 = -81°\text{C}$	1.0		

Шифр

$\sum$

. Запутанная схема

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Нарисована эквивалентная схема, из которой видны параллельные и последовательные соединения, или в решении явно написано про параллельные/последовательные соединения в схеме.	2.0		
1.2	Указано, что один из приборов 3 и 4 амперметр, второй – вольтметр.	1.0		
1.3	Показано, что прибор 1 – вольтметр.	2.0		
1.4	Показано, что прибор 2 – вольтметр.	1.0		
1.5	Показано, что прибор 5 – амперметр.	1.0		
2.1	Обосновано, что напряжение $U_3 = U_4 = 2$ В.	1.0		
2.2	Обосновано, что напряжение $U_1 = 12$ В.	1.0		
2.3	Обосновано, что сила тока $I_3 = 200$ мкА.	1.0		
2.4	Найдено сопротивление амперметра $R_\text{А} =$ 10 кОм.	1.0		
2.5	Найдено сопротивление вольтметра $R_V =$ 50 кОм.	1.0		

Шифр

$\sum$

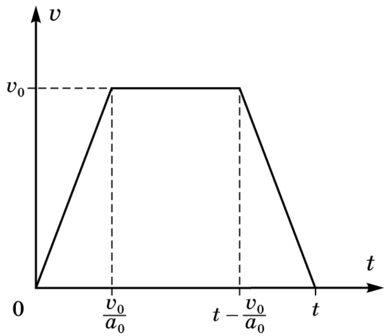
9-T5. Архив Снеллиуса

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Выполнены верные построения для нахождения положения первой линзы.	0.5		
1.2	Выполнены верные построения для нахождения положения второй линзы.	0.5		
2.1	Описан правильный способ нахождения оптического центра O_1.	0.5		
2.2	Описан правильный способ нахождения оптического центра O_2.	0.5		
2.3	На рисунке или в тексте присутствуют указания на то, что левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей (по 0,5 балла).	1.0		
3.1	Обосновано, что точка A принадлежит фокальной плоскости собирающей линзы.	2.0		
3.2	На рисунке правильно построена фокальная плоскость собирающей линзы.	1.0		
3.3	Построен перпендикуляр из оптического центра O_1 и найдено положение заднего фокуса F_1.	1.0		
3.4	На рисунке правильно отмечен передний фокус F_1.	0.5		
3.5	Используются верные рассуждения или построения позволяющие найти положение фокальной плоскости правой линзы (нахождение точки B в авторском решении).	2.0		
3.6	На рисунке правильно построена фокальная плоскость рассеивающей линзы.	1.0		
3.7	Построен перпендикуляр из оптического центра O_2 и найдено положение переднего фокуса F.	1.0		
3.8	На рисунке правильно отмечен задний фокус F_2.	0.5		

9 класс

Задача №9-Т1. Лифт

Лифт преодолевает необходимую дистанцию (n этажей высотой l_0 каждый) за минимально возможное время t, если разгоняется с ускорением a_0 до скорости v_0 , далее двигается с постоянной скоростью v_0 в течение времени $t - \frac{2v_0}{a_0}$ и тормозит до полной остановки за время $\frac{v_0}{a_0}$.



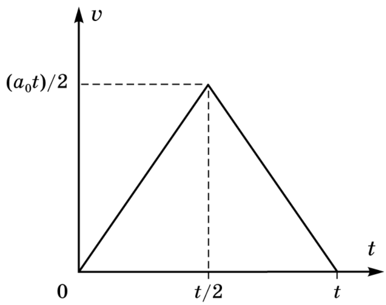
Начертим соответствующий график скорости лифта от времени. Площадь под ним пропорциональна пройденному пути:

$$nl_0 = \frac{t + (t - \frac{2v_0}{a_0})}{2} v_0$$

Откуда

$$t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$$

Однако эта формула верна лишь при $t - \frac{2v_0}{a_0} > 0$, т.е. только в том случае, когда лифт успевает достичь максимальной скорости v_0 по скорости. Это условие можно переписать в виде: $n > \frac{v_0^2}{a_0 l_0}$.



Если лифт не успевает достичь максимальной скорости v_0 , то оптимальным по времени становится следующая стратегия зависимости скорости от времени. Необходимо половину времени ускоряться с a_0 и половину времени замедляться с тем же по модулю ускорением. График зависимости скорости от времени представлен на рисунке.

В этом случае пройденный путь равен

$$nl_0 = \frac{\frac{a_0 t}{2} t}{2}$$

Откуда

$$t(n) = 2\sqrt{\frac{nl_0}{a_0}}$$

По условию, обе точки принадлежат случаю $t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$: $\begin{cases} t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \\ t_4 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \end{cases}$

Тогда

$$t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} = \frac{t_2 + t_4}{2} = 6{,}5 \text{ с}$$

Из системы найдем $n_{\text{крит}} = \frac{v_0^2}{a_0 l_0} = \frac{2(2t_2 - t_4)}{t_4 - t_2} = \frac{4}{3} > 1$, то есть при подъеме на один этаж лифт не достигает максимально возможной скорости. Так что

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}} = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5 \text{ с}$$

Задача №9-Т2. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 g h + \rho_1 g(\frac{3}{2}H - h) = \rho_1 g H$$

$$\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ $(h > \frac{H}{2})$.

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g h + \rho_1 g(\frac{5H}{4} - h) = \rho_1 g \frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 - \rho_2)hS = \rho_1 \frac{H}{2} S$$

$m = \rho_1 \frac{H}{2} S$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H. Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g H + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g(\frac{9H}{4} - h) + \rho_2 g(h - H)$$

или

$$m = \rho_1(2H - h)S + \rho_2(h - 2H)S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h} S$$

Задача №9-Т3. Эквилибр

Отметим, что нить не натянута до помещения льда в сосуд. Это означает, что центр масс системы «рычаг + сосуд» находится по горизонтали на уровне опоры, что позволяет в уравнениях моментов исключать соответствующие слагаемые. График имеет 4 участка. На первом, очевидно, лед нагревается. На втором - идет плавление льда, и вода начинает стекать с льдинки в сосуд, равномерно распределяясь по его дну. Однако заканчивается этот участок раньше, чем лед полностью успевает растаять – в момент отрыва льдинки от дна. То есть в конце утерянного участка оставшийся лед всплыл. Кстати, начало этого участка также не обязательно совпадает с моментом начала плавления, ведь вода может скапливаться в каких-то углублениях на льдинке и положение центра масс льда может оставаться какое-то время неизменным. Вообще, поведение на втором участке предсказать почти невозможно, поскольку процесс сильно зависит от формы куска льда, а также от того, как именно к нему будет подводиться тепло. На третьем участке – в сосуде сначала тающий лед, плавающий на поверхности воды, а потом вода, нагревающаяся до температуры кипения. На четвертом участке вода уже достигла температуры кипения и испаряется. Изменение силы натяжения нити в начале связано с перераспределением веса содержимого по мере нагрева, а в конце – с изменением массы содержимого. Массу льда можно найти по третьему отрезку графика из правила моментов (x – длина $\frac{1}{8}$ части рычага):

$$T_3 \cdot 2x = mg \cdot 3x;$$

$T_3 = 3$ Н. Откуда $m = 0{,}2$ кг.

Мощность нагрева легко посчитать по четвертому отрезку, зная массу, испарившуюся за известный промежуток времени. Хорошие точки на графике – (1600 с; 3 Н), а также (3200 с; 1,8 Н). Из них получаем $\Delta T = 1{,}2$ Н, $\Delta m = \frac{2\Delta T}{3g} =$ 0,08 кг, $\Delta\tau = 1600$ с. Откуда:

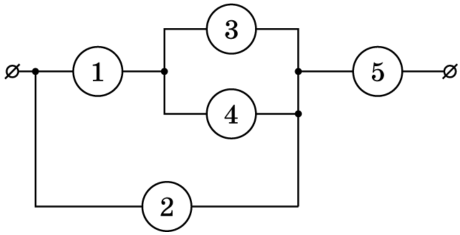
$$P = \frac{L\Delta m}{\Delta\tau} = 115 \text{ Вт}.$$

Зная мощность, не сложно посчитать начальную температуру льда:

$$t_0 = \frac{cm\Delta t_{\text{воды}} + \lambda m - P\tau_3}{c_{\text{льда}}m} \approx -81^\circ\text{C}.$$

Задача №9-Т4. Запутанная схема

Перерисуем электрическую схему. Приборы 3 и 4 соединены параллельно, а по условию нет двух вольтметров или амперметров с одинаковыми показаниями. Поэтому один из приборов 3 и 4 должен быть вольтметром, а второй – амперметром. Давайте, для определенности, будем считать 3 амперметром, а 4 – вольтметром.



Предположим, что прибор номер 1 – амперметр. Через прибор 1 протекает ток, равный сумме токов через приборы 3 и 4. Тогда из двух амперметров 1 и 3 больший ток протекает через амперметр 1. Значит через амперметр 1 протекает ток $I_1 = 520$ мкА, а через амперметр 3 протекает ток $I_3 = 200$ мкА. Соответственно через вольтметр 4 протекает ток $I_1 - I_3 = 320$ мкА. Найдём внутреннее сопротивление амперметра. Амперметр 3 включен в схему параллельно вольтметру 4, значит напряжение на амперметре 3 равно напряжению на вольтметре 4. Тогда внутреннее сопротивление амперметров $R_A = \frac{U_4}{I_3}$. Напряжение на амперметре 1 равно $U_1 = I_1 R_A = \frac{U_4 I_1}{I_3}$. Известно, что в схеме всего 2 амперметра. Если приборы 1 и 3 – амперметры, тогда прибор 2 должен быть вольтметром. Он показывает сумму напряжений на амперметрах 1 и 3, равную $U_1 + U_4 = \frac{U_4(I_1+I_3)}{I_3} = 3{,}6U_4$. Но, по условию задачи, в схеме нет двух вольтметров, показания которых различаются в 3,6 раза. Тогда мы приходим к противоречию с предположением, что прибор 1 – амперметр. Следовательно, прибор 1 – вольтметр. Через вольтметр 1 течет ток, равный сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. Поэтому напряжение на вольтметре 1 больше, чем на вольтметре 4. Если 2 – вольтметр, то напряжение на нем равно сумме напряжений на 1 и 4. Если 5 – вольтметр, то ток через него равен сумме токов через 1 и 2, значит напряжение на 5 больше, чем напряжение на 1 и 4. В любом случае получаем, что самое маленькое напряжение из всех вольтметров (равное 2 В) показывает вольтметр 4, а вольтметр 1 показывает среднее значение $U_1 = 12$ В. Напряжение на приборе 2 равно сумме напряжений на вольтметрах 1 и 4. Тогда $U_2 = U_1 + U_4 = 14$ В. Если предположить, что прибор 2 – амперметр, то сила тока через него должна быть равна $\frac{U_2}{R_A} = \frac{U_2 I_3}{U_4} = 7I_3$. Но это не соответствует условиям задачи, по условию показания двух амперметров отличаются в $\frac{520}{200} = 2{,}6$ раза. Следовательно прибор 2 – вольтметр и его показания $U_2 = 14$ В, а прибор 5 – амперметр. Мы узнали на каких местах в схеме стоят амперметры и вольтметры.

Приборы 1, 2 и 4 – вольтметры, 3 и 5 – амперметры.

Теперь найдем внутренние сопротивления приборов. Сила тока через амперметр 5 равна сумме токов через амперметр 3, вольтметр 4 и вольтметр 2. Следовательно, сила тока в амперметре 3 меньше, чем в амперметре 5, $I_3 = 200$ мкА,

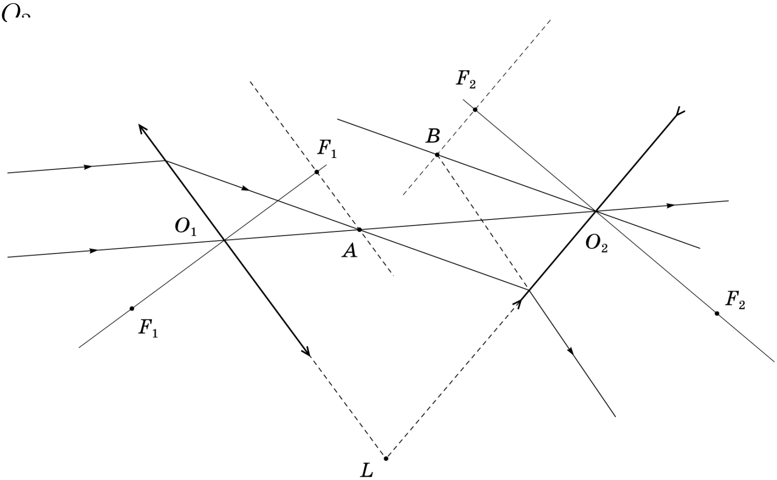
$I_5 = 520$ мкА. Тогда сопротивление амперметров $R_A = \frac{U_4}{I_3} = 10$ кОм. Сила тока через вольтметр 1 равна сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. $I_1 = \frac{U_1}{R_V} = I_3 + \frac{U_4}{R_V}$. Преобразуем это выражение $\frac{U_1 - U_4}{R_V} = I_3$ и выразим из него сопротивление вольтметров $R_V = \frac{U_1 - U_4}{I_3} = 50$ кОм.

Задача №9-Т5. Архив Снеллиуса

Проведем две прямые, проходящие через точку L и точки преломления верхнего луча. Таким образом восстановим положения линз.

Поскольку нижний луч не преломляется, он должен проходить через оптические центры обеих линз (O_1 и O_2 на рисунке), следовательно левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей.

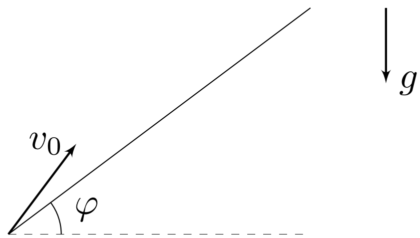
Параллельные лучи после прохождения через собирающую линзу сходятся в фокальной плоскости (точка A). Проведем прямую параллельную левой линзе и проходящую через точку A, затем опустим из оптического центра O_1 собирающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение заднего фокуса F_1 левой линзы, для нахождения переднего фокуса F_1 отложим такое же расстояние от оптического центра O_1. Для нахождения фокусов рассеивающей линзы выполним дополнительные построения – проведем через оптический центр линзы O_2 прямую параллельную падающему лучу. Точка пересечения этой прямой и продолжения преломленного луча принадлежит фокальной плоскости рассеивающей линзы (точка B). Проведем прямую параллельную правой линзе и проходящую через точку B, затем опустим из оптического центра O_2 рассеивающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение переднего фокуса F_2 правой линзы, для нахождения заднего фокуса F_2 отложим такое же расстояние от оптического центра O_2.



10 класс

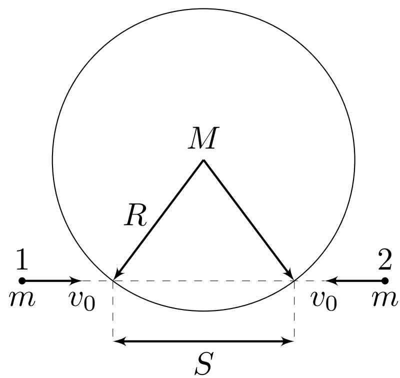
Теоретический тур

Задача №1. Хитрая пушка



Скорость вылета снаряда из игрушечной пушки зависит от угла с вертикалью, под которым производится выстрел. Особенность этой зависимости состоит в том, что угловая скорость вращения вектора скорости снаряда сразу после выстрела не зависит от угла, под которым произведён выстрел, и равна $\omega = 0{,}5$ рад/с. Пушка располагается у подножия длинной горки, образующей угол $\varphi = 30^\circ$ с горизонтом. Траектория снаряда лежит в плоскости рисунка и такова, что в определённый момент снаряд падает на горку. Сопротивлением воздуха, а также размерами пушки и снаряда можно пренебречь. Чему равно максимально возможное время полёта снаряда t_{max} до падения на горку?

Задача №2. Шайбами по барабану



На гладкой горизонтальной поверхности лежит большой твёрдый цилиндрический барабан массой M и радиусом R. Две одинаковые маленькие, но тяжёлые шайбы массами $m = 2M$ скользят по поверхности с одинаковыми неизвестными скоростями v_0 вдоль одной прямой, пересекающей барабан. Расстояние между точками пересечения этой прямой с боковой поверхностью барабана равно S. Шайба 1 сталкивается с барабаном на мгновение раньше, чем с ним столкнулась бы шайба 2, если бы не было столкновения с шайбой 1. Если расстояние S равно $S_1 = R/2$, то после всех соударений шайб с барабаном скорость последнего оказалась равной u_1. Считайте известным, что во всех случаях шайбы друг с другом не сталкиваются. Трения между шайбами и барабаном нет, барабан никогда не отрывается от поверхности, а все их столкновения являются упругими и настолько быстрыми, что барабан никогда не контактирует с обеими шайбами одновременно.

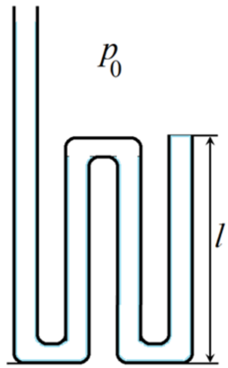
1. Определите величину скорости v_0 налетавших шайб.

2. Чему будет равна скорость барабана u_2, если расстояние S изменить до значения $S_2 = R$?

Задача №3. Загогулина

Изогнутая в трех местах металлическая трубка состоит из четырех прямых параллельных участков: трех – одинаковой длины l и четвертого, длина которого существенно больше (см. рисунок). Длина изогнутых участков трубки мала по сравнению с l, их объемом можно пренебречь. Площадь внутреннего сечения трубки S, поперечные размеры трубки также много меньше l. Трубка установлена вертикально открытыми концами вверх. В самое длинное колено начинают медленно наливать воду.

Плотность воды – ρ, атмосферное давление p_0, ускорение свободного падения g. Все процессы в трубке протекают при постоянной температуре. Капиллярными эффектами и влиянием колебаний уровня воды можно пренебречь.

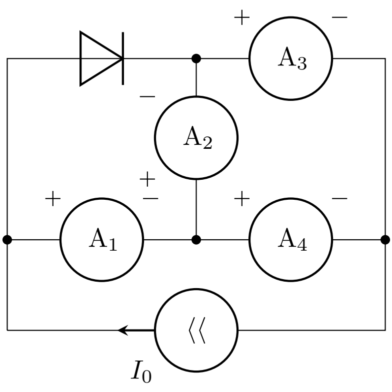


1. До какой высоты вода заполнит левое колено трубки к моменту, когда она начнет вытекать из крайнего правого колена? Считайте, что из левого колена вода не вытекает.

2. Какой объем воды будет находиться в трубке в этот момент?

Задача №4. Источник стабильности

Готовясь к олимпиаде по физике, десятиклассник Денис собрал электрическую цепь (см. рис. а), состоящую из четырёх одинаковых амперметров, диода и регулируемого источника тока. Полярность подключения амперметров и направление тока через источник указаны на схеме, а зависимость силы тока, протекающего через диод, от напряжения на нём представлена на рис. б. Изменяя силу тока I_0, выдаваемую источником, Денис выяснил, что зависимость си-



а)

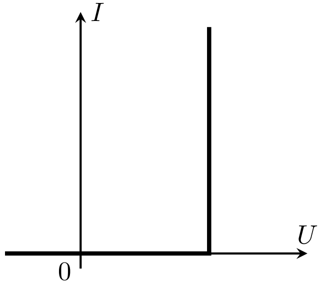
лы тока через один из амперметров от I_0 имеет вид, изображённый на рис. в, где I_1 — известный параметр.

1. Для какого из амперметров (A_1, A_3 или A_4) справедлива зависимость, изображённая на рис. в? Свой ответ обоснуйте.

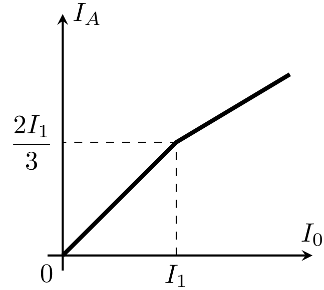
2. Определите, при каком значении I_0 ток через амперметр A_2 не течёт.

3. Постройте качественный график зависимости показаний амперметра A_2 от силы тока через источник, указав на нём координаты характерных точек.

Примечание: Источником тока называется устройство, через которое течёт заданный ток, независимо от параметров внешней цепи.



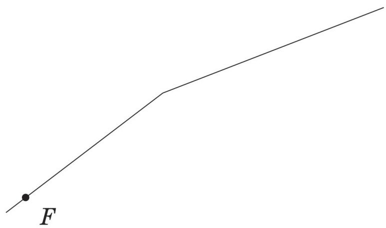
б)



в)

Задача №5. В фокусе внимания

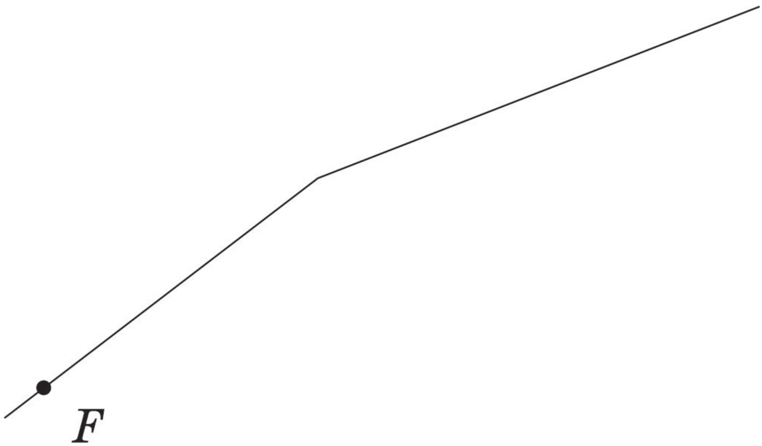
Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на котором были изображены тонкая линза, её фокусы и луч, проходящий через один из фокусов. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только луч и фокус F, через который он проходил.

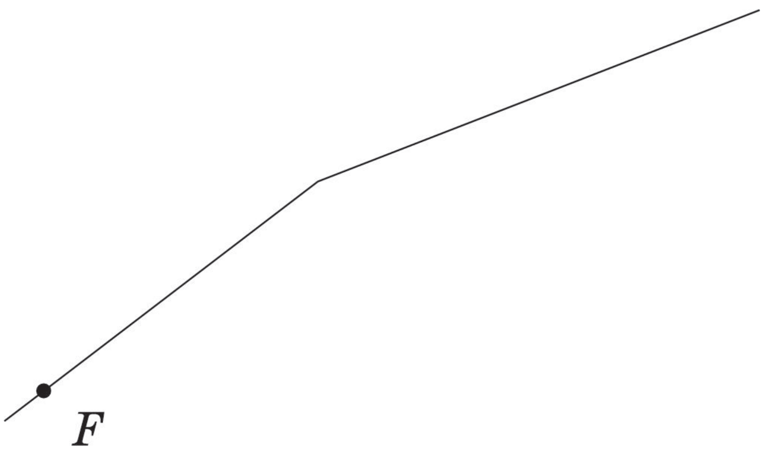


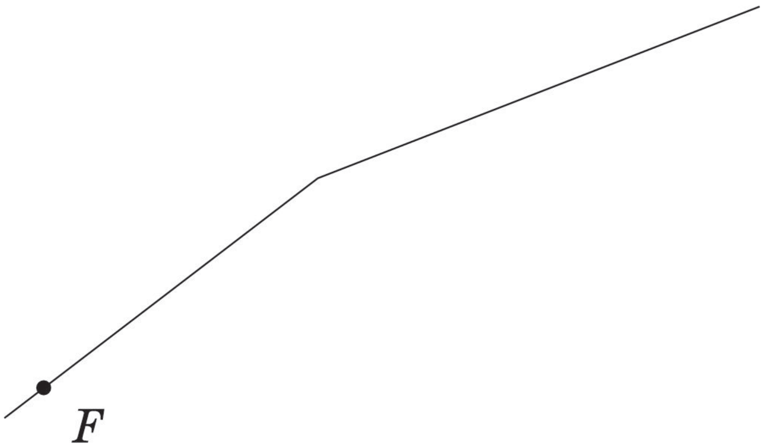
Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) положение линзы.

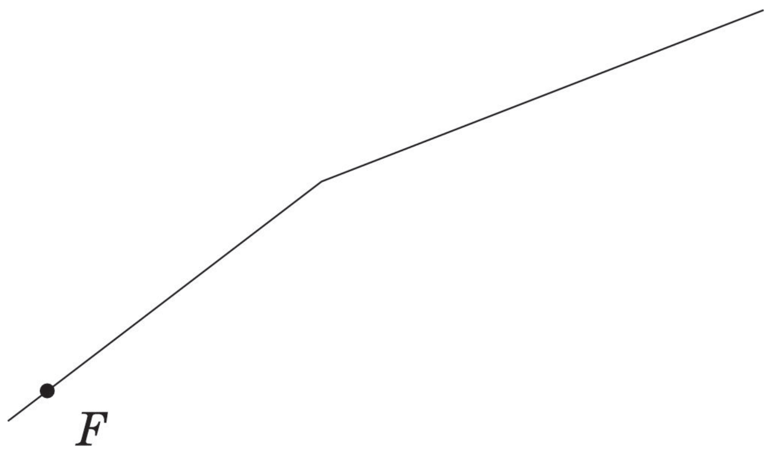
На двух отдельных листах приведены в увеличенном масштабе четыре экземпляра чертежа. Все построения выполняйте на этих листах. Описывать метод построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

Примечание: При построении данного чертежа Снеллиус предполагал, что данная линза **любые** лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч — это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от неё.


F


F


F


F

10 класс

Задача №1. Хитрая пушка

Пусть ускорение свободного падения равняется g, а выстрел производится под углом α к вертикали со скоростью $v_0(\alpha)$. Тогда имеем:

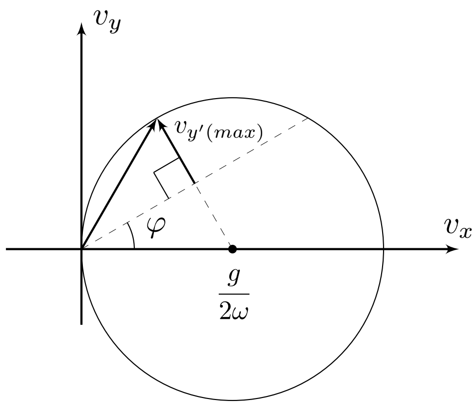
$$a_n = \omega v_0(\alpha) = g_n = g\sin\alpha \Rightarrow v_0(\alpha) = \frac{g\sin\alpha}{\omega}.$$

Далее можно решать задачу четырьмя способами.

Первое способ:

Введём координатную ось y', направленную перпендикулярно поверхности горки. Проекция ускорения снаряда на ось y' равна $g_{y'} = -g\cos\varphi$. Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = -\frac{2v_{0y'}}{g_{y'}} = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi}.$$



Максимально возможному времени полёта снаряда соответствует максимальное значение $v_{0y'}$. Введём систему координат Oxy с началом в месте расположения пушки, где ось x направлена вправо, а ось y – вертикально вверх. Тогда:

$$v_0 = \frac{g\sin\alpha}{\omega} = \frac{g}{\omega}\frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{gv_{0x}}{\omega},$$

откуда получаем:

$$\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$

Таким образом, геометрическое место точек конца вектора скорости $\vec{v}_0$ представляет собой окружность (см.рис). Из геометрии рисунка следует, что максимальное время полёта соответствует максимально возможному значению $v_{0y'}$, которое достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведённом к направлению поверхности горки из центра окружности. Получаем:

$$v_{0y'(max)} = \frac{g(1-\sin\varphi)}{2\omega},$$

откуда:

$$t_{max} = \frac{1 - \sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Второй способ:

Проекция начальной скорости снаряда на ось y' равна $v_{0y'} = v_0 \cos(\alpha + \varphi)$. Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = \frac{2v_0(\alpha)\cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Воспользуемся преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму:

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi) = \sin(\alpha - (\alpha+\varphi)) + \sin(\alpha + (\alpha+\varphi)) = \sin(2\alpha+\varphi) - \sin\varphi.$$

Максимальное значение $\sin(2\alpha+\varphi) = 1$.

Аналогично преобразованию произведения тригонометрических функций в сумму, можно найти максимальное значение t, продифференцировав полученное выражение по α:

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{2}{\omega\cos\varphi}\frac{d(\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi))}{d\alpha} = 0$$

Отсюда:

$$\cos\alpha\cos(\alpha+\varphi) - \sin\alpha\sin(\alpha+\varphi) = \cos(2\alpha+\varphi) = 0.$$

Таким образом:

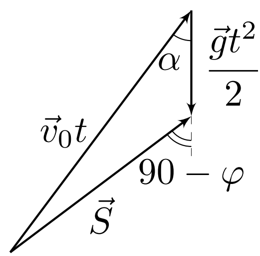
$$2\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда максимальное время t_{max} составляет:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Третий способ:

Построим векторный треугольник перемещений для момента падения снаряда на горку. В указанный момент времени вектор перемещения образует угол φ с горизонтом, поэтому из теоремы синусов находим:



$$\frac{v_0 t}{\sin(90+\varphi)} = \frac{v_0 t}{\cos\varphi} = \frac{gt^2}{2\sin(90-\alpha-\varphi)} = \frac{gt^2}{2\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Отсюда:

$$t = \frac{2v_0\cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Исследование полученного выражения на максимум совпадает с проделанным в рамках первого способа решения. Таким образом:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15\ \text{с}.$$

Четвёртый способ:

Решим задачу классическим способом – используя зависимости координат x и y от времени t:

$$x = v_{0x}t = v_0\sin\alpha t \qquad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0\cos\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на горку $y/x = \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{gt}{2v_0\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\omega t}{2\sin^2\alpha}.$$

Введём переменную $z = \operatorname{ctg}\alpha$. Учитывая, что $1/\sin^2\alpha = 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = 1+z^2$, получим:

$$t = \frac{2}{\omega}\frac{z-\operatorname{tg}\varphi}{1+z^2} = \frac{2f(z)}{\omega}.$$

Время t принимает значение, когда максимальное значение принимает функция $f(z)$. Определим величину z_0, соответствующую максимальному значению $f(z)$:

$$\frac{df(z_0)}{dz} = \frac{1+z_0^2-2z_0(z_0-\operatorname{tg}\varphi)}{(1+z_0^2)^2} = 0 \Rightarrow z_0^2 - 2z_0\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$z_0 = \operatorname{tg}\varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1} \Rightarrow z_0 = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Таким образом:

$$f_{max} = f(z_0) = \frac{\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi\right)}{1+\left(\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2} = \frac{\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}.$$

Максимальное значение $f(z)$ может быть найдено из без использования производной. Действительно:

$$\frac{z-\operatorname{tg}\varphi}{1+z^2}=f(z)\Rightarrow z^2f(z)-z+f(z)+\operatorname{tg}\varphi=0.$$

Исследуем дискриминант полученного уравнения:

$$D=1-4f(z)(f(z)+\operatorname{tg}\varphi)\geq 0$$

Максимально возможное значение $f(z)$ соответствует равному нулю дискриминанту. Отсюда:

$$4f^2(z)+4f(z)\operatorname{tg}\varphi-1=0\Rightarrow f_{max}=-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}+\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{2}=\frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi}.$$

Окончательно:

$$t_{max}=\frac{\cos\varphi}{\omega(1+\sin\varphi)}=\frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi}\approx 1.15\text{ с}.$$

Задача №10-Т2. Шайбами по барабану

Определим скорость барабана после соударения с шайбой 1. Поскольку трения между шайбами и барабаном нет – все их удары центральные, и движение всех тел остается поступательным, а проекции скоростей тел на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударения. Введём вдоль линии центров ось y, направленную от шайбы 1 к центру барабана. Пусть α – угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров. Запишем систему из закона сохранения импульса в проекции на ось y и закона сохранения энергии:

$$\begin{cases} mv_0\cos\alpha = Mv_{M1}+mv_{1y} \quad \text{ЗСИ} \\ \dfrac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}+\dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2}=\dfrac{mv_{1y}^2}{2}+\dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2}+\dfrac{Mv_{M1}^2}{2} \quad \text{ЗСЭ} \end{cases}$$

Решая записанную систему уравнений, находим:

$$v_{M1}=v_0\cos\alpha+v_{1y}=2v_0\cos\alpha-\frac{Mv_{M1}}{m}\Rightarrow v_{M1}=\frac{2mv_0\cos\alpha}{m+M}.$$

Получим условие, при котором будет столкновение между шайбой 2 и барабаном. Если ввести ось z, направленную от шайбы 2 к центру барабана, то условие столкновения будет заключаться в том, что проекция скорости барабана относительно шайбы 2 на ось z будет отрицательной, т.е при условии:

$$v_{z(\text{отн})}=-v_{M1}\cos 2\alpha-v_0\cos\alpha=-v_0\cos\alpha\left(1+\frac{2m\cos 2\alpha}{m+M}\right)<0.$$

Поскольку $\cos\alpha > 0$, данное условие можно записать следующим образом:

$$1 + \frac{2m\cos 2\alpha}{m+M} = 1 + \frac{2m(2\cos^2\alpha - 1)}{m+M} > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S}{2R} > \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{M}{m}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

или же при условии:

$$S > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Данное условие не выполнено при $S_1 = R/2$, поэтому столкновения между барабаном и шайбой 2 не будет, а значит $v_{M1} = u_1$:

$$u_1 = \frac{mv_0}{m+M}\frac{S_1}{R} = \frac{v_0}{3}.$$

Таким образом:

$$v_0 = 3u_1.$$

При $S_2 = R$ столкновение между барабаном и шайбой 2 будет, при этом $\alpha_2 = 60^\circ$. В системе отсчёта, движущейся со скоростью $\vec{v}_{M1}$, соударение сводится к рассмотренному ранее. В данной системе отсчёта проекция v_{2z} скорости шайбы 2 на ось z равняется:

$$v_{2z} = v_0\cos\alpha + v_{M1}\cos 2\alpha = \frac{v_0}{2} + \frac{2v_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{6}.$$

В указанной системе отсчёта скорость барабана сразу после соударения равна:

$$v_{M2} = \frac{2mv_{2y'}}{m+M} = \frac{2v_0}{9}.$$

Обратим внимание, что проекция скорости $\vec{v}_{M2}$ на ось y является положительной, а значит, повторного столкновения барабана с шайбой 1 не будет.

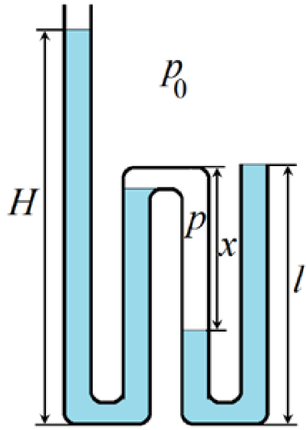
Для скорости u_2 имеем:

$$u_2 = \sqrt{v_{M1}^2 + v_{M2}^2 - 2v_{M1}v_{M2}\cos 2\alpha},$$

откуда:

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$$

Задача №10-Т3. Загогулина



После заполнения водой второго слева вертикального участка, вода начнет стекать в третье колено, заполнит перемычку внизу между третьим и четвёртым и «отсечёт» воздух в третьем колене от атмосферного. Образуется воздушная «пробка», давление p внутри которой по мере заполнения четвёртого колена будет возрастать. Запишем условия равновесия (равенства давлений) для первого и второго вертикальных участков трубки:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g l. \tag{1}$$

Для третьего и четвертого

$$p_0 + \rho g l = p + \rho g (l - x).$$

Вычитая эти уравнения, получим

$$H - l = x.$$

Поскольку воздух внутри трубки начал сжиматься от объёма, соответствующего одному вертикальному участку, то по закону Бойля-Мариотта:

$$p_0 l S = p x S.$$

Из последних двух уравнений находим:

$$p = \frac{p_0 l}{H - l}.$$

Подставляем это в уравнение (1):

$$p_0 + \rho g H = \frac{p_0 l}{H - l} + \rho g l.$$

Избавимся от знаменателя в правой части и перегруппируем:

$$\rho g (H - l)^2 + p_0 (H - l) - p_0 l = 0.$$

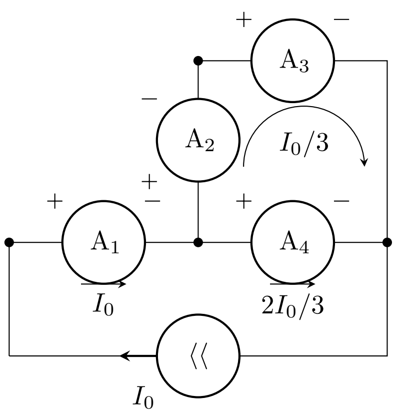
Обозначив для удобства $p_0/g = l_0$, решаем квадратное уравнение, оставляя только имеющий физический смысл положительный корень:

$$H = l + \frac{1}{2}\left(\sqrt{l_0^2 + 4 l_0 l} - l_0\right).$$

Объём налитой воды можно определить по суммарной длине трубы, занятой водой:

$$V = S(H + 3l - x) = 4Sl.$$

Задача №10-Т4. Источник стабильности



Рассмотрим малые значения силы тока I_0, при которых диод будет закрыт. В этом случае эквивалентная схема примет вид, изображённый на рисунке. Найдём токи, текущие через амперметры. Сила тока через A_1 равна I_0. Так как A_4 присоединён параллельно к паре амперметров A_2 и A_3, а его сопротивление вдвое меньше, чем суммарное сопротивление второго и третьего прибора, сила тока через A_4 будет равна $2I_0/3$. Сила тока, текущего через A_2 и A_3, следовательно, станет $I_0/3$. На графике, представленном в условии, участок идущий от начала координат описывается уравнением $I = 2I_0/3$, что соответствует результату, полученному для четвёртого амперметра.

Пусть r — сопротивление амперметра. Определим сначала напряжение открытия диода U_D. Так как характер зависимости тока через четвёртый амперметр от I_0 меняется при $I_0 = I_1$, это значение соответствует тому, что напряжение на диоде достигло U_D, но ток через диод ещё равен нулю (переход от горизонтального участка ВАХ прибора к вертикальному). Запишем условие равенства напряжения на диоде суммарному напряжению на первом и втором амперметре при $I_0 = I_1$

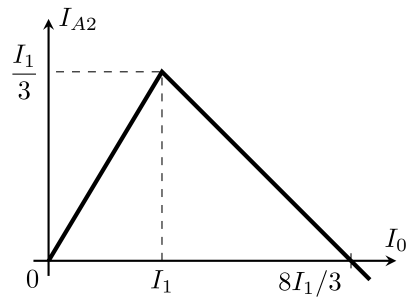
$$U_D = I_1 r + \frac{I_1}{3} \cdot r = \frac{4I_1 r}{3}.$$

Ситуация, когда ток через второй амперметр не течёт, во-первых, может произойти только при открытом диоде. Во-вторых, если ток через A_2 не течёт, то напряжения на A_3 и A_4 равны, что означает равенство токов через них:

$$I_{A3} = I_{A4} = \frac{I_0}{2}.$$

Соответственно, должны быть равны напряжения на первом амперметре и диоде. Поскольку в рассматриваемом случае $I_{A1} = I_{A4}$,

$$U_D = I_{A1} r \quad \Rightarrow \quad \frac{4I_1 r}{3} = \frac{I_0}{2} \cdot r \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{8I_1}{3}.$$



Пока диод закрыт, то есть при $I_0 < I_1$, сила тока через второй амперметр равна $I_{A2} = I_0/3$. Если $I_0 > I_1$, напряжение на диоде постоянно и равно $U_D = 4I_1 r/3$. Чтобы построить ту часть искомого графика, которая соответствует открытому диоду, можно рассуждать одним из двух способов.

Способ 1. ВАХ диода состоит из двух прямолинейных участков — горизонтального и вертикального. Поэтому, если находиться в пределах только одного участка (в данном случае, вертикального), диод можно считать линейным элементом. Остальные элементы цепи, представленной в условии, тоже имеют прямолинейные ВАХ, то есть также являются линейными. Следовательно, зависимость силы тока на втором амперметре от I_0 при $I_0 > I_1$ является линейной. Отсюда, учитывая, что график этой зависимости должен проходить через точки $(I_1; I_1/3)$ и $(8I_1/3; 0)$, получим график, изображённый на рисунке.

Способ 2 Расставим токи в цепи при $I_0 > I_1$, учитывая, что напряжение на диоде равно U_D. Пусть сила тока через второй амперметр равна I_{A2}. Тогда, исходя из равенства суммы напряжений на A_1 и A_2 напряжению на диоде, получим, что ток через первый амперметр

$$I_{A1} = \frac{U_D - I_{A2} r}{r} = \frac{U_D}{r} - I_{A2}.$$

Соответственно, токи через A_3 и A_4 будут равны

$$I_{A4} = I_{A1} - I_{A2} = \frac{U_D}{r} - 2I_{A2},$$

$$I_{A3} = I_0 - I_{A4} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 2I_{A2}.$$

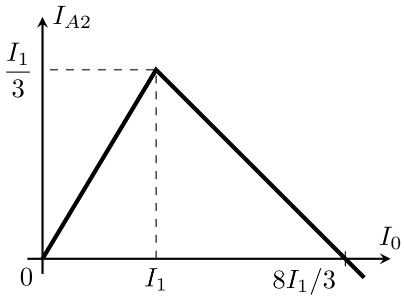
Так как сумма напряжений на A_2 и A_3 должна быть равна напряжению на A_4,

$$I_{A4}r = I_{A2}r + I_{A3}r \quad \Rightarrow \quad \frac{U_D}{r} - 2I_{A2} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 3I_{A2}.$$

Отсюда, используя равенство $U_D = 4I_1 r/3$, найдём, что

$$I_{A2} = \frac{2U_D}{5r} - \frac{I_0}{5} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}.$$

Далее строим графики зависимостей $I_{A2} = I_0/3$ при $I_0 < I_1$ и $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$ при $I_0 > I_1$ и получаем тот же рисунок, что и в Способе 1.

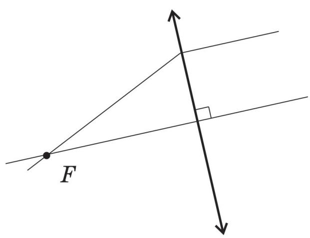


Задача №10-Т5. В фокусе внимания

Возможны два случая – линза собирающая и линза рассеивающая. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

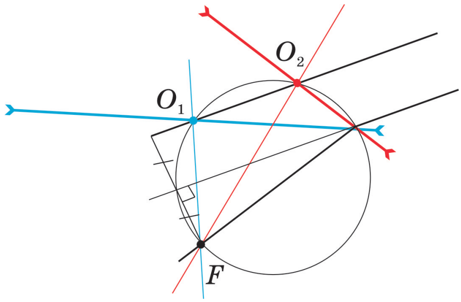
Собирающая линза.

Луч, прошедший через фокус собирающей линзы, после преломления в ней идёт параллельно главной оптической оси. Таким образом, из рисунка нам известно направление главной оптической оси (далее – ГОО) и одна из её точек (F). По этим данным восстанавливаем положение ГОО. Для этого проводим через F прямую, параллельную лучу после преломления. Плоскость линзы перпендикулярна ГОО и нам



известна одна из её точек - точка, где преломляется луч. Положение плоскости линзы восстанавливаем проведением перпендикуляра к ГОО из точки преломления луча.

Рассеивающая линза.



Фокус линзы F, её оптический центр O и точка преломления луча образуют прямоугольный треугольник. Построим на отрезке (как на диаметре), соединяющем фокус и точку преломления луча, окружность. Оптический центр должен лежать на этой окружности. Из формулы тонкой линзы (или используя тот факт, что параллельный пучок лучей после преломления на рассеивающей линзе идёт так, что продолжения пересекаются в одной точке фокальной плоскости) можно показать, что луч, прошедший через фокус рассеивающей линзы, после преломления идёт так, как будто прошёл через половинный фокус. Продлим луч, который преломился в линзе – он должен делить пополам отрезок OF. Построим вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча и находящийся в два раза дальше от точки F. Он пройдет через оптический центр линзы, не отклоняясь от своего первоначального направления. Таким образом, оптический центр линзы может находится в точках пересечения вспомогательного луча с окружностью. В нашем случае таких пересечений два (точки O_1 и O_2). Значит, возможны два варианта расположения рассеивающей линзы. В каждом варианте плоскость линзы проходит через точку преломления исходного луча и соответствующий оптический центр.

Отметим, что в случае рассеивающей линзы для двух полученных решений известный нам луч идет под разными углами к ГОО линзы, которые по построению связаны между собой. Если обозначить за $_1$ угол между лучом и FO_1 и за $_2$ — угол между лучом и FO_2, то можно показать, что $\operatorname{tg}{}_1 \cdot \operatorname{tg}{}_2 = 1/2$. Следовательно, только один из этих лучей может являться параксиальным — ведь если один из этих углов мал ($\operatorname{tg} 1$), то другой должен иметь достаточно большое значение тангенса. Может быть и так, что оба угла не являются малыми. Поэтому только свойство линзы, указанное в «Примечании» условия, позволяет нам считать, что оба решения корректны.

Шифр

$\sum$

10-Т1. Хитрая пушка

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Записано выражение, связывающее нормальную компоненту ускорения снаряда a_n с угловой скоростью ω: $$a_n = \omega v_0.$$	2.0		
2	Определена нормальная компонента ускорения снаряда в момент выстрела: $$a_n = g\sin\alpha.$$	1.0		
3	Получена зависимость начальной скорости снаряда v_0 от направления выстрела: $$v_0 = \frac{g\sin\alpha}{\omega}.$$	1.0		
4	**Метод 1.** Для времени полёта записано: $$t = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi}$$	2.0		
5	**Метод 1.** Получено ГМТ конца вектора начальной скорости: $$\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$	2.0		
6	**Метод 1.** Указано, что максимальное возможное значение $v_{0y'}$ достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведённом к направлению поверхности горки из центра окружности.	1.0		

7	**Метод 1.** Определена величина $v_{0y'(max)}$: $$v_{0y'(max)} = \frac{g(1-\sin\varphi)}{2\omega}.$$	1.0		
8°	**Метод 2.** Для времени полёта записано: $$t = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi}$$	2.0		
9°	**Метод 2.** Получена зависимость времени полёта от угла α: $$t = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$	1.0		
10°	**Метод 2.** Предложен способ нахождения экстремума функции (например, преобразование тригонометрических функций в сумму, взятие производной, исследование дискриминанта биквадратного уравнения относительно $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ и т.д).	1.0		
11°	**Метод 2.** Получено условие экстремума функции: $$\sin(2\alpha+\varphi) = 1,$$ или эквивалентное ему.	2.0		
12°	**Метод 3.** Построен векторный треугольник перемещений для момента падения на горку.	2.0		
13°	**Метод 3.** Получено выражение для времени полёта: $$t = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$	1.0		
14°	**Метод 3.** Предложен способ нахождения экстремума функции (например, преобразование тригонометрических функций в сумму, взятие производной, исследование дискриминанта биквадратного уравнения относительно $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ и т.д).	1.0		

15°	**Метод 3.** Получено условие экстремума функции: $$\sin(2\alpha + \varphi) = 1,$$ или эквивалентное ему.	2.0		
16°	**Метод 4.** Записаны выражения для зависимостей обеих координат x и y от времени t: $$x = v_0 \sin\alpha t \qquad y = v_0 \cos\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$	1.0		
17°	**Метод 4.** Указано, что в момент падения снаряда на горку: $$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi.$$	1.0		
18°	**Метод 4.** Получена зависимость времени t движения снаряда от угла α: $$t = \frac{2}{\omega}\frac{z - \operatorname{tg}\varphi}{1+z^2}, \quad z = \operatorname{ctg}\alpha.$$	1.0		
19°	**Метод 4.** Предложен способ нахождения экстремума функции (например, взятие производной, исследование дискриминанта квадратного уравнения относительно $\operatorname{ctg}\alpha$ и т.д).	1.0		
20°	**Метод 4.** Правильно определён экстремум функции: $$\left(\frac{z - \operatorname{tg}\varphi}{1+z^2}\right)_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}.$$	2.0		

21	Получен ответ для t_{max} (по 1.0 балла за выражение через ω и численное значение:) $$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} = = \frac{\cos\varphi}{\omega(1+\sin\varphi)} = \frac{2}{\omega\sqrt{3}} \approx 1.15\ \text{с}.$$	2 по 1.0		

Шифр

$\sum$

10-Т2. Шайбами по барабану

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Отмечено, что проекции скоростей на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударений, поскольку трения между шайбами и барабаном отсутствует.	0.5		
1.2	Для первого соударения барабана с шайбой 1 записан закон сохранения импульса в проекции на ось y, направленную вдоль линии центров от шайбы 1 к центру барабана: $$mv_0\cos\alpha = Mv_{M1} + mv_{1y},$$ где α – угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров, v_{M1} – скорость барабана после удара, v_{1y} – проекция скорости шайбы 1 на ось y после удара.	1.0		
1.3	Для первого соударения барабана с шайбой 1 записан закон сохранения энергии: $$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{1y}^2}{2} + \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} + \frac{Mv_{M1}^2}{2}.$$	1.0		
1.4	Записано или используется в решении выражение для угла или какой-либо его тригонометрической функции, например, $\cos\alpha = \dfrac{S}{2R}$	0.5		
1.5	Получено выражение для скорости барабана после первого удара $$v_{M1} = \frac{2mv_0\cos\alpha}{m+M} = \frac{4}{3}v_0\cos\alpha$$	0.5		

1.6	Получено выражение для проекции скорости шайбы 1 после удара: $$v_{1y} = \frac{(m-M)v_0\cos\alpha}{m+M} = \frac{1}{3}v_0\cos\alpha$$	0.5		
1.7	Записано условие, при котором не будет столкновения между шайбой 2 и барабаном: $$v_{M1}\cos 2\alpha + v_0\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$	0.5		
1.8	Проверено, что условие отсутствия столкновения между шайбой 2 и барабаном выполнено: $$\cos\alpha = \frac{1}{4} < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$ Сделан вывод, что в заданной системе трех тел произошло суммарно всего одно столкновение	0.5		
1.9	Получено выражение для искомой скорости налетающих шайб: $$u_1 = v_{M1} \Rightarrow v_0 = 3u_1.$$	1.0		
2.1	Указано, что при $S = R$ происходит столкновение барабана с шайбой 2.	0.5		
2.2	Для первого соударения барабана с шайбой 2 записан закон сохранения импульса в проекции на ось z, направленную вдоль линии центров от шайбы 2 к центру барабана: $$mv_0\cos\alpha - Mv_{M1}\cos 2\alpha = Mv_{M2z} + mv_{2z}.$$	1.0		

2.3	Для первого соударения барабана с шайбой 2 записан закон сохранения энергии: $$\frac{mv_0^2}{2}+\frac{Mv_{M1}^2}{2}=\frac{mv_{2z}^2}{2}+\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2}+\frac{Mv_{M2z}^2}{2}+\frac{Mv_{M1}^2\sin^2 2\alpha}{2}.$$	1.0		
2.4	Получено выражение для проекции скорости барабана на ось z после удара: $$v_{M2z}=\frac{2mv_0\cos\alpha+(m-M)v_{M1}\cos 2\alpha}{m+M}=$$ $$=\frac{8}{9}v_0\cos\alpha(1+\cos^2\alpha).$$	1.0		
2.5	Записано условие, при котором не будет второго столкновения между шайбой 1 и барабаном: $$v_{M1}\sin^2 2\alpha-v_{M2z}\cos 2\alpha-v_{1y}>0.$$	0.5		
2.6	Проверено, что при $\cos\alpha=1/2$ условие выполнено, и в заданной системе трех тел произошло суммарно два столкновения.	0.5		
2.7	Записано выражение для итоговой скорости барабана: $$u_2^2=v_{M1}^2\sin^2 2\alpha+v_{M2z}^2.$$	0.5		
2.8	Получен ответ для итоговой скорости барабана: $$u_2=\frac{2\sqrt{13}v_0}{9}=\frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$$	1.0		

Шифр

$\sum$

10-Т3. Загогулина

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	В решении присутствует явное утверждение о наличии воздушной пробки в треть-ем колене. Если такого утверждения нет, но из решения видно, что решение построено с учётом наличия воздушной пробки, ставится полный балл.	2.0		
1.2	Записаны два независимых уравнения баланса давлений, связывающих давление в воздушной пробке с высотой столба жидкости H и с размером воздушной пробки x (или эквивалентные соотношения).	2 уравн по 1.0		
1.3	Получено выражение для связи размера пробки x , высоты жидкости в левом колене H и высоты вертикальных участковl. (Балл ставится, если в решении правильно найдена H, даже если явная формула отсутствует.)	1.0		
1.4	Записан закон Бойля-Мариотта или уравнение Менделеева-Клапейрона для воздуха в воздушной пробке	1.0		
1.5	Получено квадратное уравнение, позволяющее определить значение H или x (размер воздушной пробки или высоту водяного столба в третьем участке).	2.0		
1.6	Получено выражение для H.	1.0		
2.1	Записано выражение для общей длины водяного столба внутри трубки.	1.0		
2.2	Получен ответ для объёма воды в трубке.	2.0		

Шифр

$\sum$

10-Т4. Источник стабильности

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	В случае, когда диод закрыт, токи через все амперметры выражены через I_0	1.0		
1.2	Дан верный ответ на первый вопрос задачи. *Примечание*: Если балл за предыдущий пункт не поставлен, данный пункт не оценивается	1.0		
2.1	Найдена корректная связь между напряжением открытия диода, I_1 и сопротивлением амперметра	1.5		
2.2	Указано, что отсутствие тока через A_2 возможно только при открытом диоде	1.0		
2.3	В случае, когда диод открыт, токи через амперметры A_1, A_3, A_4 и диод выражены через I_0	1.0		
2.4	Найдено, что ток через амперметр A_2 не течёт при $I_0 = 8I_1/3$	1.5		
3.1	Построена часть графика зависимости показаний амперметра A_2 от силы тока через источник, соответствующая $I_0 < I_1$. *Примечание*: При построении графика допустимо откладывать на одной или обеих осях безразмерные величины: I_0/I_1 вместо I_0 и/или I_{A2}/I_1 вместо I_{A2}	1.0		
3.2	На графике выделена точка с координатами $(I_1; I_1/3)$ (или аналогичная точка в выбранной допустимой системе координат)	0.5		
3.3	Обосновано, что участок графика зависимости показаний амперметра A_2 от силы тока через источник, соответствующий $I_0 > I_1$, является прямолинейным и проходящим через точки $(I_1; I_1/3)$ и $(8I_1/3; 0)$. *Примечание*: Для обоснования достаточно вывести, что сила тока через A_2 выражается формулой $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$.	2.0		

3.4	Корректно построена часть графика зависимости показаний амперметра A_2 от силы тока через источник, соответствующая $I_0 > I_1$. *Примечание*: Данный пункт оценивается, только если поставлены баллы на предыдущий пункт.	1.0		
3.5	На графике выделена точка с координатами $(8I_1/3; 0)$ (или иная точка на прямой $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$ при $I_0 > I_1$).	0.5		

Шифр

$\sum$

10-Т5. В фокусе внимания

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
	Собирающая линза.			
1	Указано, что луч, прошедший через фокус F собирающей линзы, после преломления идёт параллельно ГОО.	1.0		
2	Восстановлено положение ГОО (через фокус F проведена прямая, параллельная лучу после преломления).	1.0		
3	Восстановлено положение плоскости линзы (через точку, где преломляется луч, проведен перпендикуляр к ГОО)	1.0		
	Все решения, использующие другие корректные построения и приводящие к правильному ответу, засчитываются наравне с авторским.			
	Рассеивающая линза.			
4	На отрезке, соединяющем фокус F и точку преломления луча, построена окружность.	2.0		
5	Показано, что луч, прошедший через фокус F рассеивающей линзы, после преломления идет так, как будто прошел через половинный фокус (т.е. делит отрезок OF пополам).	2.0		
6	Построено продолжение луча, преломленного в линзе до пересечения с окружностью.	1.0		
7	Построен вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча, находящийся в 2 раза дальше от фокуса F линзы.	2.0		
8	Восстановлено положение плоскости линзы в варианте с оптическим центров в точке O_1.	1.0		
9	Восстановлено положение плоскости линзы в варианте с оптическим центров в точке O_2.	1.0		
	Все решения, использующие другие корректные построения и приводящие к правильному ответу, засчитываются наравне с авторским.			

10 класс

Задача №1. Хитрая пушка

Пусть ускорение свободного падения равняется g, а выстрел производится под углом α к вертикали со скоростью $v_0(\alpha)$. Тогда имеем:

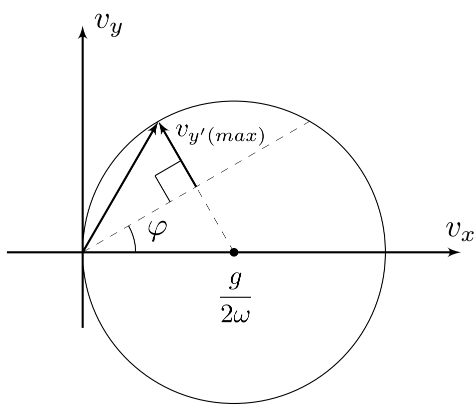
$$a_n = \omega v_0(\alpha) = g_n = g\sin\alpha \Rightarrow v_0(\alpha) = \frac{g\sin\alpha}{\omega}.$$

Далее можно решать задачу четырьмя способами.

Первое способ:

Введём координатную ось y', направленную перпендикулярно поверхности горки. Проекция ускорения снаряда на ось y' равна $g_{y'} = -g\cos\varphi$. Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = -\frac{2v_{0y'}}{g_{y'}} = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi}.$$



Максимально возможному времени полёта снаряда соответствует максимальное значение $v_{0y'}$. Введём систему координат Oxy с началом в месте расположения пушки, где ось x направлена вправо, а ось y – вертикально вверх. Тогда:

$$v_0 = \frac{g\sin\alpha}{\omega} = \frac{g}{\omega}\frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{gv_{0x}}{\omega},$$

откуда получаем:

$$\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$

Таким образом, геометрическое место точек конца вектора скорости $\vec{v}_0$ представляет собой окружность (см.рис). Из геометрии рисунка следует, что максимальное время полёта соответствует максимально возможному значению $v_{0y'}$, которое достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведённом к направлению поверхности горки из центра окружности. Получаем:

$$v_{0y'(max)} = \frac{g(1-\sin\varphi)}{2\omega},$$

откуда:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Второй способ:

Проекция начальной скорости снаряда на ось y' равна $v_{0y'} = v_0\cos(\alpha+\varphi)$. Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = \frac{2v_0(\alpha)\cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Воспользуемся преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму:

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi) = \sin(\alpha-(\alpha+\varphi)) + \sin(\alpha+(\alpha+\varphi)) = \sin(2\alpha+\varphi) - \sin\varphi.$$

Максимальное значение $\sin(2\alpha+\varphi) = 1$.

Аналогично преобразованию произведения тригонометрических функций в сумму, можно найти максимальное значение t, продифференцировав полученное выражение по α:

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{2}{\omega\cos\varphi}\frac{d(\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi))}{d\alpha} = 0$$

Отсюда:

$$\cos\alpha\cos(\alpha+\varphi) - \sin\alpha\sin(\alpha+\varphi) = \cos(2\alpha+\varphi) = 0.$$

Таким образом:

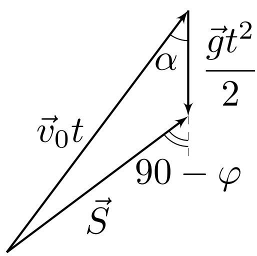
$$2\alpha+\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда максимальное время t_{max} составляет:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Третий способ:

Построим векторный треугольник перемещений для момента падения снаряда на горку. В указанный момент времени вектор перемещения образует угол φ с горизонтом, поэтому из теоремы синусов находим:



$$\frac{v_0 t}{\sin(90+\varphi)} = \frac{v_0 t}{\cos\varphi} = \frac{gt^2}{2\sin(90-\alpha-\varphi)} = \frac{gt^2}{2\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Отсюда:

$$t = \frac{2v_0\cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Исследование полученного выражения на максимум совпадает с проделанным в рамках первого способа решения. Таким образом:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15\ \text{с}.$$

Четвёртый способ:

Решим задачу классическим способом – используя зависимости координат x и y от времени t:

$$x = v_{0x}t = v_0\sin\alpha t \qquad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0\cos\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на горку $y/x = \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{gt}{2v_0\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\omega t}{2\sin^2\alpha}.$$

Введём переменную $z = \operatorname{ctg}\alpha$. Учитывая, что $1/\sin^2\alpha = 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = 1+z^2$, получим:

$$t = \frac{2}{\omega}\frac{z-\operatorname{tg}\varphi}{1+z^2} = \frac{2f(z)}{\omega}.$$

Время t принимает значение, когда максимальное значение принимает функция $f(z)$. Определим величину z_0, соответствующую максимальному значению $f(z)$:

$$\frac{df(z_0)}{dz} = \frac{1+z_0^2-2z_0(z_0-\operatorname{tg}\varphi)}{(1+z_0^2)^2} = 0 \Rightarrow z_0^2 - 2z_0\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$z_0 = \operatorname{tg}\varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1} \Rightarrow z_0 = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Таким образом:

$$f_{max} = f(z_0) = \frac{\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi\right)}{1+\left(\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2} = \frac{\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}.$$

Максимальное значение $f(z)$ может быть найдено из без использования производной. Действительно:

$$\frac{z - \operatorname{tg}\varphi}{1 + z^2} = f(z) \Rightarrow z^2 f(z) - z + f(z) + \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Исследуем дискриминант полученного уравнения:

$$D = 1 - 4f(z)(f(z) + \operatorname{tg}\varphi) \geq 0$$

Максимально возможное значение $f(z)$ соответствует равному нулю дискриминанту. Отсюда:

$$4f^2(z) + 4f(z)\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0 \Rightarrow f_{max} = -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} + \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{2} = \frac{1 - \sin\varphi}{2\cos\varphi}.$$

Окончательно:

$$t_{max} = \frac{\cos\varphi}{\omega(1 + \sin\varphi)} = \frac{1 - \sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Задача №10-Т2. Шайбами по барабану

Определим скорость барабана после соударения с шайбой 1. Поскольку трения между шайбами и барабаном нет – все их удары центральные, и движение всех тел остается поступательным, а проекции скоростей тел на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударения. Введём вдоль линии центров ось y, направленную от шайбы 1 к центру барабана. Пусть α – угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров. Запишем систему из закона сохранения импульса в проекции на ось y и закона сохранения энергии:

$$\begin{cases} mv_0\cos\alpha = Mv_{M1} + mv_{1y} \quad \text{ЗСИ} \\ \dfrac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + \dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} = \dfrac{mv_{1y}^2}{2} + \dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} + \dfrac{Mv_{M1}^2}{2} \quad \text{ЗСЭ} \end{cases}$$

Решая записанную систему уравнений, находим:

$$v_{M1} = v_0\cos\alpha + v_{1y} = 2v_0\cos\alpha - \frac{Mv_{M1}}{m} \Rightarrow v_{M1} = \frac{2mv_0\cos\alpha}{m + M}.$$

Получим условие, при котором будет столкновение между шайбой 2 и барабаном. Если ввести ось z, направленную от шайбы 2 к центру барабана, то условие столкновения будет заключаться в том, что проекция скорости барабана относительно шайбы 2 на ось z будет отрицательной, т.е при условии:

$$v_{z(\text{отн})} = -v_{M1}\cos 2\alpha - v_0\cos\alpha = -v_0\cos\alpha\left(1 + \frac{2m\cos 2\alpha}{m + M}\right) < 0.$$

Поскольку $\cos\alpha > 0$, данное условие можно записать следующим образом:

$$1 + \frac{2m\cos 2\alpha}{m+M} = 1 + \frac{2m(2\cos^2\alpha - 1)}{m+M} > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S}{2R} > \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{M}{m}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

или же при условии:

$$S > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Данное условие не выполнено при $S_1 = R/2$, поэтому столкновения между барабаном и шайбой 2 не будет, а значит $v_{M1} = u_1$:

$$u_1 = \frac{mv_0}{m+M}\frac{S_1}{R} = \frac{v_0}{3}.$$

Таким образом:

$$v_0 = 3u_1.$$

При $S_2 = R$ столкновение между барабаном и шайбой 2 будет, при этом $\alpha_2 = 60^\circ$. В системе отсчёта, движущейся со скоростью $\vec{v}_{M1}$, соударение сводится к рассмотренному ранее. В данной системе отсчёта проекция v_{2z} скорости шайбы 2 на ось z равняется:

$$v_{2z} = v_0\cos\alpha + v_{M1}\cos 2\alpha = \frac{v_0}{2} + \frac{2v_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{6}.$$

В указанной системе отсчёта скорость барабана сразу после соударения равна:

$$v_{M2} = \frac{2mv_{2y'}}{m+M} = \frac{2v_0}{9}.$$

Обратим внимание, что проекция скорости $\vec{v}_{M2}$ на ось y является положительной, а значит, повторного столкновения барабана с шайбой 1 не будет.

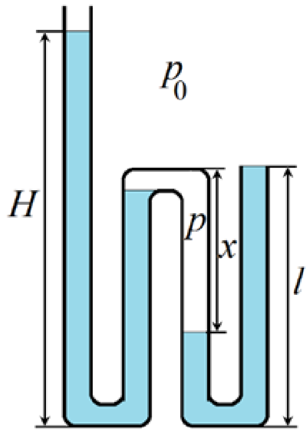
Для скорости u_2 имеем:

$$u_2 = \sqrt{v_{M1}^2 + v_{M2}^2 - 2v_{M1}v_{M2}\cos 2\alpha},$$

откуда:

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$$

Задача №10-Т3. Загогулина



После заполнения водой второго слева вертикального участка, вода начнет стекать в третье колено, заполнит перемычку внизу между третьим и четвёртым и «отсечёт» воздух в третьем колене от атмосферного. Образуется воздушная «пробка», давление p внутри которой по мере заполнения четвёртого колена будет возрастать. Запишем условия равновесия (равенства давлений) для первого и второго вертикальных участков трубки:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g l. \tag{1}$$

Для третьего и четвертого

$$p_0 + \rho g l = p + \rho g(l - x).$$

Вычитая эти уравнения, получим

$$H - l = x.$$

Поскольку воздух внутри трубки начал сжиматься от объёма, соответствующего одному вертикальному участку, то по закону Бойля-Мариотта:

$$p_0 l S = p x S.$$

Из последних двух уравнений находим:

$$p = \frac{p_0 l}{H - l}.$$

Подставляем это в уравнение (1):

$$p_0 + \rho g H = \frac{p_0 l}{H - l} + \rho g l.$$

Избавимся от знаменателя в правой части и перегруппируем:

$$\rho g (H - l)^2 + p_0 (H - l) - p_0 l = 0.$$

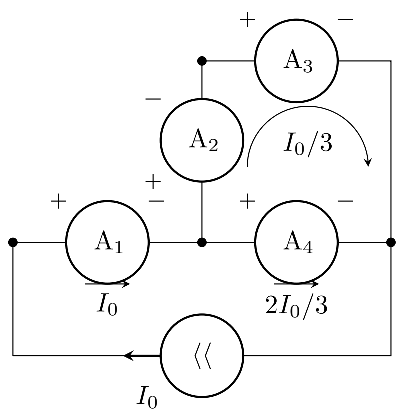
Обозначив для удобства $p_0/g = l_0$, решаем квадратное уравнение, оставляя только имеющий физический смысл положительный корень:

$$H = l + \frac{1}{2}\left(\sqrt{l_0^2 + 4 l_0 l} - l_0\right).$$

Объём налитой воды можно определить по суммарной длине трубы, занятой водой:

$$V = S(H + 3l - x) = 4Sl.$$

Задача №10-Т4. Источник стабильности



Рассмотрим малые значения силы тока I_0, при которых диод будет закрыт. В этом случае эквивалентная схема примет вид, изображённый на рисунке. Найдём токи, текущие через амперметры. Сила тока через A_1 равна I_0. Так как A_4 присоединён параллельно к паре амперметров A_2 и A_3, а его сопротивление вдвое меньше, чем суммарное сопротивление второго и третьего прибора, сила тока через A_4 будет равна $2I_0/3$. Сила тока, текущего через A_2 и A_3, следовательно, станет $I_0/3$. На графике, представленном в условии, участок идущий от начала координат описывается уравнением $I = 2I_0/3$, что соответствует результату, полученному для четвёртого амперметра.

Пусть r — сопротивление амперметра. Определим сначала напряжение открытия диода U_D. Так как характер зависимости тока через четвёртый амперметр от I_0 меняется при $I_0 = I_1$, это значение соответствует тому, что напряжение на диоде достигло U_D, но ток через диод ещё равен нулю (переход от горизонтального участка ВАХ прибора к вертикальному). Запишем условие равенства напряжения на диоде суммарному напряжению на первом и втором амперметре при $I_0 = I_1$

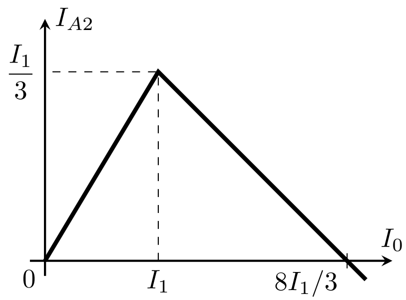
$$U_D = I_1 r + \frac{I_1}{3} \cdot r = \frac{4I_1 r}{3}.$$

Ситуация, когда ток через второй амперметр не течёт, во-первых, может произойти только при открытом диоде. Во-вторых, если ток через A_2 не течёт, то напряжения на A_3 и A_4 равны, что означает равенство токов через них:

$$I_{A3} = I_{A4} = \frac{I_0}{2}.$$

Соответственно, должны быть равны напряжения на первом амперметре и диоде. Поскольку в рассматриваемом случае $I_{A1} = I_{A4}$,

$$U_D = I_{A1} r \quad \Rightarrow \quad \frac{4I_1 r}{3} = \frac{I_0}{2} \cdot r \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{8I_1}{3}.$$



Пока диод закрыт, то есть при $I_0 < I_1$, сила тока через второй амперметр равна $I_{A2} = I_0/3$. Если $I_0 > I_1$, напряжение на диоде постоянно и равно $U_D = 4I_1 r/3$. Чтобы построить ту часть искомого графика, которая соответствует открытому диоду, можно рассуждать одним из двух способов.

Способ 1. ВАХ диода состоит из двух прямолинейных участков — горизонтального и вертикального. Поэтому, если находиться в пределах только одного участка (в данном случае, вертикального), диод можно считать линейным элементом. Остальные элементы цепи, представленной в условии, тоже имеют прямолинейные ВАХ, то есть также являются линейными. Следовательно, зависимость силы тока на втором амперметре от I_0 при $I_0 > I_1$ является линейной. Отсюда, учитывая, что график этой зависимости должен проходить через точки $(I_1; I_1/3)$ и $(8I_1/3; 0)$, получим график, изображённый на рисунке.

Способ 2 Расставим токи в цепи при $I_0 > I_1$, учитывая, что напряжение на диоде равно U_D. Пусть сила тока через второй амперметр равна I_{A2}. Тогда, исходя из равенства суммы напряжений на A_1 и A_2 напряжению на диоде, получим, что ток через первый амперметр

$$I_{A1} = \frac{U_D - I_{A2} r}{r} = \frac{U_D}{r} - I_{A2}.$$

Соответственно, токи через $А_3$ и $А_4$ будут равны

$$I_{A4} = I_{A1} - I_{A2} = \frac{U_D}{r} - 2I_{A2},$$

$$I_{A3} = I_0 - I_{A4} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 2I_{A2}.$$

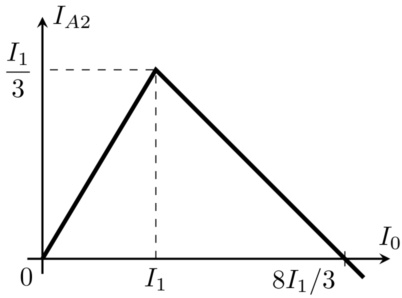
Так как сумма напряжений на $А_2$ и $А_3$ должна быть равна напряжению на $А_4$,

$$I_{A4}r = I_{A2}r + I_{A3}r \quad \Rightarrow \quad \frac{U_D}{r} - 2I_{A2} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 3I_{A2}.$$

Отсюда, используя равенство $U_D = 4I_1 r/3$, найдём, что

$$I_{A2} = \frac{2U_D}{5r} - \frac{I_0}{5} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}.$$

Далее строим графики зависимостей $I_{A2} = I_0/3$ при $I_0 < I_1$ и $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$ при $I_0 > I_1$ и получаем тот же рисунок, что и в Способе 1.

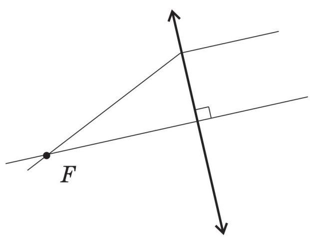


Задача №10-Т5. В фокусе внимания

Возможны два случая – линза собирающая и линза рассеивающая. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

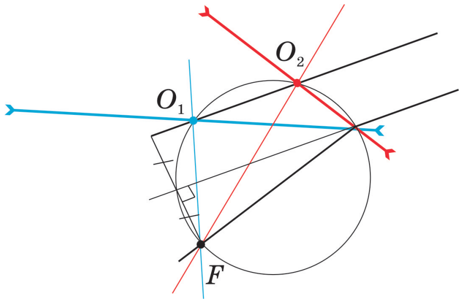
Собирающая линза.

Луч, прошедший через фокус собирающей линзы, после преломления в ней идёт параллельно главной оптической оси. Таким образом, из рисунка нам известно направление главной оптической оси (далее – ГОО) и одна из её точек (F). По этим данным восстанавливаем положение ГОО. Для этого проводим через F прямую, параллельную лучу после преломления. Плоскость линзы перпендикулярна ГОО и нам



известна одна из её точек - точка, где преломляется луч. Положение плоскости линзы восстанавливаем проведением перпендикуляра к ГОО из точки преломления луча.

Рассеивающая линза.

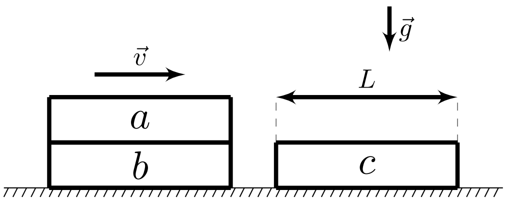


Фокус линзы F, её оптический центр O и точка преломления луча образуют прямоугольный треугольник. Построим на отрезке (как на диаметре), соединяющем фокус и точку преломления луча, окружность. Оптический центр должен лежать на этой окружности. Из формулы тонкой линзы (или используя тот факт, что параллельный пучок лучей после преломления на рассеивающей линзе идёт так, что продолжения пересекаются в одной точке фокальной плоскости) можно показать, что луч, прошедший через фокус рассеивающей линзы, после преломления идёт так, как будто прошёл через половинный фокус. Продлим луч, который преломился в линзе – он должен делить пополам отрезок OF. Построим вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча и находящийся в два раза дальше от точки F. Он пройдет через оптический центр линзы, не отклоняясь от своего первоначального направления. Таким образом, оптический центр линзы может находится в точках пересечения вспомогательного луча с окружностью. В нашем случае таких пересечений два (точки O_1 и O_2). Значит, возможны два варианта расположения рассеивающей линзы. В каждом варианте плоскость линзы проходит через точку преломления исходного луча и соответствующий оптический центр.

Отметим, что в случае рассеивающей линзы для двух полученных решений известный нам луч идет под разными углами к ГОО линзы, которые по построению связаны между собой. Если обозначить за $_1$ угол между лучом и FO_1 и за $_2$ — угол между лучом и FO_2, то можно показать, что $\mathrm{tg}\,_1 \cdot \mathrm{tg}\,_2 = 1/2$. Следовательно, только один из этих лучей может являться параксиальным — ведь если один из этих углов мал ($\mathrm{tg}\,1$), то другой должен иметь достаточно большое значение тангенса. Может быть и так, что оба угла не являются малыми. Поэтому только свойство линзы, указанное в «Примечании» условия, позволяет нам считать, что оба решения корректны.

11 класс
Теоретический тур

Задача №1. Вспоминая 90-е



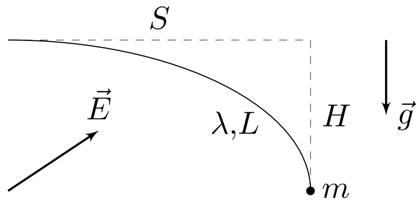
Вспоминая 1997 год, теоретик Баг продолжил исследования следующей ситуации: Доска a лежит на такой же доске b. Они, как единое целое, движутся с некоторой скоростью по гладкой горизонтальной поверхности и сталкиваются с такой же доской c, верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины. Трения между досками a и b нет, а трения между досками a и c есть. При ударе доски b и c прочно сцепляются. Длина досок равна L. Доска a перестала перемещаться относительно досок b и c в момент, когда она целиком расположилась на доске c. Найдите перемещение Δx доски a от момента соударения до момента прекращения относительного движения досок.

Задача №2. Нагревание насосом

Сосуд с теплоизолирующими стенками заполнен атмосферным воздухом при температуре T_0 и давлении p_0. Через малый клапан в стенке сосуда с помощью насоса, соединённого с клапаном, в сосуд начинают закачивать воздух. Малая порция воздуха из атмосферы поступает в насос, сжимается, после чего в результате теплообмена с окружающей средой охлаждается до температуры T_0, при этом после охлаждения давление воздуха в насосе всегда незначительно выше, чем в сосуде. Затем открывается клапан, и порция воздуха из насоса поступает в сосуд при практически постоянных давлении и температуре, сразу после чего клапан закрывается. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом. Теплопотерями за время, в течение которого клапан открыт, можно пренебречь. Считайте, что в процессе закачивания давление воздуха в насосе всегда больше, чем давление воздуха в сосуде, а газ, находящийся в сосуде, из него никогда не вытекает. В результате многократного повторения описанного процесса давление в сосуде повышается до p_1.

1. Во сколько раз изменилось количество вещества газа в сосуде?
2. Определите температуру T_1 в сосуде.

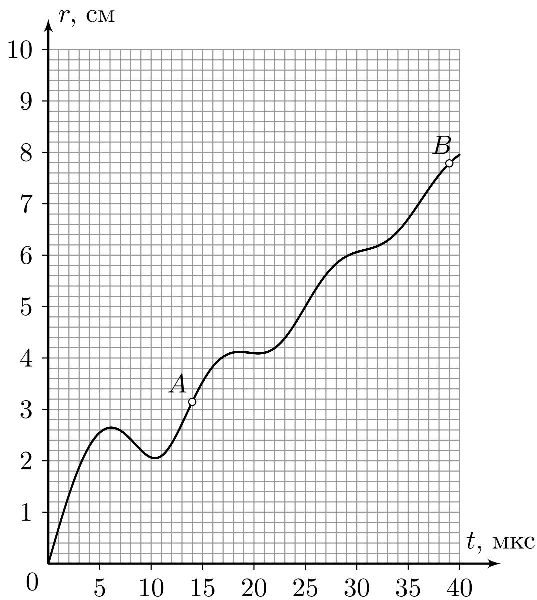
Задача №3. Равновесие в полях



Нерастяжимая невесомая нить длиной L заряжена равномерно по длине положительным зарядом с линейной плотностью λ. Один конец нити закреплён, а к другому прикреплён маленький груз массой m. Систему поместили в однородное электростатическое поле. В положении равновесия система расположилась таким образом, что касательные к нити в точке крепления и в месте расположения груза оказались горизонтальной и вертикальной соответственно. Груз расположился на расстоянии H ниже и на расстоянии S правее точки крепления (см. рис). Собственным электростатическим полем зарядов нити можно пренебречь. Ускорение свободного падения равняется g. Определите величину напряжённости E электростатического поля.

Задача №4. Полный улёт

В однородном магнитном поле в отсутствие силы тяжести движется заряженная частица. На рисунке представлен график зависимости модуля перемещения этой частицы r относительно точки, в которой находилась эта частица в момент времени $t = 0$, от времени её дальнейшего движения t.



1. Определите модуль скорости v, с которой движется частица.

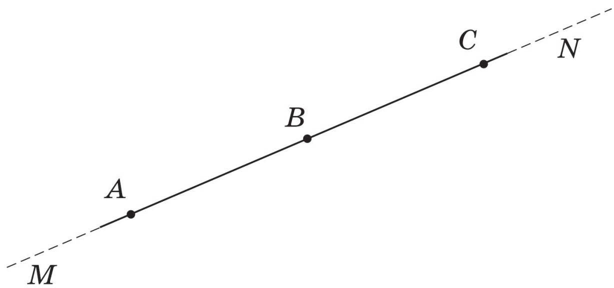
2. Определите угол α между вектором скорости частицы в момент $t = 0$ и вектором индукции магнитного поля.

3. Определите индукцию магнитного поля, если заряд частицы равен $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а её масса $m = 1{,}0 \cdot 10^{-26}$ кг.

4. Найдите расстояние между двумя положениями частицы, которые соответствуют точкам A и B на графике.

Задача №5. Троеточие

При очередном разборе архива Снеллиуса на глаза одному из специалистов попался небольшой рисунок с тремя точками A, B и C, лежащими на одной прямой MN. Из комментариев к рисунку следовало, что прямая MN проходила через оптический центр тонкой линзы под небольшим углом к главной оптической оси, а точки A, B и C обладали любопытным свойством: при помещении точечного источника света в любую из них изображение оказывалось в одной из двух других точек. Также было указано, что расстояния между точками A и B и между точками B и C, в которые помещали источник, были одинаковы и равнялись l, а модуль фокусного расстояния линзы был равен F.



1. Определите, о собирающей или рассеивающей линзе шла речь.

2. С какой стороны (слева или справа) от точки B располагался оптический центр линзы?

3. На каком расстоянии от точки B располагался оптический центр линзы?

4. Под каким углом к прямой MN наклонена главная оптическая ось линзы?

11 класс

Задача №11-Т1. Вспоминая 90-е

Пусть v_0 - скорость досок a и b до соударения с доской c, а m - масса каждой из досок. Поскольку трения между досками a и b нет, а доски b и c при ударе скрепляются - сразу после удара скорость доски a равна v_0, а скорость досок b и c равна $v_0/2$ из закона сохранения импульса.

Введём ось x по направлению скорости v_0. Поскольку горизонтальная поверхность гладкая - центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной $v_{\text{цм}} = 2v_0/3$. В момент удара центр масс системы опережает центр доски a на величину $l/3$, а к моменту, когда доска a целиком оказалась на доске c, центр масс системы отстаёт от центра доски на ту же величину $l/3$. Тогда для перемещения доски a получим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2l}{3} = \frac{2(v_0\tau + l)}{3}$$

где τ - время движения доски a относительно досок b и c. Далее объединим доски b и c в одно тело массой $2m$ и будем характеризовать его индексом 2. Доску a будем характеризовать индексом 1. Пусть $\vec{F}$ - сила трения, действующая на первое тело со стороны второго, а x - их относительное перемещение после удара. Отметим, что трение происходит только в области перекрытия досок a и c. Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции шероховатой части поверхности опоры, и поэтому $F_x = -\mu mgx/l$. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} \qquad 2m\vec{a}_2 = -\vec{F}$$

откуда:

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{отн}} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{2\vec{F}}{3m}$$

Тогда получим уравнение движения для переменной x:

$$\ddot{x} = -\frac{2\mu gx}{3L}$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{2\mu g/3L}$. Его общее решение:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Определим A и φ_0 из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = A\sin\varphi_0 = 0 \\ \dot{x}(0) = \dfrac{v_0}{2} = \omega A\cos\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ A = \dfrac{v_0}{2\omega} \end{cases}$$

Величина A имеет смысл амплитуды колебаний, которая также равна L, поскольку относительное движение досок прекращается, когда доска a целиком оказывается на доске c. Таким образом, имеем связь:

$$\frac{v_0}{2\omega} = L$$

Время движения τ является четвертью периода гармонических колебаний с циклической частотой ω_0, откуда:

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Тогда для перемещения центра масс имеем:

$$\Delta x_{\text{цм}} = \frac{2v_0\tau}{3} = \frac{2\pi L}{3}$$

и окончательно находим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi+1)L}{3}$$

Задача №11-Т2. Нагревание насосом

Пусть V – объём сосуда, ν_0 – начальное количества вещества в сосуде, а $\Delta\nu$ – количество вещества, переместившееся в сосуд из атмосферы. Запишем уравнения состояния газа в сосуде до и после закачивания:

$$p_0V = \nu_0RT_0 \qquad p_1V = (\nu_0+\Delta\nu)RT_1.$$

Пусть давление воздуха внутри насоса равняется $p_{\text{в}}$, а $dV_{\text{в}}$ – объём, занимаемый порцией воздуха в количестве вещества $d\nu$ внутри насоса. При закачивании указанной порции воздуха в сосуд насос совершает механическую работу $\delta A_{\text{н}}$, равную:

$$\delta A_{\text{н}} = p_{\text{в}}dV_{\text{в}}.$$

Но из уравнения Менделеева–Клапейрона $p_{\text{в}}dV_{\text{в}} = RT_0d\nu$, поэтому:

$$\delta A_{\text{н}} = RT_0d\nu.$$

Таким образом, полная механическая работа насоса $A_{\text{н}}$ составляет:

$$A_{\text{н}} = \Delta\nu RT_0.$$

Запишем первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначального находившегося в сосуде газа и закаченного в него насосом:

$$A_{\text{н}} + U_0 + U_1 = U_{\text{к}}.$$

Здесь $U_0 = \nu_0 C_V T_0$ – начальная внутренняя энергия воздуха, изначально находившегося в сосуде, $U_1 = \Delta\nu C_V T_0$ – сумма внутренних энергий закачиваемого воздуха на этапе закачивания в сосуд, а $U_к = (\nu_0 + \Delta\nu) C_V T_1$ – конечная внутренняя энергия рассматриваемой системы. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равна $C_V = 5R/2$. Отсюда:

$$\Delta\nu RT_0 + \frac{5\nu_0 RT_0}{2} + \frac{5\Delta\nu RT_0}{2} = \frac{5(\nu_0 + \Delta\nu)RT_1}{2}.$$

Таким образом:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{5\nu_0 + 7\Delta\nu}{5(\nu_0 + \Delta\nu)} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{(\nu_0 + \Delta\nu)} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{5}{7}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right).$$

Для отношения количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и до их начала имеем:

$$\frac{\nu_к}{\nu_0} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_0},$$

откуда:

$$\frac{\nu_к}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$

Для отношения температур T_1/T_0 имеем:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{\nu_к}.$$

Таким образом:

$$T_1 = \frac{T_0}{\dfrac{2p_0}{7p_1} + \dfrac{5}{7}}.$$

Задача №11-Т3. Равновесие в полях

Пусть $\vec{T}$ – сила, действующая на нить в точке её крепления, равная по модулю силе натяжения нити в данной точке. Тогда, поскольку система расположена в равновесии:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0.$$

Введём систему координат xy, где ось x направлена вправо, а ось y – вертикально вверх. Тогда из условия равновесия:

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L} \qquad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$

Свяжем силы натяжения нити $T_0 = mg$ в точке крепления груза и T в точке крепления нити. Приведём два способа получения данной связи.

Первый способ:

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Мысленно поместим нить в гладкую трубку, повторяющую форму нити. Это не изменит силу натяжения, потому что нить с трубкой не взаимодействует. Сдвинем нить вдоль трубки на величину dl в направлении от точки крепления груза к точке крепления нити. Тогда изменение формы нити эквивалентно перемещению участка нити длиной dl из точки крепления груза в точку крепления нити, поскольку форма остальной части нити не изменится. Поскольку сила натяжения невесомой нити направлена вдоль нити, работа сил, приложенных к концам нити, на указанном виртуальном перемещении равна:

$$\delta A = Tdl - T_0 dl = Tdl - mgdl.$$

Совершаемая силами натяжения работа равна изменению потенциальной энергии нити в электростатическом поле:

$$\delta A = dW_p.$$

Поскольку перемещение нити эквивалентно перемещению её участка длиной dl из точки крепления груза в точку крепления нити – изменение потенциальной энергии нити в электростатическом поле равно изменению потенциальной энергии соответствующего участка нити:

$$dW_p = \lambda dl(\varphi - \varphi_0) = \lambda dl \Delta\varphi,$$

где φ и φ_0 – потенциалы электростатического поля в точках крепления нити и груза соответственно. Для изменения потенциала $\Delta\varphi$ имеем:

$$\Delta\varphi = -E_x(x - x_0) - E_y(y - y_0).$$

Поскольку $x - x_0 = -S$, а $y - y_0 = H$, для изменения потенциала $\Delta\varphi$ находим:

$$\Delta\varphi = E_x S - E_y H.$$

Таким образом:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

Второй способ:

Рассмотрим бесконечно малый элемент нити длиной dl. Условие его равновесия записывается следующим образом:

$$\left(\vec{T} + d\vec{T}\right) - \vec{T} + \vec{E}\lambda dl = 0.$$

Проецируя на направление касательной к нити, получим:

$$dT + \lambda E_{\parallel} dl = 0.$$

Пусть касательная к нити образует угол φ с вертикалью. Тогда для $E_{\parallel}$ имеем:

$$E_{\parallel} = E\cos\varphi - E\sin\varphi,$$

откуда:

$$dT + E_y\lambda dl\cos\varphi - E_x\lambda dl\sin\varphi = 0.$$

Но при этом $dl\cos\varphi = dy$, а $dl\sin\varphi = -dx$, откуда:

$$dT + E_y\lambda dy + E_x\lambda dx = 0.$$

Суммируя, получим:

$$T - T_0 = T - mg = -E_y\lambda(y - y_0) - E_x\lambda(x - x_0).$$

Поскольку $y - y_0 = H$, а $x - x_0 = -S$, получим:

$$T - mg = \lambda(E_xS - E_yH).$$

Но поскольку $T = \lambda L E_x$:

$$\lambda L E_x - mg = \lambda(SE_x - HE_y) = \lambda SE_x - \lambda H \cdot \frac{mg}{\lambda L} \Rightarrow E_x = \frac{mg}{\lambda L}\frac{L - H}{L - S}.$$

Для напряжённости электростатического поля имеем:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

откуда:

$$E = \frac{mg}{\lambda L}\sqrt{1 + \left(\frac{L - H}{L - S}\right)^2}.$$

Задача №11-Т4. Полный улёт

Постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей, и поэтому, если пренебречь излучением, модуль скорости частицы не изменяется. Поэтому величина скорости частицы равна величине скорости при $t = 0$.

Отметим, что при конечных ускорениях всегда существует такой "малый"интервал времени после начала движения, на котором скорость удаления частицы от начального положения примерно равна начальной скорости, то есть можно считать, что $r \approx vt$. Поэтому для нахождения скорости частицы проведём касательную к графику функции в начале координат (верхняя прямая на графике). Величина скорости при этом численно равна тангенсу угла наклона этой прямой:

$$v = \frac{9{,}8 \text{ см}}{14 \text{ мкс}} \approx 7 \text{ км/с}.$$

Направим ось z вдоль вектора индукции магнитного поля, выбирая для простоты начало координат так, чтобы $z = 0$ при $t = 0$. Обозначим $v_{||}$ проекцию вектора скорости частицы на ось z, а $v_\perp$ — величину перпендикулярной этой оси составляющей. Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не имеет составляющей вдоль оси z,

$$z(t) = v_{||}t.$$

В сечении, перпендикулярном оси z, движение частицы происходит по окружности с постоянной скоростью $v_\perp$. Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{mv_\perp}{qB},$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, а время одного оборота

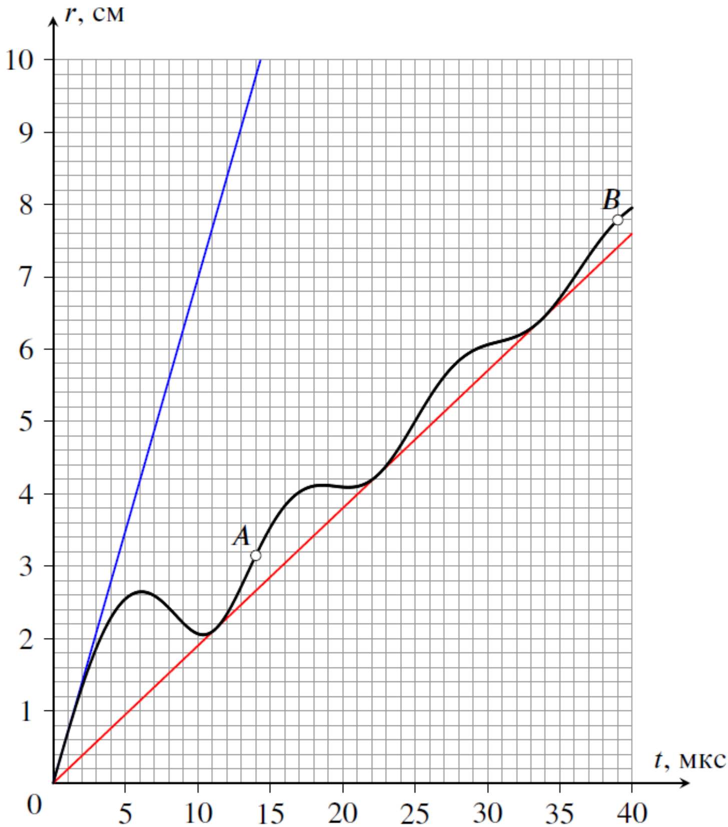
$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой винтовую линию с шагом $h = v_{||}T$ и радиусом $R = v_\perp T/(2\pi)$. Выбирая оставшиеся оси координат максимально удобным способом, можно записать, что

$$x(t) = R\cos(2\pi t/T), \qquad y(t) = R\sin(2\pi t/T),$$

откуда, учитывая, что в момент $t = 0$ частица находилась в точке с координатами $x = R$, $y = z = 0$, получим формулу зависимости модуля её перемещения от времени:

$$r(t) = \sqrt{(x(t) - R)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \sqrt{v_{||}^2 t^2 + 4R^2\sin^2(\pi t/T)}.$$



Возьмём теперь выражение для $r(t)$ и поделим его на t:

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{v_{||}^2 + 4R^2 \cdot \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{t}\right)^2}.$$

Второе слагаемое в подкоренном выражении при любом t не может быть меньше нуля, следовательно $r(t)/t \geqslant v_{||}$. Это значит, что прямая, идущая в координатах r-t из начала, имеющая общие точки с приведённым в условии графиком и обладающая наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = |v_{||}|t$. Соответственно, для того чтобы определить $v_{||}$, проведём касательную из начала координат к нижней части графика (нижняя прямая на рисунке). Точки касания соответствуют ситуации, когда частица находится на прямой, проходящей через начальную точку и параллельной линиям магнитного поля. Тангенс наклона такой прямой численно равен $|v_{||}|$:

$$|v_{||}| = \frac{7{,}6\ \text{см}}{40\ \text{мкс}} = 1{,}9\ \text{км/с}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos\alpha = \frac{v_{||}}{v} = \pm\frac{1{,}9}{7} \approx \pm 0{,}271 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 74^\circ \quad \text{или} \quad \alpha \approx 106^\circ.$$

Точки касания нижней прямой располагаются через равные промежутки времени, равные времени T прохода частицей одного витка винтовой линии. Для увеличения точности возьмем крайнюю (третью) точку касания и определим значение T:

$$T = 34\ \text{мкс}/3 \approx 11{,}3\ \text{мкс}.$$

Отсюда получим, что

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 10^{-26}\ \text{кг}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\cdot 11{,}3\cdot 10^{-6}\ \text{с}} \approx 35\ \text{мТл}.$$

Между положениями A и B прошло время, равное

$$t_{AB} = 39\ \text{мкс} - 14\ \text{мкс} = 25\ \text{мкс}.$$

За это время частица сместилась вдоль линий магнитного поля на расстояние

$$\Delta z = |v_{||}|t_{AB} = 4{,}75\ \text{см}.$$

В проекции на перпендикулярную магнитному полю плоскость частица движется по окружности с радиусом

$$R = (v_\perp T)/2\pi = T/2\pi\cdot\sqrt{v^2 - v_{||}^2} \approx 1{,}21\ \text{см}.$$

Её смещение в этой плоскости равно

$$\Delta l = 2R\sin(\pi t_{AB}/T) \approx 1{,}50\ \text{см}.$$

Отсюда получим значение расстояния AB:

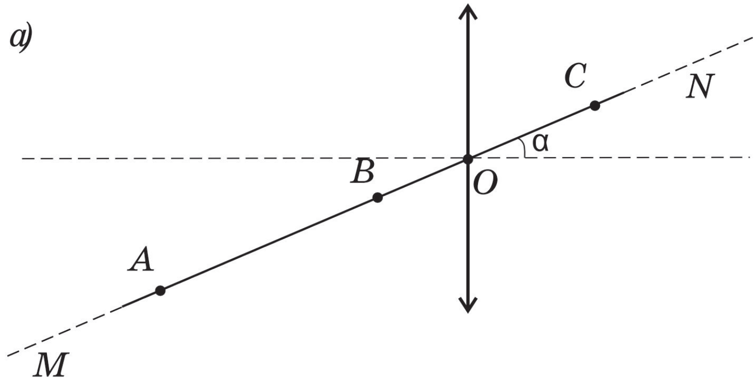
$$L_{AB} = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta z^2} \approx 5{,}0\ \text{см}.$$

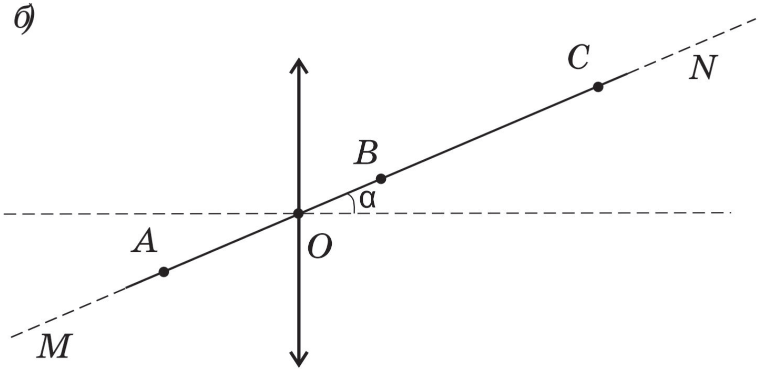
Задача №11-Т5. Троеточие

Если линза рассеивающая, то, независимо от положения источника, его изображение будет мнимым, расположенным между источником и оптическим центром линзы. После перемещения источника в точку, где ранее было расположено его изображение, новое изображение окажется снова между источником и оптическим центром линзы. Получится бесконечная цепочка изображений. Таким образом, три точки с указанным свойством в случае рассеивающей линзы существовать не могут.

Линза может быть только собирающей.

Мнимое изображение в собирающей линзе всегда расположено дальше от линзы, чем источник, поэтому не может быть, что точки A, B и C являются мнимыми изображениями друг друга. Но, в соответствии с принципом обратимости хода световых лучей, при помещении источника в точку действительного изображения, его новое изображение совпадает с предыдущим положением источника. Поэтому описанным в условии свойством три точки могут обладать только в том случае, если две из них являются действительными изображениями друг друга, а при помещении источника в третью он дает мнимое изображение в одной из точек этой пары. Пусть, например, собирающая линза расположена так, что точка A находится за её фокальной плоскостью. Тогда изображение A будет действительным и будет расположено по другую сторону от плоскости линзы. При перемещении источника в точку этого изображения, новое изображение вернется в точку A. Оставшееся, третье положение источника, должно давать мнимое изображение в одной из первых двух точек. Значит, оно должно располагаться между этой точкой (своим изображением) и оптическим центром линзы O ближе фокальной плоскости линзы. В этом случае линза могла быть расположена двумя способами (см. рисунок): а) оптический центр линзы находится между точками B и C, причём источник в точке B даёт мнимое изображение в точке A; б) оптический центр линзы находится между точками A и B, причём источник в точке B даёт мнимое изображение в точке C.





Таким образом, оптический центр линзы мог располагаться как справа так и слева от точки B.

Если же источник сначала расположить между фокальной плоскостью и плоскостью линзы, то изображение будет получаться мнимым. При помещении источника в точку изображения новое изображение должно получиться действительным (по другую сторону плоскости линзы). И при перемещении источника в оставшуюся, третью точку, изображение окажется на месте, где источник располагался ранее. Этот вариант идентичен представленному ранее и отдельного рассмотрения не требует.

Рассмотрим только способ а) размещения линзы, так как способ б) аналогичен. Источник, расположенный в точке B на расстоянии меньшем фокусного, даёт мнимое изображение в точке A. При помещении источника в точку A возникает действительное изображение в точке C, при помещении источника в точку

C – действительное изображение в точке A. Обозначим расстояние между оптическим центром линзы и источником, угол между главной оптической осью линзы и прямой и фокусное расстояние линзы за за d, α и F соответственно. Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке B:

$$\frac{1}{d\cos\alpha} - \frac{1}{(l+d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке A:

$$\frac{1}{(l+d)\cos\alpha} + \frac{1}{(l-d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Решая систему, находим d и α.

Расстояние между оптическим центром линзы и точкой B равно $d = \frac{l}{3}$.

Решение системы уравнений дает: $\cos\alpha = \frac{9F}{4l}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{9F}{4l}$. Поскольку в условии сказано, что угол α является малым, то допустимо на любом этапе вычислений использовать приближённое равенство $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда приходим к формуле $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$. Отметим, что малость угла означает, что с точностью до поправок порядка α^2 параметры системы связаны соотношением $l \approx \frac{9}{4}F$.

Угол между главной оптической осью линзы и прямой MN равен $\alpha = \arccos\frac{9F}{4l}$ или $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$.

Шифр

$\sum$

11-Т1. Вспоминая 90-е

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Записано, что поскольку поверхность по которой скользят доски – гладкая, то скорость центра масс трёх досок остается постоянной $v_{\text{цм}} = \text{const}$	0.5		
2	Найдена скорость центра масс трёх досок $v_{\text{цм}} = 2v_0/3$, где v_0 – скорость движения досок a и b до удара	0.5		
3	Найдены начальное и конечное положения центра масс досок: на расстоянии $L/3$ сначала левее, а в конце правее точки сцепления досок	2 знач по 0.5		
4	Найдена начальная скорость доски a, относительно сцепившихся досок: $v_{\text{отн}} = v_0/2$	0.5		
5	Записано выражение для итогового перемещения доски a: $$\Delta x_b = 2L/3 + \Delta x_{\text{цм}} = 2(L + v_0\tau)/3,$$ где τ – время относительного движения досок, начиная от момента столкновения	1.0		
6	Записан второй закон Ньютона для доски a (1) и для сцепившихся досок (2): $$ma_1 = -F, 2ma_2 = F,$$ где F – сила трения между досками	2 уравн по 0.5		
7	Записано выражение для силы трения в зависимости от перекрытия досок: $$F = \mu N = \mu mgx/L,$$ где $x = x_1 - x_2$ – относительное смещение доски a и сцепившихся досок, начиная от момента столкновения	1.0		

8	Получено уравнение гармонических колебаний вида: $$\ddot{x} = -\frac{2\mu g x}{3L}$$	1.0		
9	Записано выражение для частоты колебаний $\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{3L}}$	1.0		
10	Получено решение уравнения в виде $x = A \sin \omega t$	1.0		
11	Записана связь между амплитудой колебаний и максимальной скоростью (начальной относительной скоростью) $v_0/2 = \omega A$	1.0		
12	Приведено или используется далее выражение для амплитуды колебаний $A = L$	0.5		
13	Из равенства $x(\tau) = A \sin \omega \tau = 0$ или рассуждений о частях периода колебаний найдено время движения до остановки: $$\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi A}{v_0}$$	1.0		
14	Записан верный ответ на вопрос задачи $$\Delta x = \frac{2(\pi + 1)L}{3}$$	1.0		

Шифр

$\sum$

11-T2. Нагревание насосом

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано уравнение состояния газа в сосуде до начала процессов с насосом: $$p_0V = \nu_0RT_0.$$	1.0		
1.2	Записано уравнение состояния газа в сосуде по окончании всех процессов с насосом: $$p_1V = (\nu_0 + \Delta\nu)RT_1.$$	1.0		
1.3	Для отношения начальной и конечной температур T_1/T_0 получено: $$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{\nu_0 + \Delta\nu}.$$	1.0		
1.4	Указано, что в рассматриваемых процессах насос совершает механическую работу.	1.0		
1.5	Указано, что работа $\delta A_{\text{н}}$, совершённая насосом в процессе закачивания в сосуд порции воздуха, равна произведению давления искомой порции воздуха $p_{\text{в}}$ на занимаемый ей объём $dV_{\text{в}}$: $$\delta A_{\text{н}} = p_{\text{в}}dV_{\text{в}}.$$	1.0		
1.6	Использовано уравнение Менделеева–Клапейрона и определена механическая работа $\delta A_{\text{н}}$, совершённая насосом в процессе закачивания в сосуд порции воздуха в количестве вещества $d\nu$: $$\delta A_{\text{н}} = RT_0d\nu.$$	1.0		

1.7	Определена полная механическая работа, совершённая насосом: $$A_{\text{н}} = \Delta\nu R T_0.$$	1.0		
1.8	Записано первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначального находившегося в сосуде газа и закаченного в него: $$A_{\text{н}} + U_0 + U_1 = U_{\text{к}}.$$	1.0		
1.9	Первое начало термодинамики приведено к виду, эквивалентному следующему: $$\Delta\nu R T_0 + \frac{5\nu_0 R T_0}{2} + \frac{5\Delta\nu R T_0}{2} = \frac{5(\nu_0 + \Delta\nu) R T_1}{2}.$$	2.0		
1.10	Определено отношение количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и до их начала: $$\frac{\nu_{\text{к}}}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$	1.0		
2.1	Определена температура воздуха в сосуде T_1 по окончании процессов с насосом: $$T_1 = \frac{T_0}{\dfrac{2p_0}{7p_1} + \dfrac{5}{7}}.$$	1.0		

Шифр

$\sum$

11-T3. Равновесие в полях

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Определена сила натяжения нити в точке крепления груза: $$T_0 = mg.$$	1.0		
1.2	Записано условие равновесия системы (или система уравнений, эквивалентная векторному уравнению): $$\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0,$$ где $\vec{T}$ – сила, действующая на нить в точке её крепления.	1.0		
1.3	Из условия равновесия системы получены выражения для проекций напряжённости электростатического поля на оси x и y (по 1.0 балла за каждую): $$E_y = \frac{mg}{\lambda L} \qquad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$	2 точки по 1.0		
1.4	**Метод 1.** Для связи сил натяжения нити T и T_0 предложено воспользоваться методом виртуальных перемещений.	0.5		
1.5	**Метод 1.** Определена работа сил, приложенных к концам нити, на виртуальном перемещении длиной dl: $$\delta A = (T - T_0)dl.$$	0.5		
1.6	**Метод 1.** Указано, что работа сил, приложенных к концам нити, равна изменению потенциальной энергии нити в электростатическом поле: $$\delta A = dW_p.$$	0.5		

1.7	**Метод 1.** Указано, что изменение потенциальной энергии нити в электростатическом поле равно изменению потенциальной энергии участка длиной dl, переместившегося из точки крепления груза в точку крепления нити,	1.0		
1.8	**Метод 1.** Записано выражение: $$dW_p = \lambda dl(\varphi - \varphi_0).$$	0.5		
1.9	**Метод 1.** Для изменения потенциала $\Delta\varphi$ записано выражение: $$\Delta\varphi = -E_x(x - x_0) - E_y(y - y_0).$$	1.0		
1.10	**Метод 1.** Определено изменение потенциала $\Delta\varphi$: $$\Delta\varphi = E_x S - E_y H.$$	1.0		
1.11	**Метод 1.** Получено уравнение, связывающее силу натяжения с напряжённостью электростатического поля: $$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$	1.0		
1.12°	**Метод 2.** Записано условие равновесия участка нити длиной dl: $$d\vec{T} + \lambda dl\vec{E} = 0.$$	0.5		
1.13°	**Метод 2.** Условие равновесия нити спроецировано на ось, направленную по касательной к нити: $$dT + \lambda E_{\parallel} dl = 0.$$	1.0		

1.14°	**Метод 2.** Для $E_\parallel$ получено: $$E_\parallel = E_y \cos\varphi - E_x \sin\varphi.$$	1.0		
1.15°	**Метод 2.** Получено следующее соотношение: $$dT + \lambda E_y dl \cos\varphi - \lambda E_x dl \sin\varphi = 0.$$	0.5		
1.16°	**Метод 2.** Указано, что $dl\cos\varphi = dy$ и $dl\sin\varphi = -dx$.	1.0		
1.17°	**Метод 2.** После суммирования получено следующее соотношение: $$T - T_0 = -\lambda E_x(x - x_0) - \lambda E_y(y - y_0).$$	1.0		
1.18°	**Метод 2.** Получено выражение, связывающее силу натяжения с напряжённостью электростатического поля: $$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$	1.0		
1.19	Определена проекция E_x напряжённости электростатического поля: $$E_x = \frac{mg}{\lambda L}\frac{L-H}{L-S}.$$	1.0		
1.20	Получен ответ для напряжённости E электростатического поля: $$E = \frac{mg}{\lambda L}\sqrt{1 + \left(\frac{L-H}{L-S}\right)^2}.$$	1.0		

Шифр

$\sum$	

11-Т4. Полный улёт

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано, что модуль скорости частицы не изменяется и поэтому можно искать величину начальной скорости	0.5		
1.2	Указано, что начальную скорость можно определить по наклону касательной к графику в начальной точке	0.8		
1.3	Получено значение скорости в интервале 6,8 - 7,2 км/с	0.3		
1.4	Попадание в интервал значений скорости 6,5 - 7,5 км/с	0.2		
1.5	Попадание в интервал значений скорости 6,0 - 8,0 км/с	0.2		
2.1	Указано (используется в решении), что частица движется вдоль поля с постоянной скоростью	0.2		
2.2	Указано (используется в решении), что в плоскости, перпендикулярной полю, частица движется по окружности	0.4		
2.3	Записана формула для периода (угловой скорости) вращения по этой окружности	0.4		
2.4	Получена правильная формула для зависимости $r(t)$, представленной на графике	1.0		
2.5	Указано, что касательная к графику, идущая из начала координат с наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = v_{\|\|}t$	0.5		
2.6	Обосновано, что касательная к графику, идущая из начала координат с наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = v_{\|\|}t$	1.5		
2.7	Найдено значение $v_{\|\|}$ в диапазоне 1,8 - 2,0 км/с	1.0		
2.8	Получено значение угла в одном из диапазонов 70° - 80° или 100° - 110°	1.0		
3.1	Указано, что точки нижней касательной к графику должны соответствовать моментам времени, кратным периоду вращения	0.5		
3.2	Найден период вращения в интервале 11,2 - 11,4 мкс	0.3		

3.3	Попадание в интервал 11,0 - 11,6 мкс	0.2		
3.4	Найдена величина индукции магнитного поля в интервале 34 - 36 мТл	0.5		
4.1	Найдено расстояние между проекциями точек A и B на направление магнитного поля в интервале 4,6 - 4,9 см	0.5		
4.2	Получена любая правильная формула для расчета расстояния между проекциями точек A и B на плоскость, перпендикулярную полю	1.0		
4.3	Найдено расстояние между проекциями точек A и B на плоскость, перпендикулярную полю, в интервале 1,3 - 1,5 см	0.4		
4.4	Найдено L_{AB} в интервале 4,8 - 5,2 см	0.3		
4.5	Попадание в интервал 4,5 - 5,5 см	0.3		

Шифр

$\sum$

11-Т5. Троеточие

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Доказано, что линза может быть только собирающей.	2.0		
2.1	Установлено какие изображения (мнимые или действительные) создаёт размещение источника для каждой из трёх точек – A,B,C.	2.0		
2.2	Доказано, что возможны два положения центра линзы на прямой MN – как слева так и справа от точки B.	2.0		
3.1	Верно записана формула тонкой линзы для размещения источника в точке A.	1.0		
3.2	Верно записана формула тонкой линзы для размещения источника в точке B.	1.0		
3.3	Определено расстояние между оптическим центром линзы и точкой B.	2.0		
4.1	Определён угол между главной оптической осью линзы и прямой MN.	2.0		

11 класс

Задача №11-T1. Вспоминая 90-е

Пусть v_0 - скорость досок a и b до соударения с доской c, а m - масса каждой из досок. Поскольку трения между досками a и b нет, а доски b и c при ударе скрепляются - сразу после удара скорость доски a равна v_0, а скорость досок b и c равна $v_0/2$ из закона сохранения импульса.

Введём ось x по направлению скорости v_0. Поскольку горизонтальная поверхность гладкая - центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной $v_{\text{цм}} = 2v_0/3$. В момент удара центр масс системы опережает центр доски a на величину $l/3$, а к моменту, когда доска a целиком оказалась на доске c, центр масс системы отстаёт от центра доски на ту же величину $l/3$. Тогда для перемещения доски a получим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2l}{3} = \frac{2(v_0\tau + l)}{3}$$

где τ - время движения доски a относительно досок b и c. Далее объединим доски b и c в одно тело массой $2m$ и будем характеризовать его индексом 2. Доску a будем характеризовать индексом 1. Пусть $\vec{F}$ - сила трения, действующая на первое тело со стороны второго, а x - их относительное перемещение после удара. Отметим, что трение происходит только в области перекрытия досок a и c. Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции шероховатой части поверхности опоры, и поэтому $F_x = -\mu mgx/l$. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} \qquad 2m\vec{a}_2 = -\vec{F}$$

откуда:

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{отн}} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{2\vec{F}}{3m}$$

Тогда получим уравнение движения для переменной x:

$$\ddot{x} = -\frac{2\mu gx}{3L}$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{2\mu g/3L}$. Его общее решение:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Определим A и φ_0 из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = A\sin\varphi_0 = 0 \\ \dot{x}(0) = \dfrac{v_0}{2} = \omega A\cos\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ A = \dfrac{v_0}{2\omega} \end{cases}$$

Величина A имеет смысл амплитуды колебаний, которая также равна L, поскольку относительное движение досок прекращается, когда доска a целиком оказывается на доске c. Таким образом, имеем связь:

$$\frac{v_0}{2\omega} = L$$

Время движения τ является четвертью периода гармонических колебаний с циклической частотой ω_0, откуда:

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Тогда для перемещения центра масс имеем:

$$\Delta x_{\text{цм}} = \frac{2v_0\tau}{3} = \frac{2\pi L}{3}$$

и окончательно находим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi + 1)L}{3}$$

Задача №11-Т2. Нагревание насосом

Пусть V – объём сосуда, ν_0 – начальное количества вещества в сосуде, а $\Delta\nu$ – количество вещества, переместившееся в сосуд из атмосферы. Запишем уравнения состояния газа в сосуде до и после закачивания:

$$p_0V = \nu_0RT_0 \qquad p_1V = (\nu_0 + \Delta\nu)RT_1.$$

Пусть давление воздуха внутри насоса равняется $p_\text{в}$, а $dV_\text{в}$ – объём, занимаемый порцией воздуха в количестве вещества $d\nu$ внутри насоса. При закачивании указанной порции воздуха в сосуд насос совершает механическую работу $\delta A_\text{н}$, равную:

$$\delta A_\text{н} = p_\text{в}dV_\text{в}.$$

Но из уравнения Менделеева–Клапейрона $p_\text{в}dV_\text{в} = RT_0d\nu$, поэтому:

$$\delta A_\text{н} = RT_0d\nu.$$

Таким образом, полная механическая работа насоса $A_\text{н}$ составляет:

$$A_\text{н} = \Delta\nu RT_0.$$

Запишем первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначального находившегося в сосуде газа и закаченного в него насосом:

$$A_\text{н} + U_0 + U_1 = U_\text{к}.$$

Здесь $U_0 = \nu_0 C_V T_0$ – начальная внутренняя энергия воздуха, изначально находившегося в сосуде, $U_1 = \Delta\nu C_V T_0$ – сумма внутренних энергий закачиваемого воздуха на этапе закачивания в сосуд, а $U_к = (\nu_0 + \Delta\nu) C_V T_1$ – конечная внутренняя энергия рассматриваемой системы. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равна $C_V = 5R/2$. Отсюда:

$$\Delta\nu R T_0 + \frac{5\nu_0 R T_0}{2} + \frac{5\Delta\nu R T_0}{2} = \frac{5(\nu_0 + \Delta\nu) R T_1}{2}.$$

Таким образом:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{5\nu_0 + 7\Delta\nu}{5(\nu_0 + \Delta\nu)} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{(\nu_0 + \Delta\nu)} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{5}{7}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right).$$

Для отношения количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и до их начала имеем:

$$\frac{\nu_к}{\nu_0} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_0},$$

откуда:

$$\frac{\nu_к}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$

Для отношения температур T_1/T_0 имеем:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{\nu_к}.$$

Таким образом:

$$T_1 = \frac{T_0}{\dfrac{2p_0}{7p_1} + \dfrac{5}{7}}.$$

Задача №11-Т3. Равновесие в полях

Пусть $\vec{T}$ – сила, действующая на нить в точке её крепления, равная по модулю силе натяжения нити в данной точке. Тогда, поскольку система расположена в равновесии:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0.$$

Введём систему координат xy, где ось x направлена вправо, а ось y – вертикально вверх. Тогда из условия равновесия:

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L} \qquad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$

Свяжем силы натяжения нити $T_0 = mg$ в точке крепления груза и T в точке крепления нити. Приведём два способа получения данной связи.

Первый способ:

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Мысленно поместим нить в гладкую трубку, повторяющую форму нити. Это не изменит силу натяжения, потому что нить с трубкой не взаимодействует. Сдвинем нить вдоль трубки на величину dl в направлении от точки крепления груза к точке крепления нити. Тогда изменение формы нити эквивалентно перемещению участка нити длиной dl из точки крепления груза в точку крепления нити, поскольку форма остальной части нити не изменится. Поскольку сила натяжения невесомой нити направлена вдоль нити, работа сил, приложенных к концам нити, на указанном виртуальном перемещении равна:

$$\delta A = Tdl - T_0 dl = Tdl - mgdl.$$

Совершаемая силами натяжения работа равна изменению потенциальной энергии нити в электростатическом поле:

$$\delta A = dW_p.$$

Поскольку перемещение нити эквивалентно перемещению её участка длиной dl из точки крепления груза в точку крепления нити – изменение потенциальной энергии нити в электростатическом поле равно изменению потенциальной энергии соответствующего участка нити:

$$dW_p = \lambda dl(\varphi - \varphi_0) = \lambda dl \Delta\varphi,$$

где φ и φ_0 – потенциалы электростатического поля в точках крепления нити и груза соответственно. Для изменения потенциала $\Delta\varphi$ имеем:

$$\Delta\varphi = -E_x(x - x_0) - E_y(y - y_0).$$

Поскольку $x - x_0 = -S$, а $y - y_0 = H$, для изменения потенциала $\Delta\varphi$ находим:

$$\Delta\varphi = E_x S - E_y H.$$

Таким образом:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

Второй способ:

Рассмотрим бесконечно малый элемент нити длиной dl. Условие его равновесия записывается следующим образом:

$$\left(\vec{T}+d\vec{T}\right)-\vec{T}+\vec{E}\lambda dl=0.$$

Проецируя на направление касательной к нити, получим:

$$dT+\lambda E_{\parallel}dl=0.$$

Пусть касательная к нити образует угол φ с вертикалью. Тогда для $E_{\parallel}$ имеем:

$$E_{\parallel}=E\cos\varphi-E\sin\varphi,$$

откуда:

$$dT+E_y\lambda dl\cos\varphi-E_x\lambda dl\sin\varphi=0.$$

Но при этом $dl\cos\varphi=dy$, а $dl\sin\varphi=-dx$, откуда:

$$dT+E_y\lambda dy+E_x\lambda dx=0.$$

Суммируя, получим:

$$T-T_0=T-mg=-E_y\lambda(y-y_0)-E_x\lambda(x-x_0).$$

Поскольку $y-y_0=H$, а $x-x_0=-S$, получим:

$$T-mg=\lambda(E_xS-E_yH).$$

Но поскольку $T=\lambda LE_x$:

$$\lambda LE_x-mg=\lambda(SE_x-HE_y)=\lambda SE_x-\lambda H\cdot\frac{mg}{\lambda L}\Rightarrow E_x=\frac{mg}{\lambda L}\frac{L-H}{L-S}.$$

Для напряжённости электростатического поля имеем:

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2},$$

откуда:

$$E=\frac{mg}{\lambda L}\sqrt{1+\left(\frac{L-H}{L-S}\right)^2}.$$

Задача №11-Т4. Полный улёт

Постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей, и поэтому, если пренебречь излучением, модуль скорости частицы не изменяется. Поэтому величина скорости частицы равна величине скорости при $t = 0$.

Отметим, что при конечных ускорениях всегда существует такой "малый"интервал времени после начала движения, на котором скорость удаления частицы от начального положения примерно равна начальной скорости, то есть можно считать, что $r \approx vt$. Поэтому для нахождения скорости частицы проведём касательную к графику функции в начале координат (верхняя прямая на графике). Величина скорости при этом численно равна тангенсу угла наклона этой прямой:

$$v = \frac{9{,}8\ \text{см}}{14\ \text{мкс}} \approx 7\ \text{км/с}.$$

Направим ось z вдоль вектора индукции магнитного поля, выбирая для простоты начало координат так, чтобы $z = 0$ при $t = 0$. Обозначим $v_{||}$ проекцию вектора скорости частицы на ось z, а $v_\perp$ — величину перпендикулярной этой оси составляющей. Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не имеет составляющей вдоль оси z,

$$z(t) = v_{||}t.$$

В сечении, перпендикулярном оси z, движение частицы происходит по окружности с постоянной скоростью $v_\perp$. Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{mv_\perp}{qB},$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, а время одного оборота

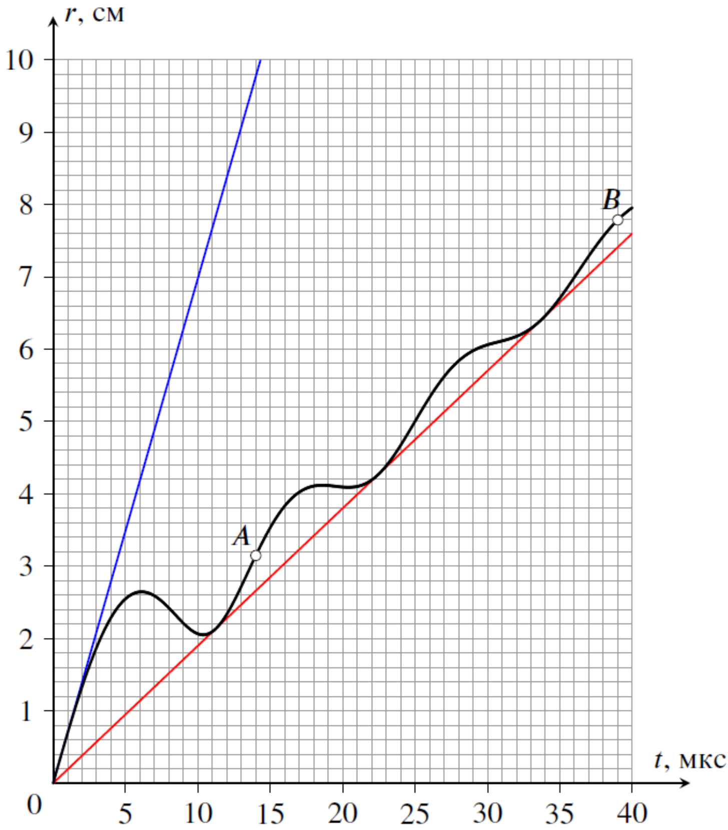
$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой винтовую линию с шагом $h = v_{||}T$ и радиусом $R = v_\perp T/(2\pi)$. Выбирая оставшиеся оси координат максимально удобным способом, можно записать, что

$$x(t) = R\cos(2\pi t/T), \qquad y(t) = R\sin(2\pi t/T),$$

откуда, учитывая, что в момент $t = 0$ частица находилась в точке с координатами $x = R$, $y = z = 0$, получим формулу зависимости модуля её перемещения от времени:

$$r(t) = \sqrt{(x(t) - R)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \sqrt{v_{||}^2 t^2 + 4R^2 \sin^2(\pi t/T)}.$$



Возьмём теперь выражение для $r(t)$ и поделим его на t:

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{v_{||}^2 + 4R^2 \cdot \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{t}\right)^2}.$$

Второе слагаемое в подкоренном выражении при любом t не может быть меньше нуля, следовательно $r(t)/t \geqslant v_{||}$. Это значит, что прямая, идущая в координатах r-t из начала, имеющая общие точки с приведённым в условии графиком и обладающая наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = |v_{||}|t$. Соответственно, для того чтобы определить $v_{||}$, проведём касательную из начала координат к нижней части графика (нижняя прямая на рисунке). Точки касания соответствуют ситуации, когда частица находится на прямой, проходящей через начальную точку и параллельной линиям магнитного поля. Тангенс наклона такой прямой численно равен $|v_{||}|$:

$$|v_{||}| = \frac{7{,}6 \text{ см}}{40 \text{ мкс}} = 1{,}9 \text{ км/с}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos\alpha = \frac{v_{||}}{v} = \pm\frac{1{,}9}{7} \approx \pm 0{,}271 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 74^\circ \quad \text{или} \quad \alpha \approx 106^\circ.$$

Точки касания нижней прямой располагаются через равные промежутки времени, равные времени T прохода частицей одного витка винтовой линии. Для увеличения точности возьмем крайнюю (третью) точку касания и определим значение T:

$$T = 34 \text{ мкс}/3 \approx 11{,}3 \text{ мкс}.$$

Отсюда получим, что

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 11{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ с}} \approx 35 \text{ мТл}.$$

Между положениями A и B прошло время, равное

$$t_{AB} = 39 \text{ мкс} - 14 \text{ мкс} = 25 \text{ мкс}.$$

За это время частица сместилась вдоль линий магнитного поля на расстояние

$$\Delta z = |v_{||}| t_{AB} = 4{,}75 \text{ см}.$$

В проекции на перпендикулярную магнитному полю плоскость частица движется по окружности с радиусом

$$R = (v_\perp T)/2\pi = T/2\pi \cdot \sqrt{v^2 - v_{||}^2} \approx 1{,}21 \text{ см}.$$

Её смещение в этой плоскости равно

$$\Delta l = 2R\sin(\pi t_{AB}/T) \approx 1{,}50 \text{ см}.$$

Отсюда получим значение расстояния AB:

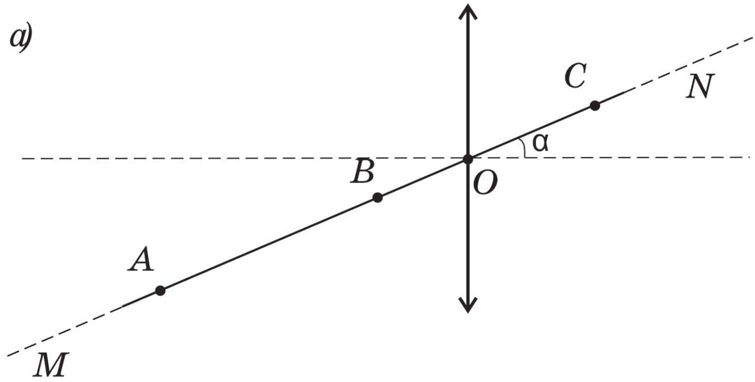
$$L_{AB} = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta z^2} \approx 5{,}0 \text{ см}.$$

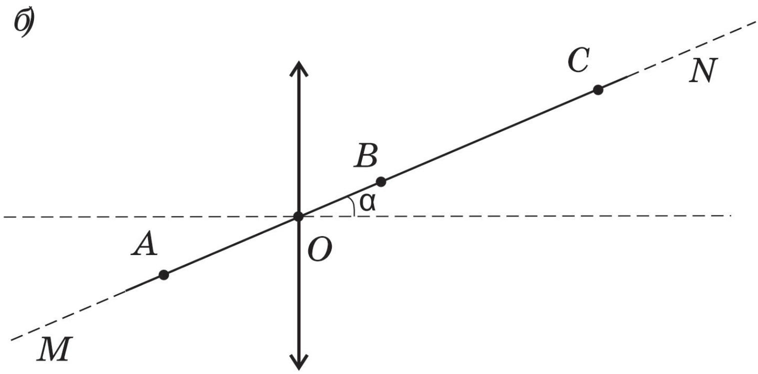
Задача №11-Т5. Троеточие

Если линза рассеивающая, то, независимо от положения источника, его изображение будет мнимым, расположенным между источником и оптическим центром линзы. После перемещения источника в точку, где ранее было расположено его изображение, новое изображение окажется снова между источником и оптическим центром линзы. Получится бесконечная цепочка изображений. Таким образом, три точки с указанным свойством в случае рассеивающей линзы существовать не могут.

Линза может быть только собирающей.

Мнимое изображение в собирающей линзе всегда расположено дальше от линзы, чем источник, поэтому не может быть, что точки A, B и C являются мнимыми изображениями друг друга. Но, в соответствии с принципом обратимости хода световых лучей, при помещении источника в точку действительного изображения, его новое изображение совпадает с предыдущим положением источника. Поэтому описанным в условии свойством три точки могут обладать только в том случае, если две из них являются действительными изображениями друг друга, а при помещении источника в третью он дает мнимое изображение в одной из точек этой пары. Пусть, например, собирающая линза расположена так, что точка A находится за её фокальной плоскостью. Тогда изображение A будет действительным и будет расположено по другую сторону от плоскости линзы. При перемещении источника в точку этого изображения, новое изображение вернется в точку A. Оставшееся, третье положение источника, должно давать мнимое изображение в одной из первых двух точек. Значит, оно должно располагаться между этой точкой (своим изображением) и оптическим центром линзы O ближе фокальной плоскости линзы. В этом случае линза могла быть расположена двумя способами (см. рисунок): а) оптический центр линзы находится между точками B и C, причём источник в точке B даёт мнимое изображение в точке A; б) оптический центр линзы находится между точками A и B, причём источник в точке B даёт мнимое изображение в точке C.





Таким образом, оптический центр линзы мог располагаться как справа так и слева от точки B.

Если же источник сначала расположить между фокальной плоскостью и плоскостью линзы, то изображение будет получаться мнимым. При помещении источника в точку изображения новое изображение должно получиться действительным (по другую сторону плоскости линзы). И при перемещении источника в оставшуюся, третью точку, изображение окажется на месте, где источник располагался ранее. Этот вариант идентичен представленному ранее и отдельного рассмотрения не требует.

Рассмотрим только способ а) размещения линзы, так как способ б) аналогичен. Источник, расположенный в точке B на расстоянии меньшем фокусного, даёт мнимое изображение в точке A. При помещении источника в точку A возникает действительное изображение в точке C, при помещении источника в точку

C – действительное изображение в точке A. Обозначим расстояние между оптическим центром линзы и источником, угол между главной оптической осью линзы и прямой и фокусное расстояние линзы за за d, α и F соответственно. Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке B:

$$\frac{1}{d\cos\alpha} - \frac{1}{(l+d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке A:

$$\frac{1}{(l+d)\cos\alpha} + \frac{1}{(l-d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Решая систему, находим d и α.

Расстояние между оптическим центром линзы и точкой B равно $d = \frac{l}{3}$.

Решение системы уравнений дает: $\cos\alpha = \frac{9F}{4l}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{9F}{4l}$. Поскольку в условии сказано, что угол α является малым, то допустимо на любом этапе вычислений использовать приближённое равенство $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда приходим к формуле $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$. Отметим, что малость угла означает, что с точностью до поправок порядка α^2 параметры системы связаны соотношением $l \approx \frac{9}{4}F$.

Угол между главной оптической осью линзы и прямой MN равен $\alpha = \arccos\frac{9F}{4l}$ или $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$.