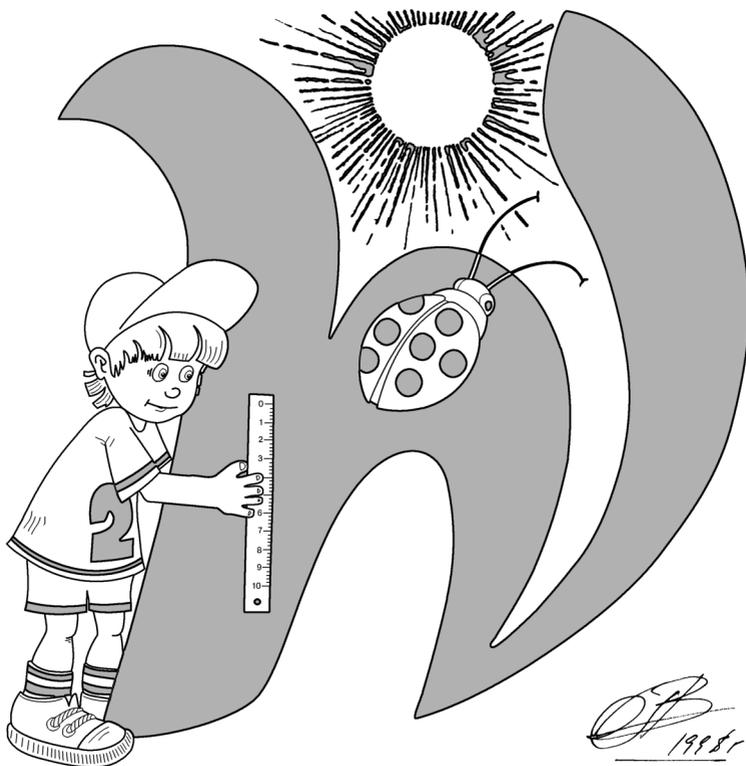


Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

LVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур



Москва, 2023 г.

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: physolymp@gmail.com

Авторы задач

Теоретический тур

7-9 класс

- **7-Т1.** Александр Евсеев
- **7-Т2.** Денис Рубцов
- **7-Т3.** Валерий Слободянин
- **7-Т4.** Александр Евсеев
- **8-Т1.** Ольга Инишева
- **8-Т2.** Андрей Сеитов
- **8-Т3.** Александр Евсеев
- **8-Т4.** Александр Евсеев
- **9-Т1.** Валерий Слободянин
- **9-Т2.** Сергей Кармазин
- **9-Т3.** Александр Евсеев
- **9-Т4.** Александр Евсеев
- **9-Т5.** Андрей Уймин

10-11 класс

- **10-Т1.** Алексей Заяц
- **10-Т2.** Алексей Заяц
- **10-Т3.** Сергей Муравьев, Максим Карманов, А. Соколов
- **10-Т4.** Андрей Уймин
- **10-Т5.** Юрий Черников
- **11-Т1.** Александр Аполонский
- **11-Т2.** Александр Аполонский
- **11-Т3.** Андрей Уймин
- **11-Т4.** Константин Соломатин
- **11-Т5.** Андрей Уймин

Как готовиться к региональному этапу?

В МФТИ запущен классный проект «Физтех-регионам» (<https://os.mipt.ru>), где в публичном бесплатном доступе лежат лекции и семинары по всем классам и по всем темам. Там же выложены подборки задач по темам. Уровень материалов позволяет хорошо подготовиться к муниципальному и региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по физике.

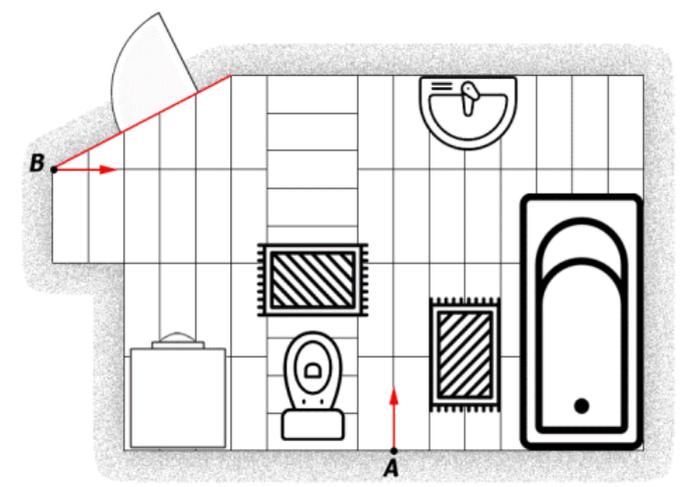
В этом году в рамках работы проекта сняты видеорешения (<https://os.mipt.ru/#/phys/theme/9V1MmCFakz>) теоретического тура регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике. Используйте эти материалы для самоподготовки к будущим олимпиадам.



7 класс

Задача №1. В ванной

Ванная в квартире экспериментатора Глюка имеет сложную форму (смотрите рисунок).



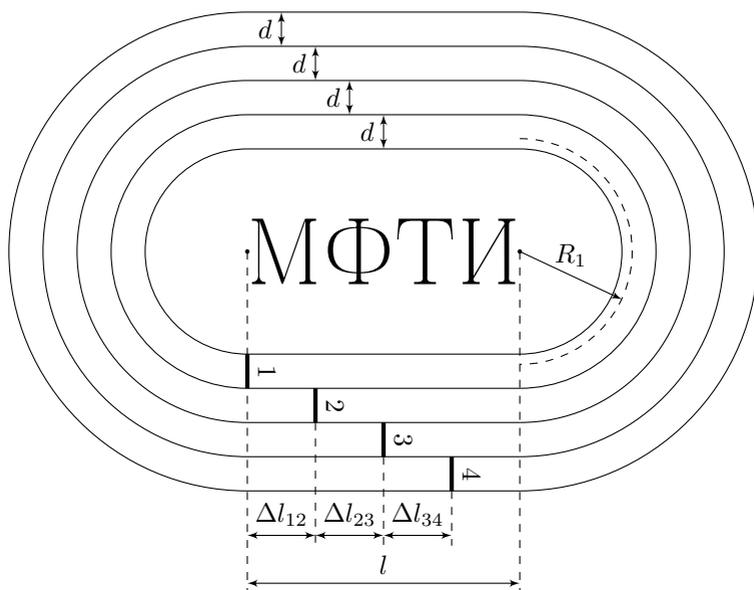
Пол ванной выложен керамической плиткой одного размера. Причём, при укладке плитки на пол, её пришлось резать только для того, чтобы уложить вдоль стены с дверным проёмом (верхний левый угол рисунка). Глюк проводит свои эксперименты везде. Ванная не является исключением. Однажды он запускал улиток из точек A и B в указанных на рисунке направлениях, пытаясь подобрать разность во времени старта так, чтобы улитки непременно встретились, не доползая до противоположной стены. В результате эксперимента Глюк выяснил, что улитку из B надо отправить в путь на $\Delta t = 200$ с раньше, чем улитку из A .

Найдите площадь ванной комнаты экспериментатора, если известно, что улитки всегда движутся прямолинейно с одинаковой скоростью $u = 12$ см/мин, плитки в ванной плотно прилегают краями друг к другу, а коврики одинаковые. Масштабом рисунка (в том числе измерениями линейкой) пользоваться нельзя. Можно пользоваться только относительным расположением плиток.

Задача №2. Стадион МФТИ

Беговые дорожки стадиона МФТИ — это 4 дорожки шириной $d = 1.22$ м каждая. Дорожки состоят из двух прямолинейных участков длины $l = 84.39$ м

13:13



и двух участков в виде полуокружностей радиуса R . Радиус траектории атлета или эффективный радиус на первой дорожке $R_1 = 36.80$ м.

1. Найдите эффективную длину одного круга первой дорожки L_1 .

2. Определите на каких расстояниях Δl_{12} , Δl_{23} , Δl_{34} должны располагаться линии стартов на различных дорожках на прямолинейных участках, чтобы длины дистанций в 3 круга совпадали при условии финиша на линии старта первой дорожки. Считайте, что атлеты будут бежать на одинаковых расстояниях от края дорожек.

3. Какие значения может иметь средняя скорость атлета, пробежавшего 6 кругов по первой дорожке, если он определял время своего забега по стадионным часам, на которых отображаются только часы и минуты? Стартовал атлет в 13:00, а финишировал в 13:13. Выразите максимальную и минимальную средние скорости и в км/ч, и в м/с.

Примечание: длина окружности радиуса R равна $2\pi R$, где $\pi = 3.1416$.

Задача №3. Шоколад и карамель

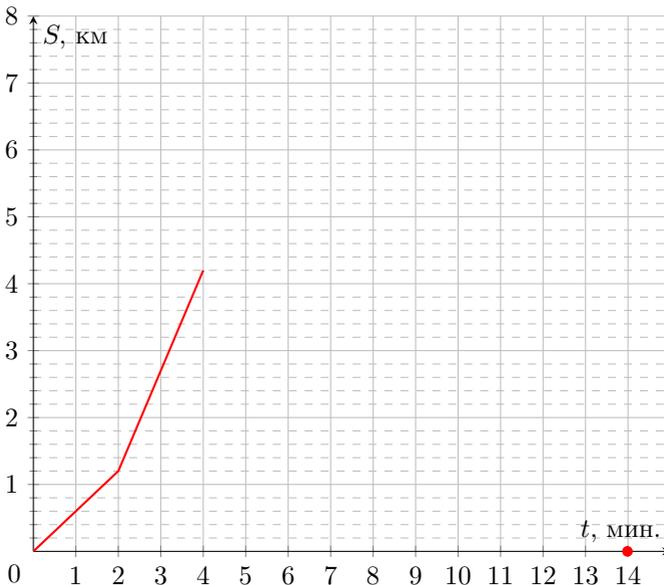
При производстве конфет в сосуд объёмом $V = 16.0$ л заливают горячий белый шоколад плотностью $\rho_1 = 1.20$ г/см³. Когда сосуд заполняется на 60%, в него

вместо шоколада сразу начинают заливать карамель плотностью $\rho_2 = 1.52 \text{ г/см}^3$ со скоростью $\mu = 0.60 \text{ л/мин}$. Автоматика настроена на определение средней плотности содержимого сосуда, и, когда средняя плотность превышает ρ_1 на 10%, подача карамели в сосуд прекращается. Изменением объёма жидкостей при их смешивании можно пренебречь.

Сколько минут происходила подача карамели?

Задача №4. Догонялки

Два автомобиля одновременно начинают движение из пункта A в пункт B по прямолинейной дороге. Известно, что первый автомобиль едет с постоянной скоростью v_1 не останавливаясь до пункта B . В пункте B он останавливается и ждёт прибытия второго автомобиля. Второй автомобиль движется с постоянной скоростью v_2 , меньшей чем v_1 . Через некоторое время он останавливается, и, когда первый автомобиль достигает пункта B , вновь продолжает движение с той же скоростью v_2 .



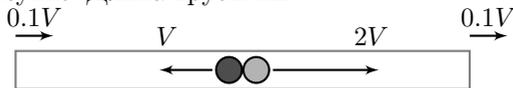
На рисунке приведен график зависимости расстояния между автомобилями от времени вплоть до момента $t_1 = 4 \text{ мин}$. В момент времени $t_2 = 14 \text{ мин}$ автомобили встретились.

1. Определите скорости автомобилей v_1 и v_2 .
2. В течение какого времени Δt второй автомобиль покоился?
3. Найдите расстояние L между пунктами A и B .

8 класс

Задача №1. По трубе

Два лёгких небольших упругих шарика движутся внутри закрытой с обоих концов гладкой массивной трубы, расположенной горизонтально. В тот момент времени, когда шарики находятся посередине трубы, их скорости относительно земли равны V и $2V$, а трубу начинают двигать с постоянной скоростью $0.1V$, как показано на рисунке. Длина трубы $2L$.

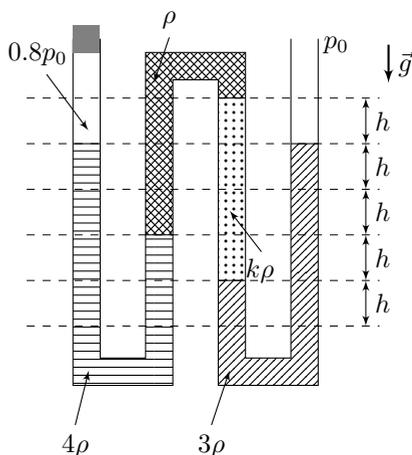


1. Через какой промежуток времени τ_1 левый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?
2. Через какой промежуток времени τ_2 правый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?
3. Через какой промежуток времени τ шарики в первый раз столкнутся друг с другом?
4. Найдите скорости u_1 левого и u_2 правого шариков относительно земли непосредственно перед их первым соударением.

Соударения шариков с торцевыми стенками трубы считайте абсолютно упругими. *Примечание:* в результате абсолютно упругого удара скорость шарика относительно стенки остаётся такой же по величине, как до удара, но направлена противоположно.

Задача №2. Изогнутая трубка

Изогнутая трубка постоянного сечения заполнена несмешивающимися жидкостями с разными плотностями, как показано на рисунке. В левом конце трубки, закрытом пробкой, заперт воздух под давлением $0.8p_0$, где p_0 — атмосферное давление, которое равно гидростатическому давлению столба жидкости плотностью ρ высотой $10h$. Правый конец трубки открыт в атмосферу, система находится в состоянии равновесия.



1. Определите коэффициент k у плотности жидкости (смотрите рисунок).
2. В каком направлении и на сколько сместится свободная поверхность жидкости в правом колене трубки в новом состоянии равновесия, если убрать пробку?

Задача №3. Туда-сюда

Экспериментатор Глюк провёл эксперимент. Десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20^\circ\text{C}$), Глюк поставили греться на электрической плитке. Через некоторое время в кастрюлю, не снимая её с плиты, он долил воду комнатной температуры неизвестного объёма. А, спустя ещё какое-то время, воду такого же объёма из кастрюли, также не снимая её с плиты, вылил. Затем он дважды измерил температуру воды в кастрюле — через $\tau_1 = 8$ минут и $\tau_2 = 9$ минут с момента начала нагрева, и получил значения $t_1 = 45^\circ\text{C}$ и $t_2 = 50^\circ\text{C}$. Всего плитка работала 10 минут.

1. Какую температуру t_k имела бы вода в кастрюле к концу эксперимента, если бы по ходу нагрева её масса не изменялась?

2. Определите наименьшее возможное значение массы m_{\min} воды, доливаемой Глюком в ходе эксперимента.

3. Найдите самый ранний от начала нагрева момент времени τ_{\min} , когда мог происходить забор воды из кастрюли.

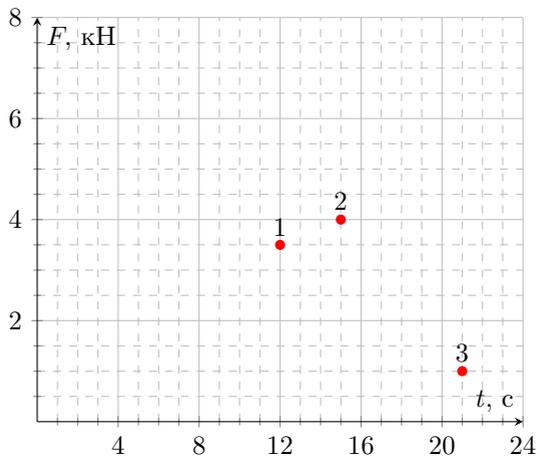
Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы. Считайте, что при изменении массы воды её температура изменяется мгновенно, а при добавлении воды она не выливается из кастрюли. Удельная теплоёмкость воды равна $4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Считайте, что вода добавляется и выливается мгновенно, и изменение температуры тоже можно считать мгновенным.

Задача №4. Ползущий рельс

На отдельно стоящих роликовых лёгких опорах, оси которых находятся на расстоянии $l = 9 \text{ м}$, лежит однородный рельс постоянного сечения. Ролики начинают вращаться, в результате чего рельс движется горизонтально с некоторой постоянной скоростью, как показано на рисунке (масштаб не выдержан).



Под опорами находятся динамометры. Зависимости показаний F каждого из динамометров от времени t для каждой из опор сняли и решили построить их графики. Однако лаборант, который должен был это сделать, случайно пролил на таблицы с данными кофе и смог восстановить только три точки (они показаны на рисунке).



Помогите лаборанту восстановить графики.

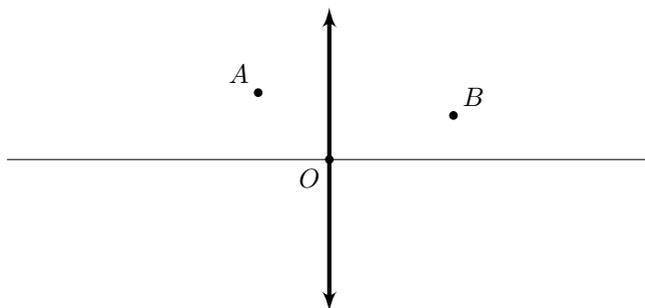
1. Определите массу рельса m .
2. Найдите скорость рельса v .
3. Какую минимальную длину L_{\min} мог иметь рельс?

Значение ускорения свободного падения считайте равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

9 класс

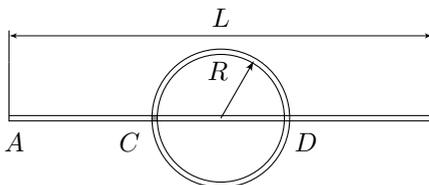
Задача №1. Выцветшие фокусы линзы

В архиве Снеллиуса нашли рукопись с оптической схемой. От времени чернила выцвели, и остались видны собирающая линза, её главная оптическая ось и две точки. Из поясняющих записей к схеме стало ясно, что точечный источник находился на главной оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы, а точки A и B лежали на одном из лучей, проходившем через этот источник и прошедшем сквозь линзу. По имеющимся данным построением с помощью циркуля и линейки без делений восстановите положение фокусов линзы.



Задача №2. Частицы в трубах

Первая частица разгоняется с ускорением a в прямой трубе длиной L от ее конца A с нулевой начальной скоростью. Вторая частица движется с постоянной скоростью v в другой трубе, имеющей форму кольца радиуса R и расположенной непосредственно над первой трубой таким образом, что центр кольца совпадает с серединой первой трубы.

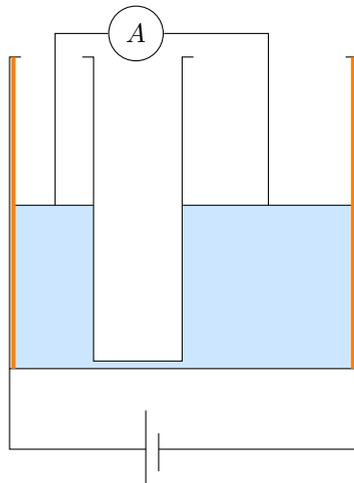


В момент пролета первой частицы через точку C , которая расположена под кольцевой трубой, вторая частица оказывается точно над первой. Второе пересечение труб (точку D) частицы тоже пролетают одновременно.

1. Как зависит скорость v от радиуса R ?
2. Чему равна скорость v_1 при $R = L/2$?
3. Чему равна скорость v_2 при $R \ll L$?

Задача №3. Гидростатический реостат

В боковые непроводящие стенки вертикальных сообщающихся сосудов (площади сечения сосудов $S = 100 \text{ см}^2$ и $3S$) вмонтированы две одинаковых тонких однородных нихромовых проволоки. Длина проволок равна высоте сосудов. К нижним концам проволок подключена идеальная батарея с напряжением на клеммах $U = 46.2 \text{ В}$. Сосуды имеют высоту $2h_0$ ($h_0 = 50 \text{ см}$). В сосуды до уровня h_0 залита вода, которая накрыта легкими и тонкими проводящими поршнями. Поршни не пропускают воду, имеют контакт с проволоками и могут без трения передвигаться внутри сосудов, не покидая их, благодаря стопорам.



К поршням с помощью гибких проводов подключен амперметр (длина проводов позволяет поршням свободно перемещаться). Схема установки изображена на рисунке. Когда на маленький поршень кладут непроводящую гирию массой 1 кг , амперметр показывает силу тока $I_1 = 2.31 \text{ А}$. Если же 3 таких гири положить на большой поршень (а с маленького всё убрать), то амперметр покажет силу тока $I_2 = 2.1 \text{ А}$.

1. Определите сопротивление амперметра R_A , при условии, что соединительные провода и поршни имеют пренебрежимо малое сопротивление.
2. Определите силу тока, который показывает амперметр, когда на поршнях отсутствуют грузы.
3. В каких пределах может меняться сила тока в собранной установке, если в распоряжении имеется широкий выбор грузов?

Можно считать, что соединительная трубка имеет пренебрежимо малое сечение. Проводимость воды также очень мала. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Задача №4. Что так, что эдак

Ваня и Маша провели 2 эксперимента. В первом — десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$), грели на плитке мощностью $P = 1.4 \text{ кВт}$ в течение $\tau = 10$ минут. При этом через $\tau_1 = 5$ минут после начала эксперимента в кастрюлю, не снимая ее с плитки, долили некоторое количество воды комнатной температуры, а еще через $\tau_2 = 3$ минуты, также не снимая кастрюлю с плитки, из нее столько же воды отлили.

Во втором эксперименте при тех же начальных условиях отлив и долив поменяли местами, не меняя общее время эксперимента, моменты манипуляций и количество доливаемой и отливаемой воды.

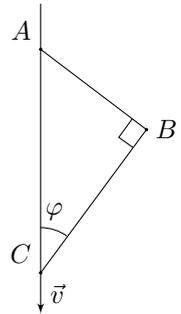
Конечная температура воды в кастрюле в обоих экспериментах совпала.

1. Какой была масса добавляемой в экспериментах воды?
2. Какую температуру имела вода в кастрюле в конце экспериментов?
3. Какого максимального значения достигала температура воды в кастрюле в каждом из проведенных экспериментов?

Считайте, что долив и отлив воды происходят очень быстро. Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы, а вода в процессе экспериментов не закипала. Удельная теплоёмкость воды $c = 4.2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Задача №5. Движение по спице

Материальные точки B и C связаны нерастяжимыми нитями AB и BC . Точка C может скользить по неподвижной длинной вертикальной спице, на которой также закреплён конец A нити AB . В момент, показанный на рисунке, нить BC образует угол $\varphi = 30^\circ$ с вертикалью и перпендикулярна нити AB , скорость точки C направлена вниз и равна v , тангенциальное ускорение точки B равно a_τ , и точка B движется в плоскости рисунка. Нити натянуты. Оказалось, что ускорение точки C в рассматриваемый момент равняется нулю.



1. Определите модуль скорости v_B точки B в рассматриваемый момент.
2. Определите длину l_{BC} нити BC .
3. Определите модуль ускорения a_B точки B в рассматриваемый момент.

10 класс

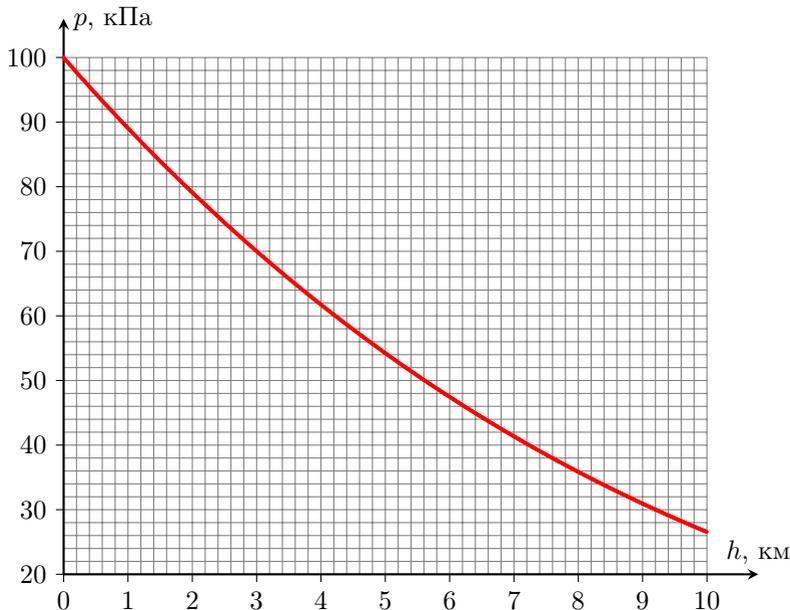
Задача №1. Зонд

Экспериментатор Глюк сконструировал атмосферный зонд, состоящий из шара объёмом $V = 20 \text{ м}^3$, заполненного гелием при давлении $p_0 = 100 \text{ кПа}$ и температуре $T_0 = 300 \text{ К}$, и подвешенного к нему набора метеорологических датчиков.

1. При какой максимальной массе датчиков зонд сможет подняться на высоту 4 км?

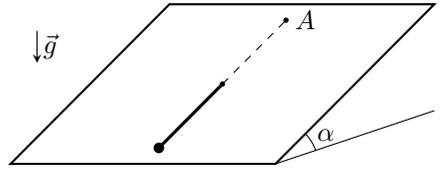
2. На какую максимальную высоту сможет подняться такой шар без датчиков?

График зависимости давления воздуха от высоты над поверхностью земли представлен на рисунке. Считайте, что температура воздуха линейно уменьшается с высотой от 300 К (у поверхности Земли) до 220 К (на высоте 10 км). Оболочка шара является тонкой, нерастяжимой и непроницаемой для газов. Температуру газа внутри шара считать равной температуре окружающего воздуха. Объёмом датчиков при расчётах можно пренебречь. Масса оболочки шара равна $m_0 = 8 \text{ кг}$, молярная масса гелия $M_{\text{г}} = 4 \text{ г/моль}$, молярная масса воздуха $M_{\text{в}} = 29 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$. Считайте, что ускорение свободного падения не меняется с высотой.



Задача №2. Наклонная плоскость

Жесткий невесомый стержень длины L лежит на шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Один конец стержня шарнирно прикреплен к плоскости, а ко второму концу присоединен небольшой массивный груз. Изначально стержень расположен так, что груз находится в самой нижней точке.



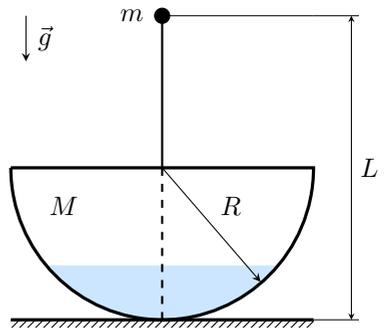
1. Какую минимальную скорость v_1 , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он, двигаясь вместе со стержнем, смог оказаться в точке, диаметрально противоположной начальной (в точке A)?

2. Какую минимальную скорость v_2 , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он смог вернуться в исходную точку после одного полного оборота стержня?

Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен $\mu = \frac{\text{tg } \alpha}{2}$, трение между стержнем и плоскостью и трение в шарнире отсутствуют.

Задача №3. Волчок

Волчок представляет собой тонкостенную однородную полусферу, к поверхности которой прикреплен тонкий невесомый стержень с закрепленным на его конце точечным телом. Стержень проходит через центр полусферы. Масса полусферы M , ее радиус R . Длина стержня $L = 2R$, масса точечного тела m . Волчок расположен на шероховатой горизонтальной поверхности.



Внутри волчка налита вода плотностью ρ . Объем воды меньше объема полусферы. Трением воды о стенки полусферы можно пренебречь.

1. Докажите, что центр масс тонкостенной однородной полусферы расположен на расстоянии $R/2$ от ее центра.

При ответах на дальнейшие вопросы можете использовать факт из п. 1, даже если не смогли это доказать.

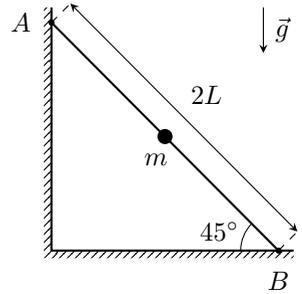
2. Волчок отклоняют так, что его стержень составляет малый угол α с вертикалью, и отпускают. Нарисуйте все силы, действующие на волчок (вода не считается частью волчка) сразу после того, как его отпустили.

3. Для случая $M = 6m$ определите при каких значениях объема воды в волчке его равновесие будет устойчивым.

4. Пусть объем воды внутри волчка равен половине объема полусферы. Определите при каких значениях M/m равновесие волчка будет устойчивым.

Задача №4. Бусинка на стержне

Твердый невесомый стержень длиной $2L$ опирается концом A на гладкую вертикальную стенку, а концом B на горизонтальную шероховатую поверхность. Коэффициент трения между стержнем и горизонтальной поверхностью — μ . По стержню может без трения скользить маленькая бусинка массой m . Тела удерживают так, что стержень расположен под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, а бусинка находится посередине стержня. Тела отпускают, и через некоторое время стержень приходит в движение, при этом бусинка к этому моменту времени не успевает удариться о горизонтальную поверхность.

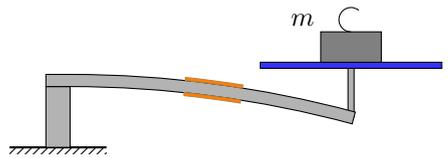


1. Найдите скорость бусинки в момент времени, когда стержень начнет двигаться, и все значения коэффициента трения μ , при которых возможна описанная в условии ситуация.

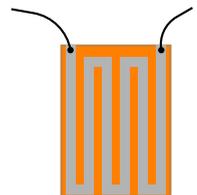
2. Найдите силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой в этот момент времени.

Задача №5. Весы

В этой задаче вам предлагается изучить работу электронных весов. Принцип их работы, как и у пружинных весов, основан на измерении деформации тела под механической нагрузкой. Деформируемым телом является балка прямоугольного сечения, прикрепленная одним концом к корпусу весов, а другим к платформе, на которую устанавливается измеряемый груз. Толщина балки d . Под нагрузкой балка изгибается. Измерение деформации производится с помощью двух одинаковых тензорезисторов №1 и №2, жестко приклеенных на верхнюю и нижнюю части балки соответственно. То есть при деформации балки длина резистора изменяется также, как длина участка поверхности, на который он приклеен.



Тензорезистор представляет змейку из проводящей фольги, наклеенную на поверхность балки. При деформации балки фольга растягивается или сжимается, за счет чего ее сопротивление соответственно увеличивается или уменьшается. Зависимость сопротивления тензорезистора от относительного

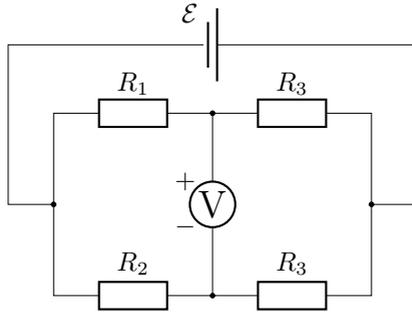


удлинения(сжатия) ε поверхности, на которую он приклеен, задается выражением:

$$R_{1,2} = R_0(1 + k\varepsilon),$$

где R_0 — сопротивление при отсутствии деформации, k — тензометрический коэффициент. Величина k лежит в пределах от 1 до 2.

Тензорезисторы включены в электрическую цепь с двумя обычными резисторами R_3 , источником постоянного напряжения и вольтметром. Сопротивления резисторов R_3 равны R_0 (сопротивлению тензорезистора при отсутствии деформации).



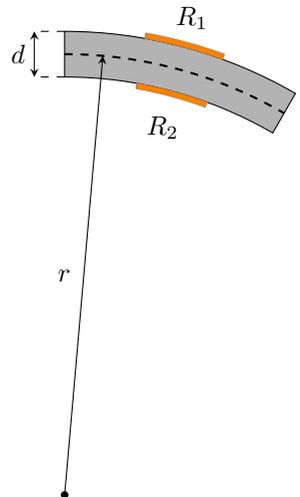
Когда на платформу весов ставят груз, балка изгибается, при этом верхняя часть балки растягивается, а нижняя сжимается. Некоторая линия внутри балки остается недеформируемой (в дальнейшем недеформируемая линия), то есть ее длина при изгибе балки остается неизменной. Участок балки, к которому приклеены тензорезисторы, можно представить в виде дуги окружности. Радиус кривизны недеформируемой линии в месте крепления тензорезисторов обратно пропорционален массе груза m , поставленного на платформу весов:

$$r = \frac{\alpha}{m},$$

где α — некоторый известный коэффициент. При этом значение радиуса кривизны много больше толщины балки, и изменением толщины балки можно пренебречь.

Массу платформы и балки в рассматриваемой модели учитывать не будем. Вольтметр будем считать идеальным.

Предположим, что недеформируемая линия проходит через середину балки.



1. Выразите величину относительной деформации ε_1 тензорезистора №1 через величины r и d .

2. Выразите величину относительной деформации ε_2 тензорезистора №2 через величины r и d .

Зависимость величины показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза с учетом малости деформации балки может быть представлена в виде:

$$U = \gamma m^n,$$

где n — целое число, γ — коэффициент пропорциональности.

3. Определите n и γ .

4. Теперь предположим, что недеформируемая линия проходит на расстоянии $x = d/4$ от верхней поверхности балки. Рассчитайте в этом случае показания вольтметра при установке на платформу груза массой m .

5. Весы перенесли в более теплое помещение, из-за этого они нагрелись. В процессе нагрева весов балка изменила свою длину, ее относительная деформация составила ε_3 (порядка величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$). Изменением толщины и ширины балки можно пренебречь. Рассчитайте в этом случае показания вольтметра при установке на платформу груза массой m . (Недеформируемая линия проходит посередине балки)

При решении задачи считайте известными величины:

- \mathcal{E} — напряжение источника питания;
- k — тензометрический коэффициент резисторов №1 и №2;
- m — масса груза, установленного на весы;
- α — коэффициент пропорциональности между радиусом кривизны балки в месте крепления резисторов и массой груза в минус первой степени;
- d — толщина деформируемой балки;
- ε_3 — относительное удлинения балки при ее нагреве.

Величину сопротивления резисторов R_0 считайте НЕизвестной.

11 класс

Задача №1. Вращающаяся гильза

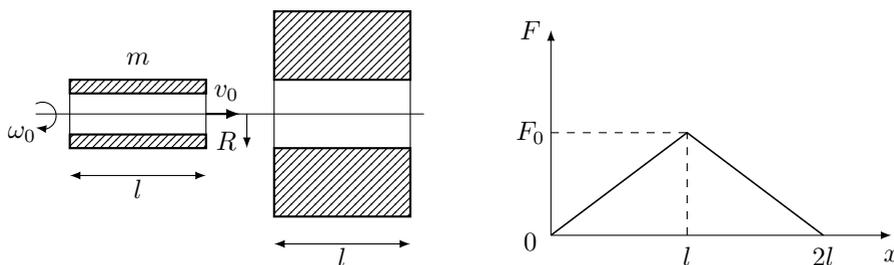
Тонкостенная цилиндрическая гильза массы m , вращающаяся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, влетает со скоростью v_0 в отверстие в закрепленной стальной плите (рисунок слева). Оси гильзы и отверстия совпадают, внешний радиус гильзы R равен радиусу отверстия, длина гильзы l равна толщине плиты.

График зависимости силы, которую необходимо прикладывать к невращающейся гильзе, для проталкивания её через отверстие от величины перемещения представлен на рисунке справа. Максимальное значение силы равно F_0 . Эта сила нужна для преодоления силы сухого трения, причем нормальные силы реакции, действующие на участки поверхности гильзы со стороны стен отверстия, не зависят от скорости и угловой скорости гильзы. Поверхности гильзы и отверстия однородны и одинаковы по всей длине. Координата $x = 0$ отвечает положению гильзы, которая только начала входить в плиту.

1. При каком минимальном значении $v_0 = v_{\min}$ гильза пролетит через отверстие (начальная угловая скорость ω_0 всегда одна и та же)?

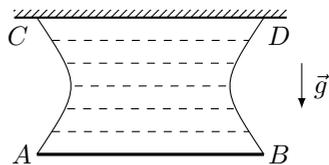
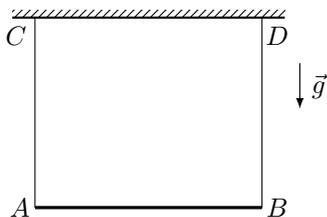
2. Чему будет равна при этом (при $v_0 = v_{\min}$) угловая скорость ω_1 вращения гильзы в момент, когда гильза окажется целиком внутри плиты?

3. Через какое время τ от момента влета в отверстие при начальной скорости $v_0 \geq v_{\min}$ гильза окажется внутри плиты целиком?



Задача №2. Как измерить поверхностное натяжение?

В поле тяжести на двух невесомых нерастяжимых нитях к горизонтальному стержню CD подвешена планка AB массы m длины L . Нити прикреплены к концам планки и располагаются вертикально (рисунок слева). После погружения системы в неизвестную жидкость и последующего извлечения ее из жидкости в пространстве между нитями, планкой и стержнем сформировалась пленка жидкости, а сама система приобрела вид, представленный на рисунке справа. При этом минимальное расстояние между нитями оказалось равным d , а расстояние между планкой и стержнем равным h .



1. Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ .
2. Вычислите величину σ при $L = 10$ см, $m = 2$ г, $d = 5$ см, $h = 8.7$ см.

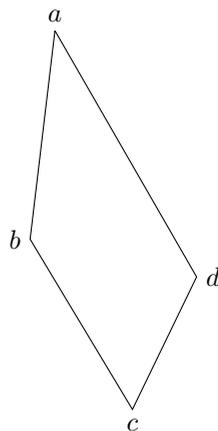
Задача №3. Трапеция Лорда Кельвина

В архиве лорда Кельвина была найдена диаграмма циклического процесса, проводимого с постоянным количеством идеального двухатомного газа, представляющая собой в координатах pV трапецию. От времени чернила выцвели и на рисунке, представленном ниже, осталась видна лишь трапеция. Известно, что теплоёмкость в каждом из процессов ab , bc , cd , da была постоянна, причём $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$. Также известно, что максимальная температура газа в цикле равна $T_1 = 400$ К, а температуры некоторой пары из точек a , b , c , d были одинаковы и равны $T_2 = 200$ К.

1. Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения координатных осей pV .

Примечание: Описывать построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

2. Определите температуры T_a , T_b , T_c , T_d в точках a , b , c , d соответственно.
3. Найдите КПД цикла η .

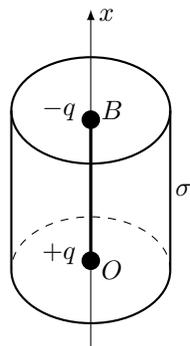


Задача №4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда

Диполь – жесткий стержень длины H с зарядами q и $-q$ на концах – находится на оси тонкостенной цилиндрической трубки радиуса R и высоты H . На трубку нанесен заряд с поверхностной плотностью σ , которая зависит от расстояния x до плоскости нижнего основания по закону

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2H} \right),$$

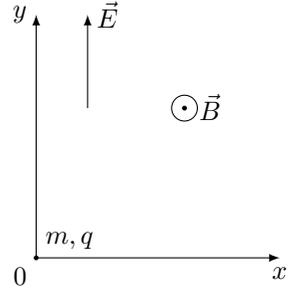
где $\sigma_0 > 0$. Найдите направление и величину электростатической силы, действующей на диполь в положении, в котором его



заряды q и $-q$ находятся в центре нижнего основания (т. O) и в центре верхнего основания (т. B) соответственно.

Задача №5. Движение в скрещенных полях

В скрещенных электрическом и магнитном полях движется маленькая частица массой m с положительным зарядом q . Вектор однородного электрического поля с напряжённостью E направлен вдоль оси y . Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси z , перпендикулярной плоскости xy (см. рис), а его величина зависит только от координаты y по закону $B = \alpha\sqrt{|y|}$. В начальный момент времени частица расположена в начале координат, а её скорость равна нулю. При дальнейшем движении частица впервые остановилась в момент времени $t = T$ после начала движения. Силы тяжести нет.



Примечание: при малых значениях Δx справедлива формула:

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x.$$

1. Определите скорость частицы в момент, когда она направлена вдоль оси x .
2. Определите радиус кривизны траектории частицы в точке с координатой y .
3. Изобразите траекторию частицы за время движения T .
4. На каком расстоянии от точки старта окажется частица через время $\tau = 3T/2$?

Возможные решения

Задача №7-Т1. В ванной

Пусть длинная сторона плитки имеет размер a , а короткая – b . Поскольку плитку резали только у стены с дверным проёмом, по рисунку можно найти соотношение между a и b . На 4 длинных стороны плитки приходится 10 коротких сторон (коврик перед унитазом может закрывать только одну целую плитку, поскольку его ширина равна $2b$). То есть

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Улитка из A до встречи должна пройти путь $3a$, улитка из B – путь $(a + 7b)$. Значит условие встречи можно записать в виде уравнения:

$$\frac{a + 7b}{u} - \frac{3a}{u} = \Delta t.$$

С учетом того, что $a = 2.5b$, получаем:

$$b = \frac{u\Delta t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{200}{60} \text{ см} = 20 \text{ см}. \quad a = 2.5b = 50 \text{ см}.$$

Теперь, зная размеры одной плитки, можно посчитать и площадь всей ванной комнаты, разбив её на простые части (например, на прямоугольники и прямоугольные треугольники с известными сторонами):

$$S = 4a(a + 9b) + 11ab + \frac{5}{2}ab = 4a^2 + 49.5ab = 5.95 \text{ м}^2.$$

PS: Разбиение на площади может быть и другим, соответственно формула может быть другой (например, $S = 59.5ab$). Но ответ, конечно, при этом измениться не должен.

Задача №7-Т2. Стадион МФТИ

Эффективная длина круга первой дорожка складывается из двух прямолинейных участков и двух дуг половинок окружностей.

$$L_1 = 2\pi R_1 + 2l \approx 400 \text{ м}.$$

Длины дорожек имеют различия только на криволинейных участках. Для первой и второй дорожек на трёх кругах разность длин:

$$\Delta L_{12} = 3(L_2 - L_1) = 3(2\pi(R_1 + d) - 2\pi R_1) = 6\pi d \approx 23 \text{ м}.$$

Легко заметить, что:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_{23} = \Delta l_{34} = 6\pi d \approx 23 \text{ м.}$$

Для расчёта средней скорости на дистанции 2400 м нельзя точно определить время. Например, показание часов 13:00 может соответствовать любому моменту от 13:00:00 до 13:00:59:99... Тогда время забега атлета принадлежит интервалу от 12 до 14 минут. Эти границы позволяют найти наименьшее и наибольшее значения средней скорости.

$$v_{\min} = \frac{2400 \text{ м}}{14 \cdot 60 \text{ с}} \approx 2.86 \text{ м/с}, \quad v_{\min} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{14 \text{ ч}} \approx 10.3 \text{ км/ч};$$

$$v_{\max} = \frac{2400 \text{ м}}{12 \cdot 60 \text{ с}} \approx 3.33 \text{ м/с}; \quad v_{\max} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{12 \text{ ч}} \approx 12 \text{ км/ч.}$$

Задача №7-Т3. Шоколад и карамель

Запишем формулу средней плотности:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}.$$

Найдём массу шоколада $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0.6V_1$, объём карамели $V_2 = \mu_2 t$, массу карамели $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \mu t$.

После подстановки получим:

$$1.1\rho_1 = \frac{0.6\rho_1 V + \rho_2 \mu t}{0.6V + \mu t}.$$

Выразим и найдём время

$$t = \frac{0.6V \cdot 0.1V}{\mu(\rho_2 - 1.1\rho_1)} = 9.6 \text{ мин.}$$

Проверим возможность ответа:

$$V_2 = \mu t = 0.60 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot 9.6 \text{ мин} = 5.76 \text{ л} < 6.4 \text{ л} = 0.4V.$$

Т.е. карамель не выливалась!

Задача №7-Т4. Догонялки

Введём обозначения: T_1 — всё время в пути первого автомобиля, T_2 — всё время в пути второго автомобиля, τ_2 — время движения второго автомобиля до остановки. Согласно условию задачи:

$$T_1 = \tau_2 + \Delta t;$$

$$T_2 = t_2 = 14 \text{ мин.}$$

Из графика (точка излома): $\tau_2 = 2$ мин. В течении этого времени расстояние между автомобилями меняется с относительной скоростью $(v_1 - v_2)$. За 2 минуты оно станет равным (из графика) $S_1 = 1.2$ км. Получаем первое уравнение связи скоростей:

$$S_1 = (v_1 - v_2)\tau_2.$$

После этого из графика видно, что за следующие 2 минуты первый автомобиль уехал от стоящего второго ещё на

$$S_2 = 4.2 \text{ км} - 3.2 \text{ км} = 3 \text{ км.}$$

Это нам позволяет найти скорость первого автомобиля:

$$v_1 = \frac{3 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 1.5 \text{ км/мин.}$$

тогда из уравнения для связи скоростей можно найти скорость второго автомобиля:

$$v_2 = 1.5 \frac{\text{км}}{\text{мин.}} - \frac{1.2 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 0.9 \text{ км/мин.}$$

Теперь запишем формулы для расчёта пути из A в B :

$$L = v_1 T_1 = v_1(\tau_2 + \Delta t);$$

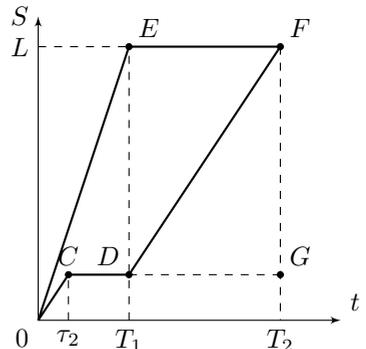
$$L = v_2(T_2 - \Delta t).$$

Приравняем правые части уравнений и найдём время остановки:

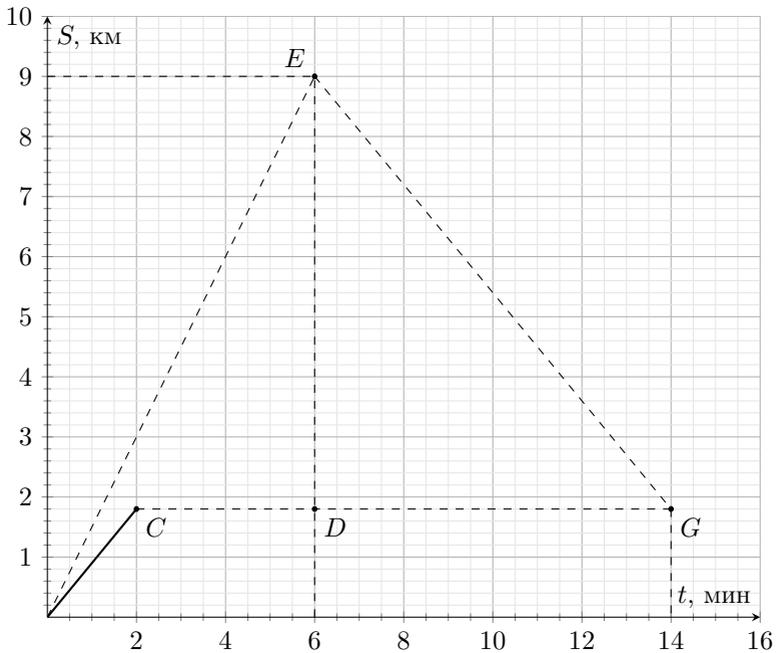
$$\Delta t = \frac{v_2 T_2 - v_1 T_1}{v_1 + v_2} = 4 \text{ мин.}$$

Также Δt можно найти графически. На рисунке качественно показан график движения автомобилей. Рассмотрим построение графика согласно условию задачи.

Известно, что первый автомобиль едет быстрее второго (угловой коэффициент прямой OE больше, чем у прямой OC) с постоянной скоростью v_1 вплоть до пункта B (точка E), а затем останавливается (участок EF). Второй автомобиль некоторое время движется с постоянной скоростью v_2 (участок OC), останавливается (участок CD), и когда первый автомобиль достигает пункта B , вновь продолжает движение (точка D) с той же скоростью v_2 (угловые



коэффициенты прямых OC и DF совпадают). В момент времени $t_2 = 14$ мин. автомобили поравнялись (точка F). Зная скорости автомобилей и время движения второго до остановки, можно определить положение точки G и провести через неё прямую GE с угловым коэффициентом $-v_2$ до пересечения с графиком движения первого автомобиля. На рисунке ниже показано это построение. Время остановки второго автомобиля 4 мин легко найти из построения.



Теперь можно найти длину пути:

$$L = v_2(T_2 - \Delta t) = 9 \text{ км.}$$

Если решать с использованием графика, то из построения также легко найти расстояние между пунктами A и B — 9 км.

Задача №8-Т1. По трубе

Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна $1.1V$. С учётом этого находим $\tau_1 = \frac{L}{1.1V} = \frac{10L}{11V}$.

Скорость правого шарика в системе отсчёта, связанной с трубой $1.9V$. Откуда $\tau_2 = \frac{L}{1.9V} = \frac{10L}{19V}$.

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени τ левый шарик пройдет путь $L + l_1 = 1.1V\tau$. Путь, пройденный вторым шариком, к этому моменту равен $L + l_2 = 1.1V\tau$, причём $l_1 + l_2 = 2L$.

Из записанных соотношений определим время $\tau = \frac{4L}{3V}$.

Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Скорость левого шарика в ней будет равна $1.1V + 0.1V = 1.2V$, скорость правого шарика будет равна $1.9V - 0.1V = 1.8V$.

Таким образом $u_1 = 1.2V$, $u_2 = 1.8V$.

Задача №8-Т2. Изогнутая трубка

Согласно условию: $p_0 = \rho g 10h = 10\rho gh$. Полное давление в жидкости: $p = p_{\text{внешнее}}$. Пройдём по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0.8p_0 + 4\rho g 2h - \rho g 3h + k\rho g 4h - 3\rho g 3h = p_0.$$

С учётом первого уравнения получаем $k = 1.5$.

Т.к. давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным s , то

$$p_0 + 4\rho g(2h - 2s) - \rho g(3h - 2s) + 1.5\rho g 4h - 3\rho g(3h + 2s) = p_0.$$

Отсюда $s = h/6$.

Задача №8-Т3. Туда-сюда

С учётом того, что теплопотери и теплоёмкостью кастрюли можно пренебречь, мощность плитки можно определить как $N = cm\Delta t/\Delta\tau$, где c — удельная теплоёмкость воды, m — масса воды (объёмом 5 литров, $m = \rho V = 5 \text{ кг}$), Δt — изменение температуры, $\Delta\tau$ — время, за которое это изменение произошло.

Так как в период с момента времени τ_1 до момента времени τ_2 масса воды в кастрюле равна m , температура изменилась с t_1 до t_2 , то $N = \frac{cm(t_2 - t_1)}{\tau_2 - \tau_1} = 1.75 \text{ кДж}$.

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева $\Delta t/\Delta\tau = 5 \text{ }^\circ\text{C/мин}$. Значит конечная температура равна $t_k = t_0 + 10\tau_0 \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\tau_0 = 1 \text{ мин}$).

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента Δm . К моменту времени $8\tau_0$ нагреватель выделит количество теплоты $N8\tau_0$. Оно равно сумме количества теплоты $cm(t_{45} - t_0)$, полученного водой массой m (оставшейся в сосуде после выливания) и количества теплоты $c\Delta m(t_x - t_0)$, полученного водой массой Δm . Т.е.

$$8N\tau_0 = cm(t_1 - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где t_x — температура воды в момент её забора. Причём $t_x < t_1$.

С учётом этого и вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0} \left(8\tau_0 \frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_1 + t_0 \right).$$

Из данного соотношения видно, что Δm принимает минимальное значение при максимально возможном значении $t_x = 45^\circ\text{C}$. Откуда $m_{\min} = 3$ кг.

Пусть τ — время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объём кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна $m = 5$ кг.

Тепло, выделившееся на нагревателе к моменту времени τ :

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

С учётом этого и соотношений для мощности плитки, выделяемой за время $8\tau_0$ получаем:

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m)}{N} \frac{8N\tau_0 - cm(t_1 - t_0)}{c\Delta m} = \left(\frac{m}{\Delta m} + 1 \right) \cdot \frac{8N\tau_0 - cm(t_1 - t_0)}{N}.$$

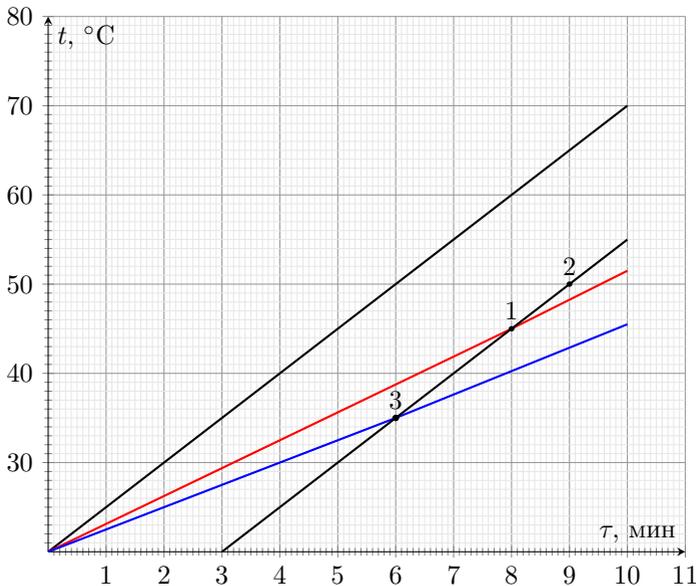
Откуда видно, что $\tau = \tau_{\min} = 6$ мин. при $\Delta m = \Delta m_{\max} = m$.

Также можно решать эту задачу графически в системе координат «время-температура». График процесса нагрева в этих координатах будет состоять из трех отрезков прямых: первый — до долива (масса воды в кастрюле $m = 5$ кг), второй — после долива (масса воды в кастрюле $m + \Delta m$) и третий — после забора воды (масса воды в кастрюле m).

Возьмем известные нам точки 1 и 2 и проведем через них прямую. На этой прямой лежит отрезок графика, соответствующий третьему участку. Учитывая, что масса воды на третьем и первом участке одинакова, прямые, на которых они лежат, должны быть параллельны, так как мощность нагрева постоянна. Проведем прямую, параллельную нашей и проходящую через начало координат (время — 0 мин, температура — 20°C). Именно на этой прямой лежит график первого участка. По ней также можно определить температуру t_k , которую имела бы вода в кастрюле, если бы её масса не менялась со временем. Температура, соответствующая 10 минутам и есть искомая $t_k = 70^\circ\text{C}$.

По наклону этой прямой можно также определить мощность плитки $N = \frac{cm\Delta t}{\Delta\tau} = 1.75$ кВт.

Когда в кастрюлю доливают воду, масса в ней увеличивается, а температура уменьшается. Поскольку изменение температуры происходит мгновенно, график перескакивает на прямую, имеющую наклон, соответствующий новой массе, и проходящую через начало координат. Чем масса больше, тем более полого пойдет прямая. А её пересечение с прямой третьего участка даст момент забора воды.



Поскольку кастрюля десятилитровая, больше 5 литров долить в неё невозможно. Этому случаю соответствует нижняя (голубая) прямая. Именно она пересекается с прямой третьего участка раньше любой другой возможной (в точке 3, соответствующей $\tau_{\min} = 6$ минут).

В то же время, второй участок не может пересечься с третьим позже точки 1, которой соответствует минимальная добавочная масса $m_{\min} = 3$ кг.

Задача №8-Т4. Ползущий рельс

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор (которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится между опорами. Пусть x — это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени, F_1 и F_2 — показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время t получим:

$$F_1 l = Mg(l - x - vt);$$

$$F_2 l = Mg(x + vt).$$

Откуда:

$$F_1(t) = Mg - \frac{Mgx}{l} - \frac{Mgv}{l}t;$$

$$F_2(t) = \frac{Mgx}{l} + \frac{Mgv}{l}t.$$

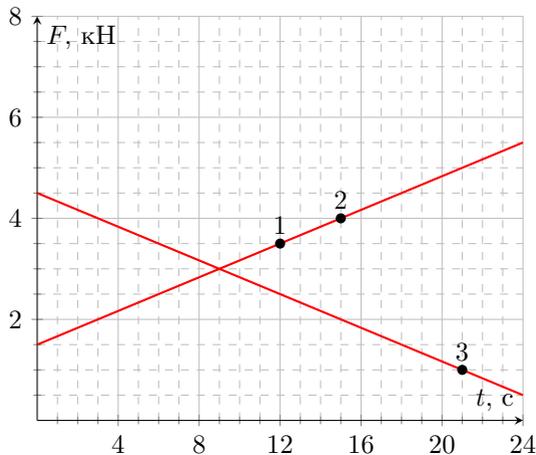
Видно, что в обоих случаях зависимость линейная. В первом — убывающая, а во втором — возрастающая, причем коэффициенты при t отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени $F_1 + F_2 = Mg$.

Очевидно, что из трех точек какие-то 2 принадлежат одному графику, а оставшаяся — другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, также как точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось X позже, чем начнется движение (а такого быть не может — рельс бы опрокинулся еще до старта).

Покажем это аналитически. Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -0.5 \frac{\text{кН}}{\text{с}}t + 11,5 \text{ кН}$. В момент времени $t_1 = 12 \text{ с}$ из графика находим $F_2(t_1) = 3,5 \text{ кН}$, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_1) = 5,5 \text{ кН}$. В момент времени $t_0 = 0 \text{ с}$ находим $F_1(t_0) = 11,5 \text{ кН}$. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -2,5 \text{ кН} < 0$. Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -\frac{5}{18} \frac{\text{кН}}{\text{с}}t + \frac{41}{6} \text{ кН}$. В момент времени $t_2 = 15 \text{ с}$ из графика находим $F_2(t_2) = 4 \text{ кН}$, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_2) = \frac{8}{3} \text{ кН} \approx 2,67 \text{ кН}$. В момент времени $t_0 = 0 \text{ с}$ находим $F_1(t_0) = \frac{41}{6} \text{ кН} \approx 6,83 \text{ кН}$. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -\frac{1}{6} \text{ кН} \approx -0,17 \text{ кН} < 0$. Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так:



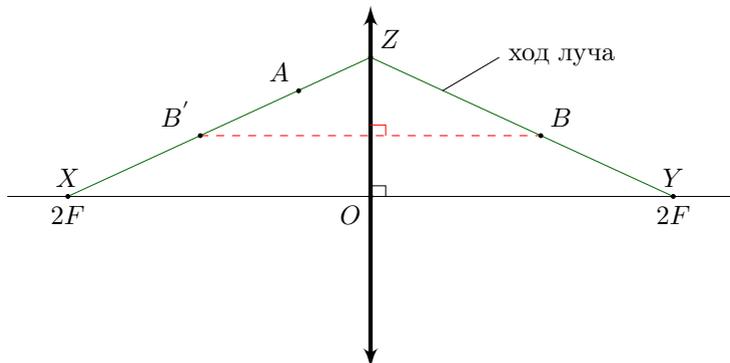
Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до

21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины.

По графикам не сложно определить, что $Mg = 6$ кН. С учетом того, что $g = 10$ Н/кг, получаем $M = 600$ кг. Если мысленно продлить графики до пересечения с осью X , то можно заметить, что расстояние l рельс проехал бы за 36 секунд. Значит его скорость — 0.25 м/с.

Что же касается минимальной длины рельса, то при её оценке мы можем отталкиваться только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры — 6.75 м. А в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры — 7.5 м. Откуда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше $L_{\min} = 15$ м.

Задача №9-Т1. Выцветшие фокусы линзы



Из рисунка видно, что линза собирающая, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{r},$$

где r — расстояние от изображения источника, которое находится тоже на главной оптической оси, до линзы.

Находим $r = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{2F}\right)^{-1} = 2F > 0$. Т.е. изображение находится на другой стороне от линзы на расстоянии $2F$ от неё — на том же расстоянии, что и источник.

Если X — источник, то Y — изображение источника. Если Y — источник, то X — его изображение.

$OX = OY \Rightarrow \triangle XYZ$ равнобедренный \Rightarrow точка B' , симметричная B относительно плоскости линзы, лежит на другой стороне $\triangle XYZ$ — стороне XZ .

Следовательно, следующий ряд построений отвечает на вопросы задачи:

1. Отражаем точку B относительно плоскости линзы и получаем точку B' (альтернативно можно так же поступить и с точкой A).
2. Проводим прямую AB' . Она пересекает главную оптическую ось в точке X . Получаем положение источника (или изображения) X на двойном фокусе.
3. Середина отрезка OX — первый фокус линзы.
4. Отражаем в плоскости линзы фокус, построенный в пункте 3 и получаем второй фокус.

Задача №9-Г2. Частицы в трубах

При движении от точки C до точки D между двумя встречами частица в кольцевой трубе совершает $N + \frac{1}{2}$ оборотов, где $N \geq 0$ — целое число. Это произошло за время

$$\Delta t = \frac{2\pi R(N + \frac{1}{2})}{v} = \frac{\pi R(2N + 1)}{v}.$$

Пусть $x(t)$ — расстояние от первой частицы до точки A в момент времени t , где $x(0) = 0$. Тогда $x(t) = \frac{at^2}{2}$ и $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Длины отрезков $|AC| = \frac{L}{2} - R$ и $|AD| = \frac{L}{2} + R$. Время движения частицы №1 от точки C до точки D равно

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{|AD|} - \sqrt{|AC|} \right) = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}$$

Получаем

$$\frac{\pi R(2N + 1)}{v} = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}.$$

Откуда

$$v = \frac{\pi R(2N + 1)\sqrt{a}}{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}} = \frac{\pi(2N + 1)(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$$

При $R = L/2$ имеем

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}$$

При $R \ll L$ получаем

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}$$

Задача №9-Т3. Гидростатический реостат

Перемещаясь, поршни задействуют разную длину проволок, соответственно, обеспечивают изменение сопротивления цепи. Это связано еще и с тем, что площади сосудов отличаются, иначе бы эффект не наблюдался. Дело в том, что при смещении большого поршня на Δh вниз, малый сместится на $3\Delta h$ вверх, и наоборот, когда большой поршень смещается на Δh вверх, малый сместится на $3\Delta h$ вниз.

Для удобства дальнейшей записи введем обозначение α для сопротивления одного метра проволоки. Тогда можно записать законы Ома для указанных в условии задачи положений поршней. Когда на поршнях нет грузов:

$$U = I_0(2\alpha h_0 + R_A),$$

когда груз на малом поршне:

$$U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S}),$$

когда груз на большом поршне:

$$U = I_2(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S}).$$

Взяв разность двух последних уравнений, получаем

$$U(I_2 - I_1) = I_1 I_2 \frac{\alpha m}{\rho S}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{U(I_2 - I_1)\rho S}{I_1 I_2 m} = 20 \text{ Ом/м}.$$

И, воспользовавшись первым законом Ома, получим ответ

$$R_A = \frac{U}{I_0 - 2\alpha H_0} = 1 \text{ Ом}$$

Из законов Ома для положений системы с грузами можно получить

$$U(I_1 + I_2) = 2I_1 I_2(2\alpha h_0 + R_A).$$

Учитывая закон Ома, когда нет поршней, получим

$$I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$$

Максимальный ток в цепи будет при минимальном сопротивлении, то есть, когда задействована минимальная длина проволок. Это произойдет в нижнем положении малого поршня:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 3.22 \text{ А.}$$

Минимальный ток напротив будет при максимальном сопротивлении, то есть, когда задействована наибольшая длина проволок. Это произойдет в верхнем положении малого поршня:

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 1.67 \text{ А.}$$

Задача №9-Т4. Что так, что эдак

Ситуация, описанная в задаче, может произойти только при условии, что отлив воды в экспериментах происходит при одинаковой температуре. Действительно, при отливе вода забирает с собой часть тепла, переданного плиткой, равную $c\Delta m(t_x - t_0)$, где t_x — это температура, при которой воду выливают из кастрюли. А поскольку общее количество теплоты, переданное воде плиткой, в обоих случаях одинаково, то и t_x должно быть одинаковым. Найдем температуру, при которой происходит отлив воды во втором эксперименте:

$$t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Здесь и далее M — это масса воды в кастрюле в начале эксперимента (5 кг). Эту же температуру должна иметь вода в первом эксперименте через время $\tau_1 + \tau_2$ после его начала. Отсюда:

$$t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}.$$

Откуда

$$\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M = 3 \text{ кг.}$$

Тогда конечная температура в каждом из экспериментов:

$$t_{\text{к}} = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 48 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Причем, для первого случая эта температура одновременно является максимально возможной по ходу всего эксперимента (поскольку она больше t_x). Во

втором случае максимального значения температура может достигать либо в конце эксперимента, либо непосредственно перед доливом воды (через $\tau_1 + \tau_2$ от начала нагрева). При проверке выясняется, что реализовался второй сценарий:

$$t_{\max 2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$$

Задача №9-Т5. Движение по спице

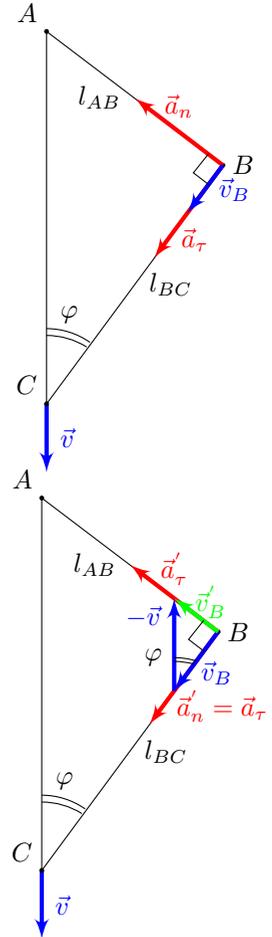
Так как точка A закреплена, а нить AB натянута, то точка B движется по окружности с центром в точке A и радиусом l_{AB} . Следовательно, её скорость в рассматриваемый момент перпендикулярна радиусу окружности, то есть нити AB , и поэтому направлена вдоль нити BC , перпендикулярной нити AB . Найти скорость точки B можно двумя способами.

Первый способ: поскольку нить BC нерастяжима и натянута, то проекции скоростей точек B и C на неё равны. Проекция скорости точки C на нить BC равна $v \cos \varphi$, так что $v_B = v \cos \varphi$.

Второй способ: перейдем в систему отсчета точки C , то есть в поступательно движущуюся систему отсчёта, в которой точка C покоится. Скорости \vec{v}_B и \vec{v}'_B точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_C$, где \vec{v}_C — скорость точки C в исходной системе отсчёта. В новой системе отсчёта точка C покоится, нить BC натянута, так что точка B движется по окружности с центром в точке C и радиусом l_{BC} . При этом скорость точки B в новой системе отсчёта направлена перпендикулярно радиусу окружности — нити BC . Значит, скорости \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и $\vec{v}_B - \vec{v} = \vec{v}'_B$ образуют прямоугольный треугольник с углом φ между \vec{v} и \vec{v}_B , в котором \vec{v} является гипотенузой. В таком случае $v_B = v \cos \varphi$.

$$v_B = v \cos \varphi = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Теперь определим длину нити BC . Для этого перейдём в систему отсчёта точки C , в точности как в Варианте 2 в предыдущем пункте. Поскольку новая система отсчёта поступательно движется относительно исходной, то ускорения \vec{a}_B и \vec{a}'_B точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{a}_B = \vec{a}'_B + \vec{a}_C$, где



\vec{a}_C — ускорение точки C в исходной системе отсчёта. Так как точка B движется по окружности с центром в точке C в новой системе отсчёта, то её ускорение складывается из тангенциального ускорения \vec{a}'_T , направленного вдоль нити AB , и ортогонального ему нормального ускорения \vec{a}'_n , направленного к точке C вдоль нити BC . По условию в исходный момент $\vec{a}_C = 0$, так что $\vec{a}_B = \vec{a}'_B$. Также дано, что ускорение точки B , направленное вдоль нити BC , равно a_τ . Значит, нормальное ускорение точки B в новой системе отсчёта равно a_τ . С другой стороны, оно равно

$$\frac{(v'_B)^2}{l_{BC}} = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}},$$

где равенство $v'_B = v \sin \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника, образованного скоростями \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и \vec{v}'_B . Таким образом,

$$a_\tau = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}} \implies l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau}.$$

$$l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau} = \frac{v^2}{4a_\tau}$$

Определим полное ускорение точки B в исходной системе отсчёта. Поскольку в исходной системе отсчёта точка B движется по окружности с центром в точке A , то её полное ускорение складывается из двух ортогональных составляющих: тангенциального ускорения a_τ и нормального ускорения, направленного вдоль нити AB к точке A и равного

$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a_\tau \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} = a_\tau \operatorname{ctg}^3 \varphi.$$

Равенство $l_{AB} = l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника ABC . Полное ускорение точки B находим по теореме Пифагора

$$a_B = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} = 2\sqrt{7}a_\tau.$$

Задача №10-Т1. Зонд

Температура падает с высотой со скоростью $k = 8$ К/км. На высоте $h_1 = 4$ км, следовательно, температура равна $T_1 = 268$ К, а давление (по графику) $p_1 \approx 62$ кПа. Плотность воздуха на этой высоте равна

$$\rho_{в1} = \frac{p_1 M_B}{RT_1}.$$

Масса гелия в шаре m_Γ в процессе подъёма не меняется, поэтому

$$m_\Gamma = \frac{p_0 M_\Gamma V}{RT_0}.$$

Запишем условие равновесия зонда на заданной высоте:

$$\rho_{в1}gV = (m_{г} + m_0 + m_{д})g$$

Откуда

$$m_{д} = \rho_{в1}V - m_{г} - m_0 = \frac{p_1M_{в}V}{RT_1} - \frac{p_0M_{г}V}{RT_0} - m_0 = 4.9 \text{ кг.}$$

Без датчиков шар будет подниматься, пока не станет справедливым новое условие равновесия

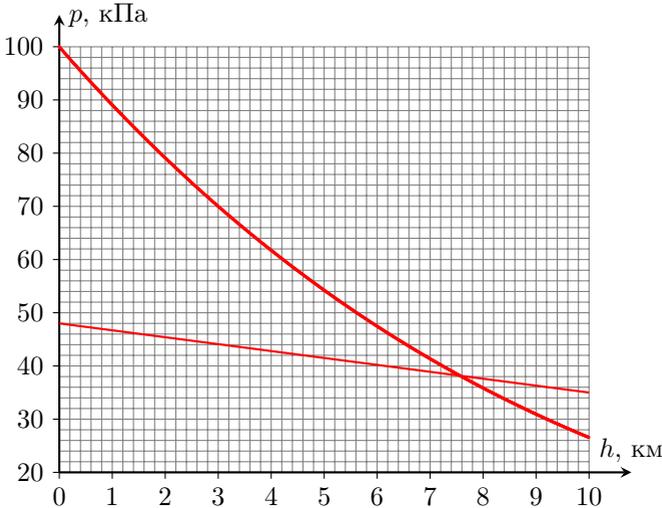
$$\rho_{в}gV = (m_{г} + m_0)g.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p(h)M_{в}}{RT(h)} = \frac{m_{г} + m_0}{V} \Rightarrow p(h) = \frac{(m_{г} + m_0)R}{M_{в}V} \cdot (T_0 - kh) \approx 48 \text{ кПа} - 1.3 \frac{\text{кПа}}{\text{км}} \cdot h.$$

Для нахождения высоты построим поверх графика зависимости $p(h)$ прямую, соответствующую полученному уравнению, и найдем, что максимальная высота равна примерно 7.6 км.

Примечание: на графике (толстая линия) изображена функция $p(h) = p_0(1 - kh/T_0)^{\frac{M_{в}g}{kR}}$, задающая распределение давления по высоте при зависимости температуры $T(h) = T_0 - kh$.



Задача №10-Т2. Наклонная плоскость

Так как стержень жесткий и изначальная скорость сообщена вдоль наклонной плоскости, то тело будет двигаться по окружности радиуса L .

При движении на груз действуют четыре силы: потенциальная сила тяжести и непотенциальные силы трения и реакции опоры со стороны стержня и плоскости. Сила реакции со стороны стержня, как и сила реакции со стороны плоскости, в любой момент времени направлены перпендикулярно скорости, поэтому их работа равна нулю. Сила трения постоянна по модулю и в любой момент направлена против скорости, поэтому работа силы трения будет равна $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}S$, где S — длина пути, пройденного телом. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную плоскости: $N - mg \cos \alpha = 0$. Так как тело скользит, то на него действует сила трения скольжения, равная $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Пусть скорость груза в верхней точке равна 0. Запишем связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot 2L \sin \alpha - 0) + \left(0 - \frac{mv_1^2}{2}\right) = -\mu mg \cos \alpha \cdot \pi L.$$

Скорость v_1 будет равна

$$v_1 = \sqrt{gL(4 \sin \alpha + 2\mu\pi \cos \alpha)} = \sqrt{(4 + \pi)gL \sin \alpha} \approx \sqrt{7.14 gL \sin \alpha}.$$

Рассмотрим в произвольный момент времени проекции сил, действующих на груз, на ось, сонаправленную скорости. Не нулевыми на эту ось будут только проекции силы тяжести и силы трения. Пока груз движется от нижней точки к самой верхней, обе проекции будут отрицательными, значит модуль скорости груза будет уменьшаться. В процессе дальнейшего движения проекция силы тяжести станет положительной и будет постепенно возрастать от нулевого значения, значит скорость тела первое время продолжит уменьшаться и достигнет минимума в точке, когда проекция силы тяжести скомпенсирует проекцию силы трения:

$$mg \sin \alpha \sin \beta - \mu mg \cos \alpha = 0$$

(здесь β — угол между стержнем и «вертикалью», то есть прямой, проходящей через верхнюю точку траектории груза и шарнир). Отсюда получим, что

$$\sin \beta = \frac{\mu}{\text{tg } \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Так как работа силы трения и изменение потенциальной энергии при перемещении в фиксированное положение не зависят от величины начальной скорости, то минимальному значению скорости на старте соответствует нулевое значение

минимальной скорости в процессе дальнейшего движения. Запишем опять связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot L \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) - 0) + \left(0 - \frac{mv_2^2}{2}\right) = -\mu mg \cos \alpha \cdot (\pi + \beta)L.$$

Тогда

$$v_2^2 = 2gL \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) + 2\mu g \cos \alpha (\pi + \beta)L = gL \sin \alpha \left(2 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right)$$

откуда

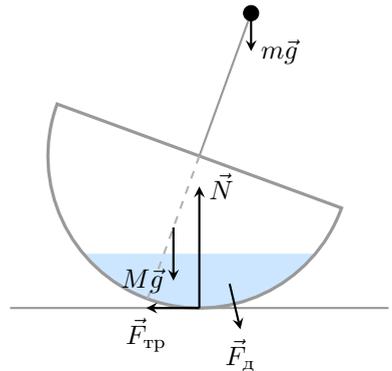
$$v_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{3} + 7\pi/6)gL \sin \alpha} \approx \sqrt{7.40 gL \sin \alpha}$$

Задача №10-Т3. Волчок

Определим координату центра масс полусферы. Мысленно «разрежем» полусферу плоскостями, параллельными основанию, на тонкие кольца толщиной h каждое. Масса такого кольца пропорциональна площади его поверхности. Пусть кольцо видно из центра полусферы под углом φ к ее основанию. Тогда радиус кольца равен $r = R \cos \varphi$. Заметим, что поверхность кольца образует с основанием полусферы угол $\pi/2 - \varphi$. Площадь поверхности кольца равна произведению его длины $2\pi r = 2\pi R \cos \varphi$ на ширину $h/\sin(\pi/2 - \varphi) = h/\cos \varphi$. Как видно из формул площадь кольца не зависит от угла, под которым оно видно из центра, а это означает, что масса полусферы равномерно распределена вдоль радиуса, перпендикулярного ее основанию, значит центр масс находится на расстоянии $R/2$ от центра.

Примечание: Решения, полученные интегрированием или другим способом также засчитываются, если исходят из верных начальных утверждений и корректно реализованы.

Рассмотрим силы, действующие на волчок, после того, как его отклонили и отпустили. На волчок будут действовать две силы тяжести $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$, сила реакции опоры со стороны стола \vec{N} . Направления этих сил вертикальны. Направления еще двух сил зависят от направления движения волчка. Рассмотрим случай, когда волчок возвращается в исходное состояние. В таком случае на него будет действовать сила трения, направленная влево и сила давления со стороны воды, направленная вниз и вправо. Горизонтальная составляющая силы давления со стороны воды возникает из-за наличия трения между волчком и столом, следствием которого является движение центра масс воды



влево. Это движение может быть обеспечено только за счет взаимодействия со стенками. Также стоит отметить тот факт, что мы изобразили результирующую силу давления воды, которая на самом деле распределена по поверхности контакта с полусферой и в каждой точке направлена перпендикулярно поверхности, то есть от центра полусферы. Это означает, что суммарный момент этой силы относительно центра полусферы равен нулю.

Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы после отклонения на малый угол волчок стремился вернуться обратно. Рассмотрим ось вращения, проходящую через центр полусферы. Моменты сил давления воды и реакции опоры относительно этой оси равны нулю. Сила трения нас не интересует, так как ее направление будет определяться суммарным моментом двух сил тяжести. Если суммарный момент двух сил тяжести направлен против часовой стрелки (стремится вернуть волчок в положение равновесия), то сила трения будет направлена влево и будет лишь замедлять скорость поворота волчка, но не может изменить направление его вращения. Из вышеизложенного становится понятно, что устойчивость равновесия волчка никак не зависит от количества налитой воды. Найдём положение центра масс волчка для случая $M = 6m$. Выберем ось x , проходящую через центр полусферы и направленную перпендикулярно ее основанию.

$$x_{\text{цм}} = \frac{6mR/2 - mR}{6m + m} > 0,$$

значит центр масс волчка расположен ниже его центра, а именно к нему приложена результирующая двух сил тяжести. Получаем, что в первом случае вне зависимости от объема налитой воды волчок будет находиться в состоянии устойчивого равновесия.

Налитая вода на равновесие не влияет. Для устойчивости равновесия необходимо чтобы центр масс волчка оказался ниже центра полусферы. Рассмотрим ту же ось x , что и в первом случае.

$$x_{\text{цм}} = \frac{MR/2 - mR}{M + m} > 0,$$

откуда $M/m > 2$.

Задача №10-Т4. Бусинка на стержне

Первый способ

Поскольку стержень находится в равновесии — равнодействующая сил, действующих на него, должна равняться нулю, а также относительно любой точки должен равняться нулю момент действующих на стержень сил. Поскольку массой стержня можно пренебречь, можно считать, что силы прикладываются к стержню в точках A , B и в месте положения бусинки.

Сила реакции со стороны вертикальной стены \vec{N}_A направлена горизонтально, а сила взаимодействия бусинки со стержнем \vec{N}_B направлена перпендикулярно последнему, поскольку трения между ними нет. Тогда линия действия равнодействующей сил нормальной реакции и трения в точке B — полной реакции опоры $\vec{Q}_B = \vec{N}_B + \vec{F}_{тр}$ — должна проходить через точку пересечения линий действия \vec{N}_A и \vec{N}_B по теореме о трёх непараллельных силах. Изобразим это на рисунке.

Поскольку линия действия \vec{N}_A фиксирована, а \vec{N}_B сохраняет своё направление — точка пересечения линий действия сил перемещается горизонтально. Угол наклона стержня к вертикали составляет 45° , значит смещению бусинки вдоль стержня на величину x соответствует смещение пересечения линий действия сил на величину $x\sqrt{2}$.

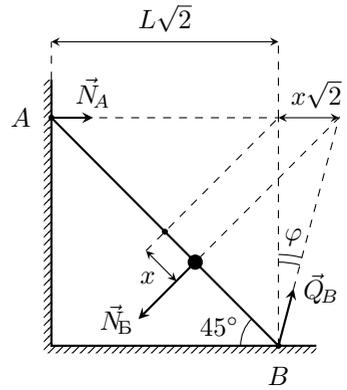
Возможны два варианта начала движения стержня: скольжение по полу и стенке или вращение относительно нижнего конца. Предположим, что стержень начнёт проскальзывать. Это произойдет в тот момент, когда \vec{Q}_B более не сможет удовлетворить условию пересечения линий действия сил, т.е. угол φ превысит величину $\arctg \mu$.

Отсюда найдём перемещение бусинки x_{max} :

$$\frac{x_{max}\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} = \mu \Rightarrow x_{max} = \mu L.$$

Стержень придет в движение до момента удара бусинки о пол, если $x_{max} < L$, отсюда получаем условие на коэффициент трения, при котором возможна описанная ситуация $\mu < 1$. Определим скорость бусинки из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgx_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v = \sqrt{\sqrt{2}\mu gL}.$$

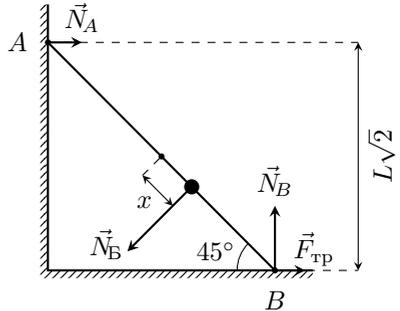


Второй способ

Расставим силы, действующие на стержень, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F_{\text{тр}} + N_A - \frac{N_B}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$N_B - \frac{N_B}{\sqrt{2}} = 0$$



и правило моментов относительно точки B :

$$N_B(L - x) = N_A \frac{2L}{\sqrt{2}}.$$

Из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню, получим, что $N_B = mg/\sqrt{2}$. Решив систему уравнений, найдем:

$$N_A = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_B = \frac{mg}{2}, \quad F_{\text{тр}} = \frac{mgx}{2L}.$$

Проскальзывание начнется при $F_{\text{тр}} = \mu N_B$, то есть если

$$\frac{mgx}{2L} = \frac{\mu mg}{2} \Rightarrow x = \mu L.$$

Отсюда при условии, что $x < L$, получим $\mu < 1$. До начала проскальзывания бусинка движется равноускоренно с ускорением $a = g/\sqrt{2}$. Начальная скорость бусинки равна нулю, поэтому

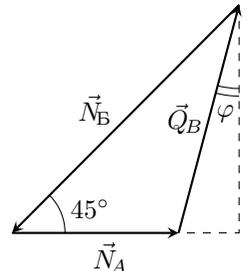
$$v^2 = 2ax \Rightarrow v^2 = 2 \cdot \frac{g}{\sqrt{2}} \cdot \mu L \Rightarrow v = \sqrt{\sqrt{2}\mu gL}.$$

Силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой также можно определить двумя способами.

Первый способ

Изобразим на рисунке условие равенства нулю равнодействующей сил, действующих на стержень (см. рис.). Обратим внимание, что из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню, $N_B = \text{const} = mg/\sqrt{2}$. Тогда имеем

$$N_A = \frac{mg(1 - \text{tg } \varphi)}{2}.$$



В момент отрыва $\operatorname{tg} \varphi = \mu$, поэтому

$$N_A = \frac{mg(1 - \mu)}{2}.$$

Как мы выяснили выше, описанная в условии ситуация возможна только при $\mu < 1$, тогда $N_A > 0$. Это означает, что наше предположение, о том, что проскальзывание начнется раньше переворота справедливо, а полученные ответы верны.

Второй способ

Так как в момент начала проскальзывания $x = \mu L$,

$$N_A = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{mg(1 - \mu)}{2}.$$

Как мы выяснили выше, описанная в условии ситуация возможна только при $\mu < 1$, тогда $N_A > 0$. Это означает, что наше предположение, о том, что проскальзывание начнется раньше переворота справедливо, а полученные ответы верны.

Задача №10-Т5. Весы

Проведем из центра дуги окружности недеформируемой линии два луча к краям резистора №1. Эти два луча отсекут на недеформируемой линии дугу, размер которой будет равен размеру резистора l_0 до деформации. Положим угол между лучами равным β . Тогда размер резистора в недеформируемом состоянии окажется равным $l_0 = \beta r$.

Размер подложки после деформирования балки составит

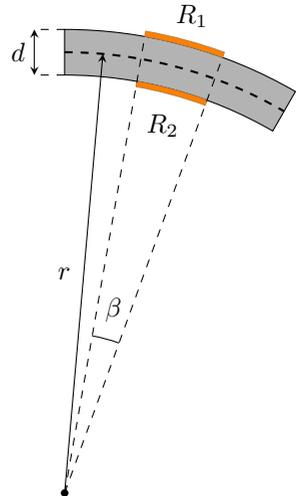
$$l = \beta(r + d/2).$$

Тогда величина относительного удлинения резистора составит

$$\varepsilon_1 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{d}{2r}.$$

Относительное изменение длины резистора №2 будет таким же по модулю, но отрицательным.

$$\varepsilon_2 = -\frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{d}{2r}.$$



В ненагруженном состоянии балки напряжения на резисторах №1 и №2 одинаковы и равны половине напряжения источника питания. Показания вольтметра в этом случае будут нулевыми. При нагрузке балки сопротивление резистора №1 увеличится на величину

$$\Delta R = k\varepsilon R_0 = k \cdot \frac{d}{2r} \cdot R_0 \ll R_0,$$

а сопротивление резистора №2 уменьшится на ту же величину. Силы тока через резисторы R_1 и R_2 , соответственно, равны

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R}.$$

Показание вольтметра будет равно разности напряжений на резисторах $R_3 = R_0$ и составит

$$U = (I_2 - I_1)R_0 = \left(\frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R} \right) \cdot R_0 = \frac{2\mathcal{E}R_0\Delta R}{4R_0^2 - (\Delta R)^2} \approx \frac{\mathcal{E}}{2} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}.$$

С учетом ранее полученного выражения для изменений сопротивлений резисторов:

$$U = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = \frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}.$$

Таким образом, зависимость величины показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза является прямой пропорциональностью, то есть $n = 1$. Тогда для коэффициента этой зависимости имеем:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}.$$

Если недеформируемая линия балки будет проходить на некотором расстоянии x от верхней поверхности балки, то формулы для относительной деформации подложек резисторов №1 и №2 примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x/r, \\ \varepsilon_2 = -(d-x)/r. \end{cases}$$

Соответственно, относительные изменения сопротивлений:

$$\begin{cases} \Delta R_1/R_0 = kx/r, \\ \Delta R_2/R_0 = -k(d-x)/r. \end{cases}$$

Тогда для показаний вольтметра аналогично предыдущему случаю получим:

$$U' = \left(\frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_2} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_1} \right) \cdot R_0 = \frac{\mathcal{E}R_0(\Delta R_1 - \Delta R_2)}{(2R_0 + \Delta R_1)(2R_0 + \Delta R_2)} \approx \frac{\mathcal{E}}{4} \cdot \frac{\Delta R_1 - \Delta R_2}{R_0},$$

откуда

$$U' = \frac{k \mathcal{E}}{4} \left(\frac{x}{r} + \frac{d-x}{r} \right) = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = U.$$

То есть полученный ранее ответ не зависит от места положения недеформируемой линии.

Теперь предположим, что балка ко всему прочему нагрелась. Тогда к относительным изменениям длины подложек резисторов добавятся еще и удлинения за счет теплового расширения балки:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = d/(2r) + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_2 = -d/(2r) + \varepsilon_3. \end{cases}$$

Проведя аналогичные вычисления получим, что и в этом случае показания вольтметра останутся прежними:

$$U'' = \frac{k \mathcal{E}}{4} \left(\frac{d}{2r} + \varepsilon_3 - \frac{d}{2r} - \varepsilon_3 \right) = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = U.$$

То есть предложенная схема тензoeлектрического датчика является термостабильной и в целом не чувствительна к деформациям растяжения-сжатия балки.

Задача №11-Г1. Вращающаяся гильза

Скорость точек на внешней поверхности гильзы направлена к оси гильзы под углом $\alpha = \arctg \frac{\omega R}{v}$. Сила трения, действующая на элементы поверхности гильзы, направлена противоположно их скорости, а значит, не изменяет угол между векторами скоростей точек гильзы и её осью, а влияет лишь на модули этих скоростей. Следовательно, в процессе торможения гильзы отношение скорости ее поступательного движения и линейной скорости вращательного движения точек ее поверхности остается неизменной: $\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0}$.

Так как это обстоятельство очень важно для решения, приведем другой возможный способ его обоснования. Сила трения скольжения, в силу информации о постоянстве сил нормальной реакции стенок отверстия, для каждого малого элемента поверхности гильзы имеет постоянную величину и направлена против его скорости. Действие сил трения можно разделить на торможение поступательного движения (результатирующая сила $F_x(x) = F(x) \cos \alpha$) и торможение вращения гильзы (тормозящий момент равен моменту силы $F_{\perp}(x) = F(x) \sin \alpha$). Поэтому ускорения, с которыми уменьшаются скорость ее поступательного движения $v_x = v \cos \alpha$ и линейная скорость вращательного движения точек ее поверхности $v_{\perp} = \omega R = v \sin \alpha$, пропорциональны этим скоростям. Следовательно, отношение величин этих скоростей остается неизменным:

$$\frac{(v_{\perp})'_t}{(v_x)'_t} = \frac{v_{\perp}}{v_x}, \quad \left(\frac{v_{\perp}}{v_x} \right)'_t = \frac{v_x(v_{\perp})'_t - v_{\perp}(v_x)'_t}{v_x^2} = 0, \quad \frac{v_{\perp}}{v_x} = const$$

Поэтому и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_x} = \operatorname{const}$.

В направлении поступательного движения ускорение гильзы определяется проекцией силы трения

$$F_x(x) = F(x) \cos \alpha = F(x) \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}.$$

Поэтому движения вращающейся гильзы в направлении оси аналогично движению невращающейся гильзы при действии «уменьшенной» силы $F_x(x)$. Минимальное значение скорости v_{\min} при учете этого можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = -A_{mp} = \frac{F_x(l)2l}{2} = \frac{F_0 l v_{\min}}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2}}.$$

Из этого уравнения находим

$$v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + 4 \left(\frac{F_0 l}{m}\right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}.$$

Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что угловая скорость и скорость поступательного движения гильзы всё время связаны соотношением $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega_0}{v_0}$. В момент полного погружения скорость поступательного движения v_1 в $\sqrt{2}$ раз меньше начальной скорости $v_0 = v_{\min}$, так как работа сил трения к этому моменту составляет ровно половину от величины работы до момента вылета. Поэтому

$$\omega_1 = \frac{v_1}{v_0} \omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

При движении гильзы внутри отверстия до момента полного проникновения ее внутрь плиты сила F_x линейно увеличивается. Ускорение гильзы

$$a = -\frac{F_0 \cos \alpha}{ml} x.$$

Это формула совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos \alpha}{ml}} = \sqrt{\frac{F_0 v_0}{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Координата переднего среза гильзы зависит от времени как

$$x = x_0 \sin \Omega t,$$

где x_0 определяется при этом из условия $x_0 = \frac{v_0}{\Omega} = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}}$. Тогда до момента полного погружения гильзы в отверстие

$$x = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

и время погружения τ находится из уравнения

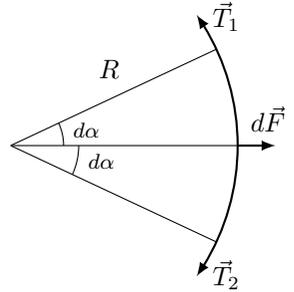
$$l = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{F_0 l \cos \alpha}{mv_0^2}} \right)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{F_0 l}{mv_0 \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}} \right).$$

Задача №11-Т2. Как измерить поверхностное натяжение?

Так как нить невесома и сила поверхностного натяжения везде перпендикулярна нити, сила натяжения нити постоянна $T = const$. Если взять участок нити длины dl и пренебречь действием силы тяжести, то на него действуют только силы натяжения нити ($T_1 = T_2 = T$) и сила поверхностного натяжения dF . Приближим участок нити дугой окружности некоторого радиуса R . Тогда сила поверхностного натяжения $dF = 2\sigma dl = 4\sigma R d\alpha$ (с учетом того, что у пленки две поверхности). В радиальной проекции имеем условие равновесия: $2T \sin(d\alpha) = dF$. Отсюда $R = T/2\sigma$, и таким образом $R = const$, то есть вся нить имеет форму дуги окружности. Поскольку AB и CD равны, минимальное расстояние между нитями достигается на середине высоты.

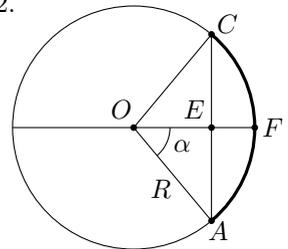


Из рисунка для расстояний: $AC = h$, $EF = (L - d)/2$. По теореме Пифагора для треугольника $\triangle OEA$:

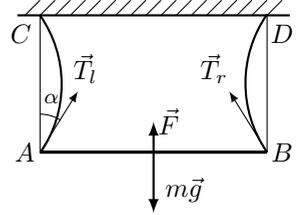
$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{L - d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R = \frac{(L - d)^2 + h^2}{4(L - d)}.$$



Рассмотрим часть системы, находящуюся ниже средней линии. Условие равновесия для нее: $2T + 2\sigma d = mg$ или $4\sigma R + 2\sigma d = mg$. (Либо можно рассмотреть силы, действующие непосредственно на планку: $2T \cos \alpha + 2\sigma L = mg$. Также в этом случае понадобится найти, под каким углом нить подходит к планке: $\sin \alpha = h/2R$). Подставляя из найденного ранее радиус нити:



$$\sigma = \frac{mg(L - d)}{h^2 + L^2 - d^2}$$

Подставляя числовые значения величин, находим: $\sigma = 0.066 \text{ Н/м}$.

Задача №11-Т3. Трапеция лорда Кельвина

Теплоёмкость C газа равна:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = \nu C_V + \frac{pdV}{dT}$$

Поймём, для каких линейных процессов $p(V)$, кроме $p = \text{const}$ и $V = \text{const}$, теплоёмкости являются постоянными. Пусть $p = p_0 + \alpha V$. Тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$(p_0 + \alpha V)V = \nu RT \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0 + 2\alpha V}{\nu R}$$

Подставляя выражение для dT/dV в выражение для теплоёмкости, получим:

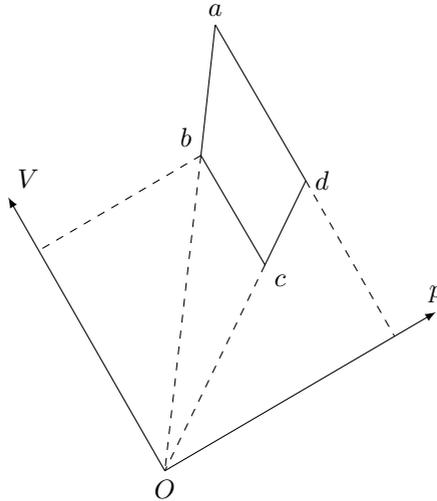
$$C = \nu \left(C_V + R \cdot \frac{p_0 + \alpha V}{p_0 + 2\alpha V} \right)$$

Теплоёмкость не зависит от объёма, если $p_0 = 0$, что соответствует прямой, проходящей через начало координат. Поскольку $C_p = C_V + R$, имеем:

$$C_V < C = \frac{C_p + C_V}{2} < C_p$$

Поскольку $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$ — процессы bc и da являются изобарными, а процессы ab и cd соответствуют прямым линиям, проходящим через начало координат.

Проведя линии ab и cd до пересечения, найдём положение начала координат. Далее, проводя через начало координат лучи, параллельные и перпендикулярные



направлению изобар, получим направления осей объёма V и давления p соответственно.

Поскольку $p_a = p_d$ и $p_b = p_c$, из подобия треугольников следует, что $V_b/V_c = V_a/V_d$. Тогда имеем:

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{V_b}{V_c} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{T_a}{T_d} \Rightarrow T_b T_d = T_a T_c$$

Поскольку $T_b > T_c$ и $T_a > T_d$ - температуры в точках b и d одинаковы и равны T_2 , а температура в точке a максимальна и равна T_1 . Тогда температура в точке c равна $T_3 = T_2^2/T_1$. Таким образом:

$$T_a = 400 \text{ К} \quad T_b = T_d = 200 \text{ К} \quad T_c = 100 \text{ К}$$

Газ получает тепло на участках cd и da , а отдаёт — на участках ab и bc . Тогда имеем:

$$Q_+ = C(T_2 - T_3) + C_p(T_1 - T_2) \quad Q_- = C(T_1 - T_2) + C_p(T_2 - T_3)$$

Поскольку $C_p = 7\nu R/2$ и $C = 3\nu R$, находим:

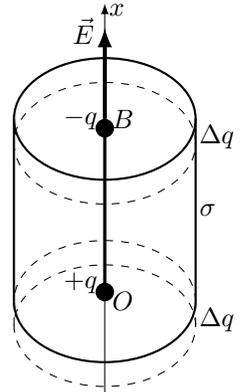
$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{6(T_1 - T_2) + 7(T_2 - T_2^2/T_1)}{6(T_2 - T_2^2/T_1) + 7(T_1 - T_2)}$$

После упрощения:

$$\eta = 1 - \frac{6T_1 + 7T_2}{6T_2 + 7T_1} = 0,05$$

Задача №11-Т4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда

Цилиндр можно разделить на тонкие параллельные основанию кольца, напряженность каждого из которых будет направлена в точке O вниз, а в точке B вверх вдоль оси цилиндра — в силу осевой симметрии в распределении заряда. Соответственно сила, действующая на отрицательный заряд в точке B , направлена так же, как и сила, действующая на положительный заряд в точке O — вниз вдоль оси цилиндра, или против оси x на рисунке. Точно также — противоположно оси x — направлена и суммарная сила, действующая на диполь.



Пусть E_1 — величина напряженности поля цилиндра в точке O , а E_2 — величина напряженности в точке B . Тогда величина силы, действующей на диполь, $F = q(E_1 + E_2)$. Наложим на наш цилиндр еще один такой же, с поверхностной плотностью заряда симметричной исходному цилиндру: $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$. В результате сложения получится цилиндр, равномерно заряженный по поверхности с плотностью заряда σ_0 :

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2H}\right) + \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi(H - x)}{2H}\right) = \sigma_0.$$

При этом по принципу суперпозиции в центре каждого из оснований будет одинаковая по величине напряженность, равная нужной нам для вычисления силы величине $E = E_1 + E_2$.

Поле в центре основания однородно заряженного цилиндра определим через скорость изменения потенциала по формуле: $E_x = -\Delta\varphi/\Delta x$. Заметим, что, если сдвинуть точку B вверх на Δx , то это равносильно смещению цилиндра, то есть исчезновению вверху кольца с зарядом Δq (обозначено на рисунке пунктирной линией) и прибавлению такого же кольца внизу. Разность потенциалов двух выделенных колец равна $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$, причем $\Delta q = \sigma_0 \cdot 2\pi R \cdot \Delta x$. Таким образом,

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right),$$

и величина силы

$$F = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Участники, знакомые с интегрированием, могут вычислить $E_1 + E_2$ непосредственно из принципа суперпозиции, складывая напряженности отдельных колец

$$dE_x = \frac{dq \cdot x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}};$$

$$E_1 + E_2 = \int_0^H \frac{\sigma_0 \cdot 2\pi R x}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \left(- \int_0^H d \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right)$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right).$$

Задача №11-Т5. Движение в скрещенных полях

Поскольку мощность силы Лоренца всегда равна нулю - кинетическая энергия частицы равна работе силы, действующей на неё со стороны электрического поля. Отсюда:

$$\frac{mv^2}{2} = qEy \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}$$

Вдоль оси x на частицу действует только сила Лоренца. Из второго закона Ньютона:

$$ma_x = qv_y B(y)$$

$$\Delta v_x(y) = \frac{qv_y B(y) \Delta t}{m} = \frac{\alpha q \sqrt{y} \Delta y}{m} = \frac{2\alpha q \Delta(y^{3/2})}{3m} \Rightarrow v_x(y) = \frac{2\alpha q y^{3/2}}{3m}$$

Из условия $v = v_x$ в момент, когда скорость частицы направлена вдоль оси x , найдём соответствующую данному моменту координату частицы y_1 :

$$\sqrt{\frac{2qEy_1}{m}} = \frac{2\alpha q y_1^{3/2}}{3m} \Rightarrow y_1 = \frac{3m}{2\alpha q} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha} \sqrt{\frac{2qE}{m}}}$$

Найдём радиус кривизны траектории в точке с координатой y . Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную направлению скорости частицы:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB + qE_n$$

где E_n - перпендикулярная скорости компонента электрического поля. Для неё имеем:

$$E_n = -E \cdot \frac{v_x}{v} = -\frac{\alpha y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

Подставляя во второй закон Ньютона, находим:

$$\frac{2qEy}{R} = \alpha q y \sqrt{\frac{2qE}{m}} - \frac{\alpha q y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}} = \frac{2\alpha q y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$R = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{mE}{2q}} = const$$

При решении второго пункта было получено, что $R = const$. Это означает, что частица двигалась по полуокружности до тех пор, пока не остановилась.

Обратим внимание, что после остановки движение частицы повторяется — она вновь будет двигаться по окружности того же радиуса, но уже из нового положения, находящегося от начального на расстоянии, равном диаметру окружности $2R$. Также обратим внимание, что за половину периода частица проходит половину окружности, поскольку $v \sim \sqrt{\sin \varphi}$, где φ — угловой размер пройденной дуги.

Тогда через время $\tau = 3T/2$ координаты частицы равны $(x, y) = (3R, R)$, и модуль её перемещения составляет:

$$S(\tau) = \sqrt{10}R$$

или же:

$$S(\tau) = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{5mE}{q}}$$

