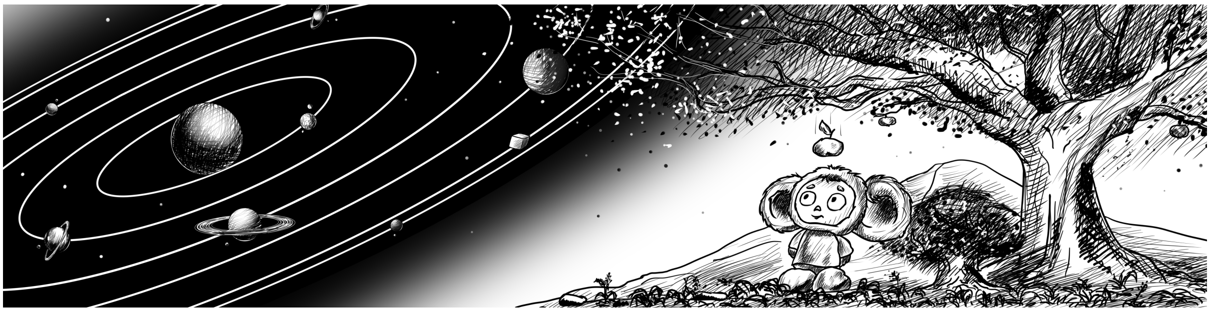


Кинематика материальной точки I

Жук Вальдемар движется с постоянной по модулю скоростью v по поверхности стоящего неподвижно небольшого школьного глобуса радиусом R. Вальдемар начинает движение на экваторе. По отношению к разметке глобуса его скорость всё время направлена на северо-восток. Глобус не вращается.

(a) Через какое время жук окажется на широте, равной θ?

(b) На какой угол φ поворачивается линия, соединяющая Вальдемара с линией полюсов, когда таракан достигает широты θ?

(c) Каково по модулю ускорение a жука в тот момент, когда он наступает на кружочек, соответствующий положению Санкт-Петербурга ($\theta = 60°$ северной широты)?

(d) Найдите уравнение траектории жука и ее длину, когда он достигнет полюса.

(e) Сколько оборотов сделал жук на своем пути к полюсу?

(f) Сколько времени у него заняло движение от начальной точки до полюса?

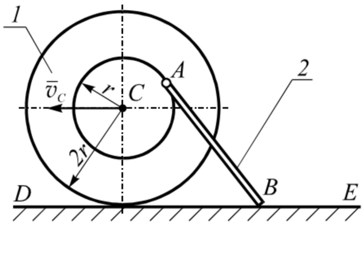
Кинематика материальной точки II

На закате заяц заметил лису в поле и стал убегать от неё с постоянной скоростью v, а лиса была подслеповатая и стала догонять не зайца, а конец его тени с той же скоростью v. Вначале лиса, заяц и конец его тени образуют равносторонний треугольник со стороной L. Считайте, что время движения недостаточно для того, чтобы Солнце опустилось и удлинило тень. Считайца зайца и лису материальными точками.

(a) Найдите уравнение траектории лисы в системе отсчёта зайца. Чему равно установившееся расстояние между ними?

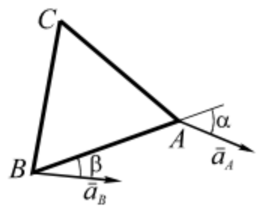
(b) В некоторый момент лиса, заяц и конец его тени образуют прямоугольный треугольник. Чему равно ускорение лисы в этот момент?

Кинематика твёрдого тела



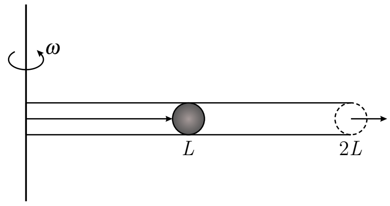
1. Ступенчатое колесо 1, имеющее радиусы r и $2r$, катится по направляющей DE без проскальзывания, так что его центр движется с постоянной скоростью v_C. В точке A к колесу шарнирно прикреплён стержень 2 длины $3r$, конец B которого скользит вдоль DE. Найдите угловую скорость стержня 2 в момент, когда точка A окажется в верхнем положении.

2. Равносторонний треугольник ABC движется в своей плоскости. Точки A и B имеют одинаковые по величине ускорения. Их векторы составляют углы α и β с направлением прямой AB (α и β неизвестны) и $\alpha - \beta = \varphi$. Найдите отношение ускорений точек C и A.

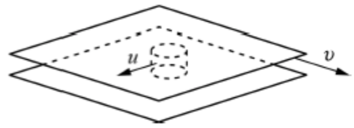


Динамика материальной точки

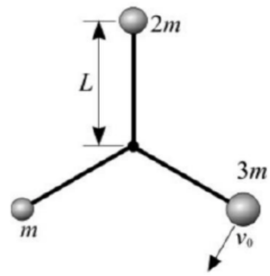
1. «Направляющая» трубка принудительно вращается с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из её концов (см. рис.). Внутри трубки, на расстоянии, равном $L/2$ от оси вращения, находится шарик. В некоторый момент нить, удерживающая шарик, обрывается, и шарик начинает движение по трубке. Через время t он вылетает из неё. Как изменится время вылета шарика, если длину трубки L увеличить в 2 раза и шарик опять же поместить в её середину?



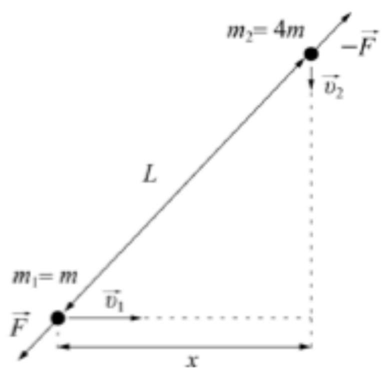
2. Между двумя параллельными плоскостями зажата шайба так, что её весом можно пренебречь по сравнению с силами нормальных реакций со стороны плоскостей. Коэффициенты трения между шайбой и плоскостями одинаковы. Верхняя плоскость движется с постоянной скоростью v, а нижняя покоится. Шайбе сообщают скорость u, перпендикулярную v. В некоторый момент времени угол между вектором скорости шайбы и вектором скорости верхней плоскости равен φ. Найдите модуль скорости шайбы.



Момент импульса материальной точки. Движение в центральном поле сил



1. Три шарика массами m, $2m$ и $3m$ закреплены на невесомых стержнях. Стержни имеют одинаковую длину L и шарнирно соединены друг с другом. Изначально углы между стержнями равны 120°, а система была неподвижна. Стержни лежат в одной плоскости. Точке массой $3m$ мгновенно сообщили скорость v_0, перпендикулярно стержню и лежащую в плоскости стержней. Силы тяжести нет. Найдите ускорение шариков.



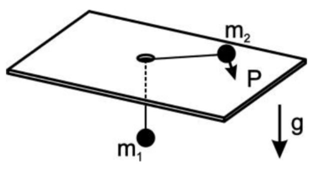
2. Два автономных зонда движутся навстречу друг другу с выключенными двигателями в глубоком космосе вдали от других тел курсами, пересекающимися под прямым углом. Масса первого зонда равна $m_1 = m$, а его скорость $v_1 = v$. Масса второго зонда $m_2 = 4m$, а скорость $v_2 = v/3$. В момент времени, когда расстояние между зондами становится равным L, а расстояние от первого зонда до точки пересечения траекторий — x, на обоих зондах включаются двигатели с постоянной по модулю силой тяги F, при этом вектор силы тяги в любой момент времени направлен противоположно направлению на другой зонд. Рисунок приведён для момента включения двигателей. Двигатели выключаются, когда расстояние между зондами становится равным $2L$. Размеры зондов малы по сравнению с L, а их гравитационным взаимодействием можно пренебречь.

(a) При каком значении $x = x_{\text{кр}}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

(b) Найдите минимальное значение силы тяги $F_{\min}$ при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{\text{кр}}$.

(c) Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{\min} + dF$ ($dF \ll F_{\min}$), а $x = x_{\text{кр}}$. Найдите **вектор** конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.

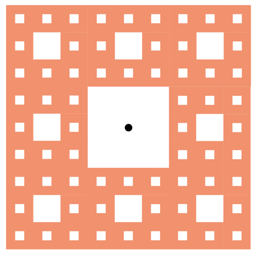
(d) Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{\text{кр}}$. Найдите модуль конечной скорости первого зонда относительно второго.



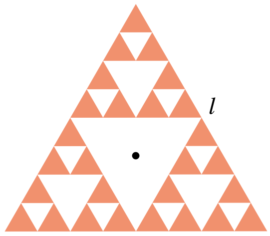
3. Через отверстие в гладком столе пропущена невесомая нить, к концам которой прикреплены массы m_1 и m_2. Масса m_2 лежит на расстоянии r_0 от отверстия (см. рис.). Ей сообщают импульс P перпендикулярно нити. Найдите максимальное удлинение массы m_2 от отверстия.

4. В поле неподвижного заряда Q рассеиваются частицы массы m и заряда q того же знака. Изначально частицы находятся на бесконечном удалении друг от друга, а вектор скорости рассеиваемой частицы равен $\vec{v}$ при любых значения прицельного параметра. Найдите область пространства, недостижимую для рассеиваемой частицы.

Момент инерции. Динамика твёрдого тела при наличии неподвижной оси

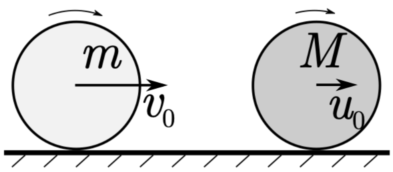


(a) Рассмотрим квадрат со стороной l. Удалим «центральный» квадрат площади в 9 раз меньше площади всего квадрата. Затем удалим «центральные» части из получившихся 8 квадратов (см. рис.). Затем проделаем такую операцию ещё раз и ещё раз, и так до бесконечности. Пусть конечная масса фигуры равна m. Определите момент инерции системы относительно оси проходящей через центр изначального квадрата и перпендикулярной плоскости рисунка.



(b) Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной l. Удалим «центральный» треугольник площади в 4 раза меньшей площади всего треугольника. Затем удалим «центральные» части из получившихся 3 треугольников (см. рис.). Затем проделаем такую операцию ещё раз и ещё раз, и так до бесконечности. Пусть конечная масса фигуры равна m. Определите момент инерции системы относительно оси проходящей через центр изначального треугольника и перпендикулярной плоскости рисунка.

Движение тела в общем случае



Шар массой m катится без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности со скоростью $v_0 = 10$ см/с и догоняет шар массой M, катящийся со скоростью $u_0 = 2$ см/с в том же направлении. Радиусы шаров одинаковы. Удар центральный и упругий, трением между шарами можно пренебречь. При каком отношении масс $x = M/m$ шар m через некоторое время после удара окажется в состоянии покоя?

Статика

Концы пружины слинки с коэффициентом жёсткости k и массы m, собственная длина которой пренебрежимо мала, закреплены на одной высоте. В точке крепления касательная к пружине составляет угол 45° с вертикалью. Ускорение свободного падения g. Найдите расстояние d между концами пружины.