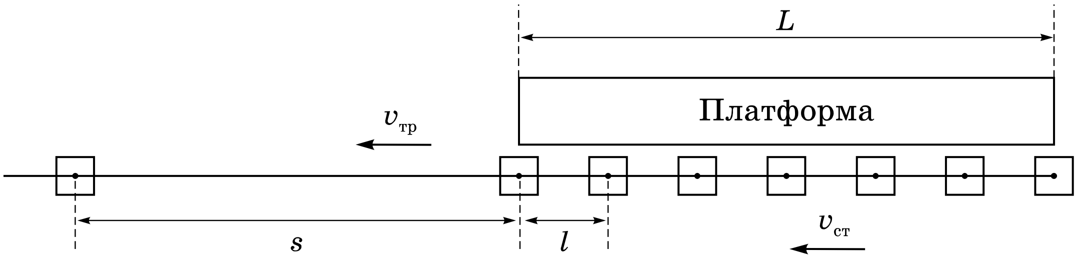
1. Канатная дорога (Кармазин С.). На горизонтальной канатной дороге есть участки (трасса), где вагончик движется со скоростью $v_{тр}$ относительно земли, и станции с платформами, вдоль которых вагончик движется медленее со скоростью $v_{ст} < v_{тр}$ (см. рисунок, вид сверху). Переключение скоростей происходит мгновенно, когда вагончик находится точно над краем платформы.



На станции всегда скорость изменяется у двух вагончиков одновременно, и в этот момент между ними находятся еще 5 вагончиков. Между соседними вагончиками на станции сохраняется равное расстояние $l = 6$ м. Время медленного движения вагончика вдоль станции от одного края платформы до другого равно $\tau = 2$ мин. Расстояние между вагончиками на трассе $s =$ 40 м, размерами самих вагончиков можете пренебречь.

1) Найдите длину L платформы.
2) Чему равна скорость $v_{ст}$ движения вагончиков на станции?
3) Чему равна скорость $v_{тр}$ движения вагончиков на трассе?

Возможное решение

Так как на станции образуется ровно $k = 6$ интервалов между вагончиками, то длина платформы $L = kl = 36$ м.

Скорость $v_{ст} = \frac{L}{\tau} = \frac{36}{120} = 0{,}3\ \frac{м}{с}$

Рассмотрим момент времени, когда вагончик покидает платформу, за время t он переместится по трассе на расстояние $s = 40$ м. За такое же время к краю платформы приедет новый вагончик, находящийся на станции. Тогда

$$t = \frac{l}{v_{ст}} = \frac{l\tau}{L} = \frac{6 \cdot 120}{36} = 20\ с.$$

Следовательно, скорость вагончиков на трассе $v_{тр} = \frac{s}{t} = \frac{40}{20} = 2\frac{м}{с}$.

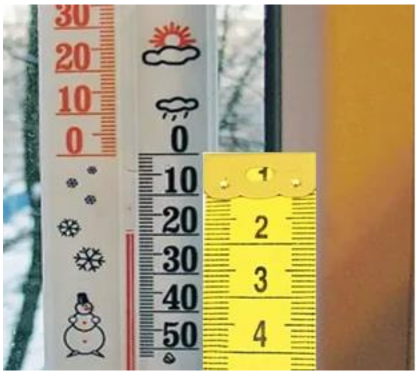
Критерии оценивания

№	**критерий**	**баллы**
1.	Верно найдена длина платформы L	2
2.	Использована формула, связывающая скорость, путь и время	2
3.	Правильно найдена скорость $v_{ст}$	2
4.	В решении используется связь времени t движения вагончиков по трассе и по платформе.	2
5.	Правильно найдена скорость $v_{тр}$	2
итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Метеосводка (Бабинцев В.). Семиклассник Артём из Долгопрудного решил узнать, на сколько миллиметров отличаются сейчас высоты столбиков термометров у него и его товарища из Великого Устюга. Согласно метеосводке, в Великом Устюге установилась температура воздуха –37 °C. Для этого он приложил конец измерительной ленты к шкале своего термометра. Помогите Артёму сделать нужные расчёты, зная, что термометры Артёма и его товарища одинаковые.



Возможное решение

В Долгопрудном температура воздуха равна $t_0 = -20℃$.

Разница температур воздуха в Долгопрудном и Великом Устюге $t - t_0 = 17℃$

Длина шкалы, соответствующая изменению температуры 50℃ равна 40 мм.

Длина одного деления шкалы термометра равна $\frac{40\text{ мм}}{50℃} = 0{,}8\ \frac{\text{мм}}{℃}$

Разность длин столбиков термометров равна $17℃ \cdot 0{,}8\ \frac{\text{мм}}{℃} = 13{,}6$ мм

Критерии оценивания 1

№	критерий	баллы
1.	Верно определена температура воздуха в Долгопрудном	2
2.	Верно определена разница температур воздуха в Долгопрудном и Великом Устюге	2
3.	Верно определена длина шкалы, соответствующая изменению температуры 50℃	3
4.	Верно определена длина одного деления шкал термометра	2
5.	Верно определена разность длин столбиков термометров	1
итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом.

Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

Из-за неоднозначности трактовки рисунка, для методов решения, отличных от авторского используйте следующие критерии

Критерии оценивания 2

№	критерий	баллы
1.	Верно определена температура воздуха в Долгопрудном	2
2.	Верно определена разница температур воздуха в Долгопрудном и Великом Устюге	2
3.	Верно найдено какое расстояние в миллиметрах укладывается в выбранную участником разницу температур	3
4.	Правильно определена длина одного деления шкал термометра (может отличаться от авторского значения, необходимо смотреть корректность вычислений в работе участника)	2
5.	Верно определена разность длин столбиков термометров (может отличаться от авторского значения, необходимо смотреть корректность вычислений в работе участника)	1
итого:		**10**

3. **Единицы измерения бывают разные (Сеитов А.).** Экран ноутбука пользователя, размеры которого 345×194 мм, имеет разрешение 1920×1080 пикселей. Пользователь использует мышь с DPI(*) равным 800 пикселей. Выделяя часть одной строки текста, пользователь равномерно и прямолинейно перемещает мышь со скоростью 0,06 фута в микронеделю. Определите с точностью до трёх значащих цифр(**):

1) DPI мыши пользователя в дюймах;
2) скорость перемещения мыши 0,06 фут/микронеделя в дюйм/с;
3) скорость перемещения указателя мыши по экрану во время выделения текста пользователем в м/с;
4) скорость перемещения указателя мыши по экрану во время выделения текста пользователем в км/ч.

(*) DPI компьютерной мышки показывает сколько пикселей на экране компьютера преодолеет указатель мыши, когда мышь пользователем перемещается на один дюйм. 1 дюйм = $\frac{1}{12}$ фута = = 2,54 см.
(**) Примеры чисел с тремя значащими цифрами:

123; 12,3; 1,23; 0,123; 0,0123; 0,00123.

Возможное решение

Известно, что промежуточные вычисления с округлениями могут понизить точность ответа. В этой задаче округление ответа на поставленный вопрос до трёх значащих цифр не приводит к понижению точности ответа на следующие вопросы.

1) Т.к. пользователь выделяет часть строки, определим размер одного пикселя в дюймах, используя параметры ширины экрана:

$$1 \text{ пиксель} = \frac{345 \text{ мм}}{1920} = \frac{34{,}5 \text{ см}}{1920} = \frac{34{,}5 \cdot \frac{1}{2{,}54} \text{ дюйм}}{1920} = \frac{34{,}5}{2{,}54 \cdot 1920} \text{ дюйм}.$$

Тогда DPI мыши:

$$800 \text{ пикселей} = 800 \cdot \frac{34{,}5}{2{,}54 \cdot 1920} \text{ дюйм} \approx 5{,}66 \text{ дюйм}.$$

2) Переведём скорость движения мыши в дюйм/с:

$$\upsilon_{\text{мыши}} = 0{,}06 \ \frac{\text{фут}}{\text{микронеделя}} = \frac{0{,}06 \text{ фут}}{1 \text{ микронеделя}} = \frac{0{,}06 \cdot 12 \text{ дюйм}}{1 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 1{,}19 \ \frac{\text{дюйм}}{\text{с}}.$$

3) Т.к. известно сколько пикселей на экране компьютера преодолеет указатель мыши, когда мышь пользователем перемещается на один дюйм, используем интервал времени для $l_{\text{мыши}} = 1$ дюйм:

$$\upsilon_{\text{указателя}} = \frac{l_{\text{указателя}}}{t} = \frac{l_{\text{указателя}}}{\frac{l_{\text{мыши}}}{\upsilon_{\text{мыши}}}} = \frac{l_{\text{указателя}} \cdot \upsilon_{\text{мыши}}}{l_{\text{мыши}}};$$

$$\upsilon_{\text{указателя}} = \frac{5{,}66 \text{ дюйм} \cdot 1{,}19 \frac{\text{дюйм}}{\text{с}}}{1 \text{ дюйм}} = 6{,}7354 \ \frac{\text{дюйм}}{\text{с}} = 6{,}7354 \cdot \frac{0{,}0254 \text{ м}}{1 \text{ с}} \approx 0{,}171 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4) Переведём скорость указателя в км/ч:

$$1 \ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}6 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Тогда:

$$\upsilon_{\text{указателя}} = 0{,}171 \ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0{,}171 \cdot 3{,}6 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 0{,}616 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии оценивания

№	**критерий**	**баллы**
1	DPI мыши пользователя в дюймах	
1.1	Есть обоснование выбора горизонтальных параметров экрана.	1
1.2	Приведены верные промежуточные действия.	1

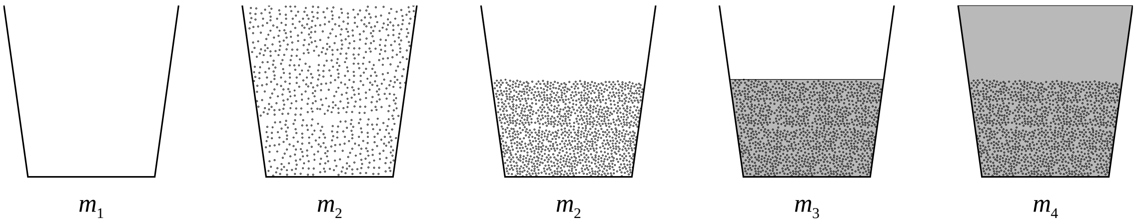
1.3	Получен верный ответ 5,66 дюйма.	1
2	Скорость перемещения мыши в дюйм/с	
2.1	Приведены верные промежуточные действия.	1
2.2	Получен верный ответ 1,19 дюйма/с.	1
3	Скорость перемещения указателя мыши по экрану в м/с	
3.1	Есть в любом виде верная формула равномерного движения.	1
3.2	Приведены верные промежуточные действия либо в общем виде, либо с числовыми значениями.	1
3.3	Получен верный ответ 0,171 м/с.	1
4	DPI мыши пользователя в дюймах	
4.1	Приведены верные промежуточные действия.	1
4.2	Получен верный ответ 0,616 км/ч.	1
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Утрамбовали (Рубцов Д.). В пустой стакан объемом $V_0 = 200$ см^3 и массой $m_1 = 20$ г насыпали доверху песок и поставили на весы (см. рисунок). Масса стакана с песком составила $m_2 = 336$ г. Затем песок хорошо утрамбовали и залили водой плотностью $\rho_0 = 1{,}0\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ так, что все полости между песчинками заполнились жидкостью. При этом высота утрамбованного песка осталась прежней, и верхние границы воды и песка совпали. Сами песчинки воду не впитывали. Новые показания весов выросли до $m_3 = 412$ г. После этого в стакан долили доверху воду и снова измерили массу. Весы показали $m_4 = 425$ г.

По известным данным определите:



1. насыпную плотность ρ_1 неутрамбованного песка;
2. насыпную плотность ρ_2 утрамбованного песка;
3. отношение β объема пустот к полному объему утрамбованного песка;
4. плотность ρ песчинок.

Возможное решение

Масса песка (утрамбованного, неутрамбованного или просто песчинок) равна $m = m_2 - m_1 = 316$ г.

Насыпная плотность неутрамбованного песка – это отношение его массы к объему (включая объем пустот между песчинками) $\rho_1 = \frac{m_2 - m_1}{V_0.} = 1{,}58\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Объем, на который уменьшился песок, равен объему последней порции долитой воды $\frac{m_4 - m_3}{\rho_0}$.

Следовательно объем, занимаемый утрамбованным песком, $V_1 = V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}$.

Итак, $\rho_2 = \frac{m_2 - m_1}{V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}} = 1{,}69\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Объем пустот в утрамбованном песке равен объему воды, которую изначально залили в утрамбованный песок: $V_2 = \frac{m_3 - m_2}{\rho_0}$.

Искомое отношение $\beta = \frac{V_2}{V_1} = \frac{m_3 - m_2}{\left(V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}\right)\rho_0} = 0{,}41.$

Объем самих песчинок можно найти как разность объема стакана и суммарного объема налитой воды $V_{\text{песчинок}} = V_0 - \frac{m_4 - m_2}{\rho_0}$.

Плотность песчинок $\rho = \frac{m_2 - m_1}{V_0 - \frac{m_4 - m_2}{\rho_0}} = 2{,}85\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Критерии оценивания

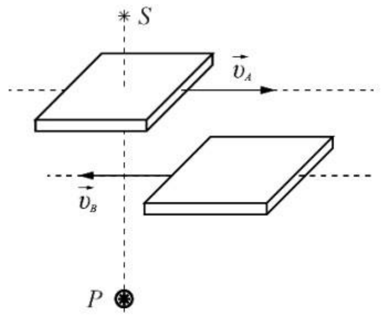
№	**критерий**	**баллы**
1	Найдена масса песка (есть формула $m_2 - m_1$ или число 316 г)	1,0
2	Выражение для плотности неутрамбованного песка $\rho_1 = \frac{m_2 - m_1}{V_0.}$	1,0
3	Численное значение для плотности неутрамбованного песка $\rho_1 = 1{,}58\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	0,5

4	Найден (возможно, в неявном виде) объем, на который уменьшился объем песка, или объем утрамбованного песка (формула или число)	1,0
5	Выражение для плотности утрамбованного песка $\rho_2 = \frac{m_2 - m_1}{V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}}$	1,0
6	Численное значение для плотности утрамбованного песка $\rho_2 = 1{,}69\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	0,5
7	Найден объем пустот (возможно, в неявном виде; формула или число)	1,0
8	Выражение для «коэффициента «пустотности» $\beta = \frac{m_3 - m_2}{\left(V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}\right)\rho_0}$	1,0
9	Численное значение для «коэффициента «пустотности» $\beta = 0{,}41$	0,5
10	Найден объем песчинок (возможно, в неявном виде; формула или число)	1,0
11	Выражение для плотности песчинок $\rho = \frac{m_2 - m_1}{V_0 - \frac{m_4 - m_2}{\rho_0}}$	1,0
12	Численное значение для плотности песчинок $\rho = 2{,}85\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	0,5
итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. Подвижные препятствия 2 (Евсеев А.). Между источником сигнала и приемником перпендикулярно прямой, соединяющей их, запустили навстречу друг другу с постоянными скоростями v_{A} и v_B соответственно пластины A и B. Если сигнал по пути от источника к приемнику проходит через одну из пластин, приемник зажигает на дисплее желтую лампочку, если через обе – красную.



В одном из экспериментов в момент прохождения пластин мимо источника загоралась только красная лампочка.
Известно, что мимо покоящейся пластины B пластина A, двигающаяся со скоростью v_{A}, проходит за время $t_1 = 12$ сек, а пластина B, двигающаяся со скоростью v_B, мимо покоящейся пластины A проходит за время $t_2 = 8$ сек.

1. Какая из пластин A или B длиннее и во сколько раз?
2. В течение какого времени t на дисплее горела красная лампочка?

Возможное решение
Обозначим длины пластин l_A и l_B. Обе пластины проходят мимо источника за время t. Значит:
$$l_A = v_A t \qquad l_B = v_B t$$
Откуда:
$$\frac{l_B}{l_A} = \frac{v_B}{v_A}$$
С другой стороны:
$$l_A + l_B = v_A t_1 \qquad l_A + l_B = v_B t_2$$
Откуда:
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{2}{3} \qquad l_B = \frac{t_1}{t_2} l_A = 1{,}5 l_A$$
Значит, с учетом ранее выведенного отношения по длинам, пластина B длиннее, чем пластина A в 1,5 раза. С учетом этого:
$$l_A + \frac{t_1}{t_2} l_A = v_A t_1$$
Поделив обе части на v_A, получим:
$$t + \frac{t_1}{t_2} t = t_1$$
Откуда:
$$t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 4{,}8 \text{ сек.}$$

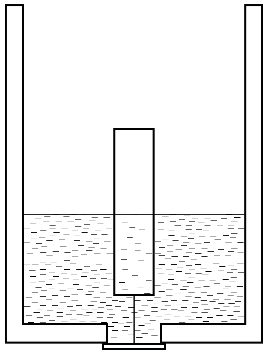
Критерии оценивания

№	критерий	баллы
1.	Указано или используется при решении, что длина пластины A: $l_A = v_A t$	1
2.	Указано или используется при решении, что длина пластины B: $l_B = v_B t$	1
3.	Получено соотношение $l_A + l_B = v_A t_1$, или аналогичное верное выражение	1
4.	Получено соотношение $l_A + l_B = v_B t_2$, или аналогичное верное выражение	1
5.	Получено отношение скоростей	1
6.	Получено, что пластина B длиннее, чем пластина A в 1,5 раза	1,5
7.	Получено выражение $t + \frac{t_1}{t_2} t = t_1$ или другое верное выражение, связывающее t с t_1 и t_2	1

8.	Получено выражение для t: $t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$	1
9.	Получен верный численный ответ $t = 4{,}8$ сек	1,5
итого:		**10**

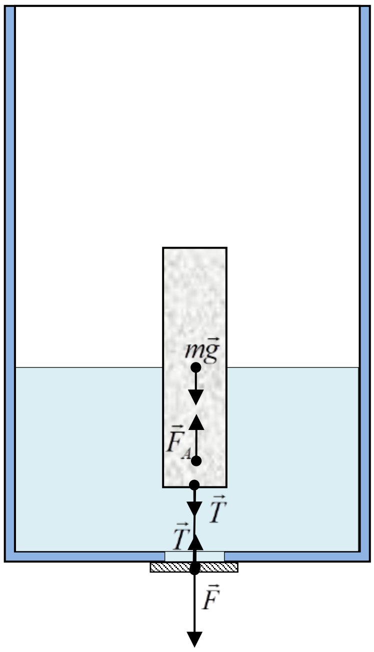
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.



2. Дырявое хранилище (Курносов В.). В цилиндрическом сосуде высотой L = 0,7 м и площадью дна $S_д$ = 100 см^2 в центре дна есть круглое отверстие площадью S_0 = 2,5 см^2. Для хранения в этом сосуде воды придумали устройство-поплавок, закрывающее отверстие. Невесомая круглая пластина чуть большего размера, чем отверстие, прижата снизу ко дну сосуда, и нитью длиной l = 5 см привязана к пенопластовому поплавку. Поплавок длиной $l_п$ = 10 см и площадью сечения $S_п$ = 20 см^2 помещен в сосуд (см. рисунок). В сосуд, удерживая поплавок, налили воду, и поплавок оказался погруженным наполовину. После того, как поплавок отпустили, вода вытекать не стала. На сколько допустимо изменить объём воды в сосуде, чтобы она не вытекала? Плотность пенопласта $\rho_п$ = 200 кг/м^3, ρ_0 = воды 1000 кг/м^3.

Возможное решение



1. Вода действует на пластину силой давления $\vec{F}$

$F = \rho_0 g S_0(\ell + \ell_{ПЧТ})$

Где $\ell_{ПЧТ}$ длина погруженной части поплавка, а ℓ длина нити, S_0 площадь отверстия в дне сосуда.

2. Если уровень воды в сосуде понизить, то сила Архимеда уменьшится, натяжение нити уменьшится, и вода начнет вытекать. В критическом состоянии можем записать условие равновесия пластины:

$F = F_A - mg$ или

$\rho_0 g S_0(\ell + \ell_{ПЧТ}) = \rho_0 g S_П \ell_{ПЧТ} - \rho_П g S_П \ell_П$ откуда

$$\ell_{ПЧТ} = \frac{\rho_0 S_0 \ell + \rho_П S_П \ell_П}{\rho_0(S_П - S_0)}$$

Подставляя числовые значения, получим $\ell_{ПЧТ} = 3\ см$

3. Допустимая убыль объема воды:

$$\Delta V_{УБ} = (S_Д - S_П)(\frac{\ell_П}{2} - \ell_{ПЧТ})$$

4. Подставляя числовые значения, получим

$\Delta V_{УБ} = 160$ см^3.

5. Однако, если воду доливать в сосуд, то сила Архимеда перестанет расти после полного погружения поплавка, а сила давления продолжит расти. При некотором значении h воды в сосуде, она начнет вытекать.

Новое условие равновесия можем записать:

$F_2 = F_A - mg$

$\rho_0 g S_0 h = (\rho_0 - \rho_П) g S_П \ell_П$

Откуда найдем h.

$$h = \frac{(\rho_0 - \rho_П) S_П \ell_П}{\rho_0 S_0}$$

Подставляя числовые значения, получим $h = 64\,\text{см}$

6. Найдем допустимый объем для доливания воды:

$$\Delta V_{max} = (S_Д - S_П)\frac{l_П}{2} + S_Д(h - l_П - l)$$

7. Подставляя числовые значения, получим ΔV_{max} = 5300 см^3.
В итоге: объем воды можно или уменьшить на $\Delta V_{УБ} = 160$ см^3.

Или увеличить на:
ΔV_{max} = 5300 см^3

Критерии оценивания

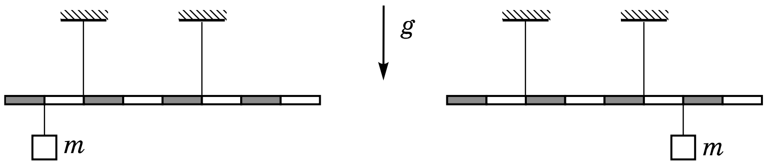
№	**критерий**	**баллы**
1	Сделан рисунок с изображенными силами, действующими на поплавок и на пластину. Если указаны не все необходимые силы, то не оценивать.	1
2	Записано выражение для силы давления на пластину со стороны воды в виде формулы, или в ином виде.	1
3	Записано условие равновесия поплавка для случая уменьшения объема воды в виде формулы, или в ином виде	2
4	Записано выражение для нахождения объема воды, допустимого для выливания. В виде формулы, или в ином виде.	1
5	Получен правильный численный ответ для уменьшения объема воды. (160 см3)	1
6	Записано условие равновесия поплавка для случая увеличения объема воды в виде формулы, или в ином виде	2
7	Записано выражение для нахождения объема воды, допустимого для увеличения объема. В виде формулы, или в ином виде.	1
8	Получен правильный численный ответ для увеличения объема воды. (5300 см3)	1
	Итого:	10

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Перенос массы (Вергунов А.). Небольшой груз, подвешенный к однородной доске, перенесли слева направо (как показано на рисунке). При этом сила натяжения одной из нитей увеличилась на ΔT = 15 Н.

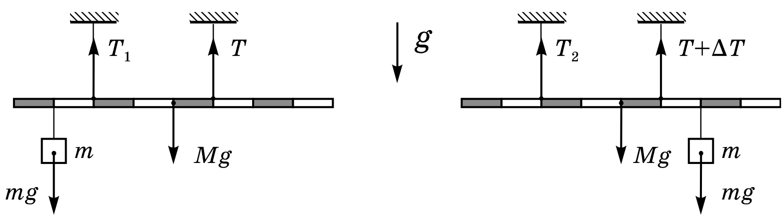
1. Сила натяжения какой из нитей увеличилась?
2. Определите массу грузика m.
3. При какой массе M доски все нити будут оставаться натянутыми независимо от места крепления груза массой m?



Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Все необходимые расстояния можете взять из рисунка.

Возможное решение

При переносе грузика слева направо увеличится сила натяжения правой нити. Расставим силы, действующие на систему в обоих случаях:



Чтобы исключить из уравнений силу натяжения левой нити, запишем правило моментов относительно точки крепления левой нити для обоих случаев. Для первого:

$$T3l + mgl = Mg2l.$$

Для второго:

$$(T + \Delta T)3l = Mg2l + mg4l.$$

Сократим l и вычтем из второго уравнения первое:

$$3\Delta T - mg = 4mg;$$

$$m = 3\Delta T/(5g) = 0{,}9 \text{ кг}.$$

Если подвесить груз на левый край доски может провиснуть правая нить. Запишем правило моментов относительно точки крепления левой нити, предположив, что правая нить провисла:

$$mg2l = Mg2l;$$

$$M = m.$$

То есть правая нить не будет провисать при массе доски $M > m$.

Если подвесить груз на правый край доски, то может провиснуть левая нить. Запишем правило моментов относительно правой нити, предположив, что левая нить провисла:

$$Mgl = mg3L;$$

$$M = 3m.$$

То есть левая нить не будет провисать при массе доски $M > 3m$. Тогда при $M > 2{,}7$ кг никакая нить не будет провисать.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	В решении указано, что увеличится сила натяжения правой нити	1
2	На рисунке правильно расставлены силы, действующие на систему в первом случае	1
3	На рисунке правильно расставлены силы, действующие на систему во втором случае	1
4	Правильно записано правило моментов для сил, действующих на доску в первом случае	1
5	Правильно записано правило моментов для сил, действующих на доску во втором случае	1
6	Получен правильный ответ для m	2
7	Рассмотрен случай провисания правой нити и найдена критическая масса доски M	1
8	Рассмотрен случай провисания левой нити и найдена критическая масса доски M	1
9	Правильно определена масса доски при которой никакая нить не будет провисать (M > 2,7 кг)	1
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Холодный чай (Вергунов А.). Калориметр объёмом V_0 = 200 мл наполовину заполнен водой температурой t = 90 °C. В калориметр добавляют колотый лёд температурой $t_л$ = 0 °C. Какой минимальной температуры содержимого калориметра можно добиться при условии, что никакая жидкость из него не выливалась. Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг °C), удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, плотность воды ρ = 1000 кг/м^3. Теплоёмкостью калориметра пренебречь.

Возможное решение

При добавлении льда и последующем его таянии уровень жидкости в сосуде не будет изменяться. Так как по условию вода (в том числе талая) из сосуда не выливалась, то максимальный объём талой воды V = 100 мл, тогда максимальная масса добавленного льда $m_л = \rho_в V$ = 0,1 кг.

Количество теплоты, необходимое для плавления такой массы льда: $Q_1 = \lambda m_л = 330000 \cdot 0{,}1 =$ $= 33$ кДж . Количество теплоты, необходимое для охлаждения до нуля градусов горячей воды: $Q_2 = c_в \rho_в 0{,}5 V_0 (t - t_л)$=37,8 кДж. Следовательно, талая вода нагреется до некоторой температуры $t_к$, с учётом этого составим уравнение теплового баланса:

$$c_в \rho_в 0{,}5 V_0 (t - t_к) = \lambda m_л + c_в \rho_в 0{,}5 V_0 (t_к - t_л);$$

$$t_к \approx 5{,}7\ °\mathrm{C}.$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	В решении указано что при таянии льда уровень жидкости остаётся постоянным	1
2	Верно найдена максимальная масса добавленного льда	1
3	Проведён анализ или сделано предположение о конечном состоянии содержимого сосуда	2
4	Использована формула количества теплоты при плавлении льда	1
5	Использована формула для расчёта количества теплоты при изменении температуры	1
6	Составлено правильное уравнение теплового баланса	2
7	Верно найдена конечная температура	2
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. Петля времени (Клепиков М.). Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми s, выехали два автомобиля: первый начал движение из состояния покоя с постоянным ускорением, второй, имея начальную скорость v, тормозил с постоянным ускорением так, что к концу пути в пункте B полностью остановился. На встречу им из пункта B одновременно выехал третий автомобиль, имея неизвестную постоянную скорость u. Он закончил свое движение в пункте A одновременно с тем, как первые два автомобиля прибыли в пункт B.

1. Какую скорость v_1 имел первый автомобиль в конце своего пути?
2. С какой скоростью u двигался третий автомобиль?
3. Сколько прошло времени между встречами третьим автомобилем первого и второго?

Возможное решение

Первый и второй автомобиль закончили свое движение одновременно, преодолев одинаковое расстояние. Первый:

$$s = \frac{a_1 t^2}{2},$$

второй:

$$s = vt - \frac{a_2 t^2}{2},$$

кроме этого

$$t = \frac{v}{a_2} \Longrightarrow v = a_2 t,$$

значит

$$s = a_2 t^2 - \frac{a_2 t^2}{2} = \frac{a_2 t^2}{2},$$

откуда следует, что

$$a_1 = a_2 \equiv a.$$

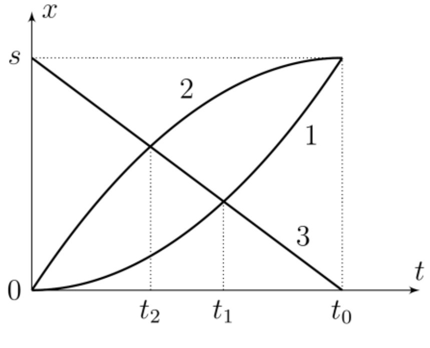
Можем сделать вывод, что, двигаясь с одинаковыми по модулю ускорениями, первый и второй автомобиль за все время движения изменили свою скорость на одинаковую по модулю величину v, значит

$$v_1 = v.$$

Третий автомобиль преодолел это же расстояние с постоянной скоростью u за то же время, что и другие два:

$$u = \frac{s}{t} = \frac{at^2}{2t} = \frac{v}{2}.$$

Для наглядности представим графики зависимости координаты от времени для всех участников движения



Найдем момент времени, когда третий автомобиль встретил первый:

$$s - ut_1 = \frac{at_1^2}{2}.$$

Ускорение выразим через изменение квадрата скорости («формула без времени»):

$$v^2 - 0^2 = 2as, \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}.$$

Подставим это в предыдущее уравнение:

$$s - \frac{v}{2}t_1 = \frac{v^2 t_1^2}{4s}.$$

Решим это уравнение относительно t_1 и найдем момент времени встречи первого и третьего автомобилей:

$$t_1 = \frac{-\frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + 2as}}{a}.$$

Подставим выражение для ускорения и в итоге получим ответ:

$$t_1 = \frac{s}{v}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Использован положительный корень уравнения.
Аналогично приравняем уравнения движения второго и третьего автомобиля.

$$s - \frac{v}{2}t_2 = vt_2 - \frac{at_2^2}{2}.$$

Решим квадратное уравнение и подставим выражение для ускорения. Получим

$$t_2 = \frac{s}{v}\left(3 \pm \sqrt{5}\right).$$

Для сравнения найдем общее время движения третьего автомобиля:

$$t_0 = \frac{2s}{v}.$$

Заметим, что время t_2 гарантированно меньше общего времени движения, поэтому возьмем только один корень:

$$t_2 = \frac{s}{v}\left(3 - \sqrt{5}\right).$$

Искомое время между встречами:

$$t = t_1 - t_2 = \frac{s}{v}\left(\sqrt{5} - 1\right) - \frac{s}{v}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

Или

$$t = \frac{2s}{v}\left(\sqrt{5} - 2\right).$$

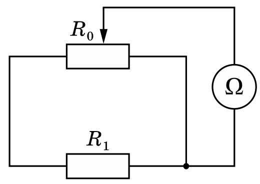
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Обоснованное утверждение равенства ускорений первых двух автомобилей.	1
2	$v_1 = v$, получено из равенства ускорений и времени движения.	1
3	Найдена скорость третьего автомобиля $u = \frac{v}{2}$.	1
4	Уравнение зависимости координаты первого (или второго) тела от времени.	1
5	Уравнение зависимости координаты третьего тела от времени.	1
6	Найден один из моментов встречи $\frac{s}{v}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ или $\frac{s}{v}\left(3 - \sqrt{5}\right)$	2
7	Найдено общее время движения $t_0 = \frac{2s}{v}$	1

8	Найдет второй момент встречи. Допускается находить его, ссылаясь на симметрию ситуации.	1
9	Итоговое выражение для промежутка времени $t = \frac{2s}{v}\left(\sqrt{5} - 2\right)$	1
Итого:		**10**

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. МО от МЮ (Замятнин М., Вергунов А.). Определите показания омметра в цепи (см. рисунок) если сопротивление резистора R_1 = 30 кОм, полное сопротивление потенциометра R_0 = 20 кОм, а ползунок потенциометра расположен так, что показания омметра максимальны.



Возможное решение

Выясним при каком положении ползунка потенциометра показания омметра будут максимальны. Пусть ползунок делит сопротивление R_0 на две части равные αR_0 и $(1-\alpha)R_0$, тогда показания омметра R_2 будут равны:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{(1-\alpha)R_0} + \frac{1}{\alpha R_0 + R_1};$$

$$R_2 = \frac{(\alpha R_0 + R_1)(1-\alpha)R_0}{R_0 + R_1};$$

$$R_2 = \frac{-\alpha^2 R_0^2 + \alpha(R_0^2 - R_0 R_1) + R_0 R_1}{R_0 + R_1}.$$

В числителе выражения получилось квадратное уравнение на α, графиком такой зависимости будет являться парабола с ветвями вниз. Значит максимум этой зависимости можно найти по вершине параболы.

$$\alpha_{\text{вершины}} = \frac{(R_0^2 - R_0 R_1)}{2R_0^2} = \frac{R_0 - R_1}{2R_0} = -0{,}25.$$

Такой результат означает, что вершина параболы находится в отрицательной области α, а значит при $\alpha > 0$ R_2 всегда убывает. Тогда максимум показаний омметра достигается при крайнем левом положении ползунка реостата.

$$R_{2\max} = \frac{R_1 R_0}{R_0 + R_1} = 12 \text{ кОм}.$$

Критерии оценивания

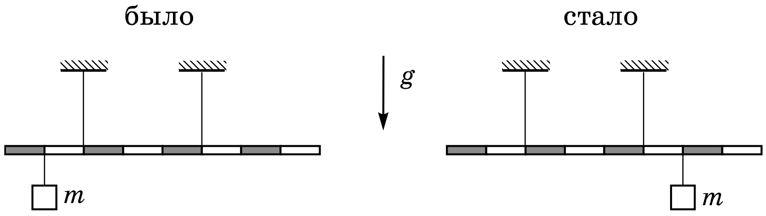
№	**Критерий**	**Балл**
1	Использована формула для параллельного соединения резисторов или аналогичные верные формулы	1
2	Получена верная формула, связывающая показания омметра с положением ползунка потенциометра	1
3	Выражение приведено к квадратичной зависимости	2
4	Правильно найден максимум квадратичной зависимости	2
5	Сделан вывод о том, что показания омметра всегда убывают	2
6	Найдены максимальные показания омметра	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Перенос массы (Вергунов А.). Небольшой груз, подвешенный к однородной доске, перенесли слева направо (как показано на рисунке). При этом сила натяжения одной из нитей увеличилась на ΔT = 15 Н.

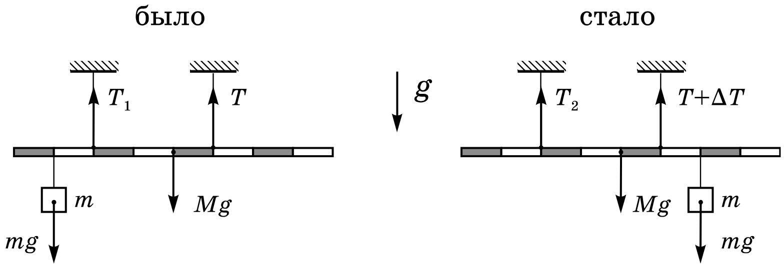
1. Сила натяжения какой из нитей увеличилась?
2. Определите массу грузика m.
3. При какой массе M доски все нити будут оставаться натянутыми независимо от места крепления груза массой m?



Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Все необходимые расстояния можете взять из рисунка.

Возможное решение

При переносе грузика слева направо увеличится сила натяжения правой нити. Расставим силы, действующие на систему в обоих случаях:



Чтобы исключить из уравнений силу натяжения левой нити, запишем правило моментов относительно точки крепления левой нити для обоих случаев. Для первого:

$$T3l + mgl = Mg2l.$$

Для второго:

$$(T + \Delta T)3l = Mg2l + mg4l.$$

Сократим l и вычтем из второго уравнения первое:

$$3\Delta T - mg = 4mg;$$

$$m = 3\Delta T/(5g) = 0{,}9 \text{ кг}.$$

Если подвесить груз на левый край доски может провиснуть правая нить. Запишем правило моментов относительно точки крепления левой нити, предположив, что правая нить провисла:

$$mg2l = Mg2l;$$

$$M = m.$$

То есть правая нить не будет провисать при массе доски $M > m$.

Если подвесить груз на правый край доски, то может провиснуть левая нить. Запишем правило моментов относительно правой нити, предположив, что левая нить провисла:

$$Mgl = mg3L;$$

$$M = 3m.$$

То есть левая нить не будет провисать при массе доски $M > 3m$. Тогда при $M > 2{,}7$ кг никакая нить не будет провисать.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	В решении указано, что увеличится сила натяжения правой нити	1
2	На рисунке правильно расставлены силы, действующие на систему в первом случае	1
3	На рисунке правильно расставлены силы, действующие на систему во втором случае	1
4	Правильно записано правило моментов для сил, действующих на доску в первом случае	1
5	Правильно записано правило моментов для сил, действующих на доску во втором случае	1
6	Получен правильный ответ для m	2
7	Рассмотрен случай провисания правой нити и найдена критическая масса доски M	1
8	Рассмотрен случай провисания левой нити и найдена критическая масса доски M	1
9	Правильно определена масса доски при которой никакая нить не будет провисать ($M > 2{,}7$ кг)	1
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Холодный чай (Вергунов А.). Калориметр объёмом V_0 = 200 мл наполовину заполнен водой температурой t = 90 °C. В калориметр добавляют колотый лёд температурой $t_л$ = 0 °C. Какой минимальной температуры содержимого калориметра можно добиться при условии, что вода из него не выливалась. Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг °C), удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, плотность воды ρ = 1000 кг/м^3. Теплоёмкостью калориметра пренебречь.

Возможное решение

При добавлении льда и последующем его таянии уровень жидкости в сосуде не будет изменяться. Так как по условию вода (в том числе талая) из сосуда не выливалась, то максимальный объём талой воды V = 100 мл, тогда максимальная масса добавленного льда $m_л = \rho_в V$ = 0,1 кг.

Количество теплоты необходимое для плавления такой массы льда: $Q_1 = \lambda m_л = 330000 \cdot 0{,}1 =$ $= 33$ кДж . Количество теплоты, необходимое для охлаждения до нуля градусов горячей воды: $Q_2 = c_в\rho_в 0{,}5V_0(t - t_л)$=37,8 кДж. Следовательно талая вода нагреется до некоторой температуры $t_к$, с учётом этого составим уравнение теплового баланса:

$$c_в\rho_в 0{,}5V_0(t - t_к) = \lambda m_л + c_в\rho_в 0{,}5V_0(t_к - t_л);$$

$$t_к \approx 5{,}7\ °\text{C}.$$

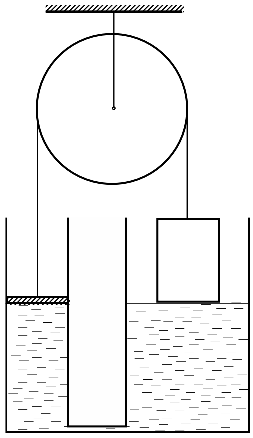
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	В решении указано что при таянии льда уровень жидкости остаётся постоянным	1
2	Верно найдена максимальная масса добавленного льда	1
3	Проведён анализ или сделано предположение о конечном состоянии содержимого сосуда	2
4	Использована формула количества теплоты при плавлении льда	1
5	Использована формула для расчёта количества теплоты при изменении температуры	1
6	Составлено правильное уравнение теплового баланса	2
7	Верно найдена конечная температура	2
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. Нагрузили (Кузнецова А.). В U-образную трубку, состоящую из двух вертикальных соединенных цилиндров с сечениями S и $3S$ налита жидкость плотностью ρ. В узкий цилиндр вставлен лёгкий поршень, который может двигаться без трения и подтекания жидкости. Поршень плотно прилегает к жидкости. От центра поршня протянута невесомая и нерастяжимая нить, которая перекинута через идеальный блок. Ко второму её концу привязан цилиндр с площадью основания S и плотностью $1{,}5\rho$. Изначально уровень воды в цилиндрах одинаковый, а груз придерживают так, чтобы он едва касался воды. Нить не провисает, видимые участки нити вертикальные.
Груз плавно отпускают. Определите, какая часть груза окажется погружённой в жидкость после установления равновесия.



Возможное решение
Заметим, что уровень воды в правом колене не изменяется при погружении цилиндра, так как площадь цилиндра и левого колена одинаковы.
Пусть давление жидкости вблизи поверхности левого колена (под поршнем) равняется p_1, а правого – $p_2 = p_0$, где p_0 – атмосферное давление. Тогда $p_2 = p_1 + \rho g h = p_0$
Пусть сила натяжения нити – T, тогда условие равновесия невесомого поршня:
$$p_0 - \frac{T}{S} = p_1$$
Подставим в это выражение $p_1 = p_0 - \rho g h$ и получим:
$$\frac{T}{S} = \rho g h$$

Условие равновесия груза:
$$T + F_{\text{А}} = mg$$
Глубина погружения груза равняется высоте подъема жидкости в левом колене h в силу того, что они соединены одной нерастяжимой нитью.
Подставляя T, получаем следующее уравнение на h:
$$\rho g h S + \rho g h S = 1{,}5\rho g H$$
Здесь H – высота грузика.
Отсюда $h = 0{,}75H$.
Ответ: Груз погружен на $\alpha = \frac{3}{4}$
Критерии оценивания

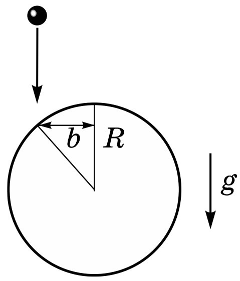
№	Критерий	Балл
1	Показано, что уровень воды в правом колене не изменяется	2
2	Записано условие равновесия поршня в левом колене или его аналог: $$p_0 - \frac{T}{S} = p_1$$	2
3	Записана связь давлений: $$p_0 = p_1 + \rho g h$$	2
4	Записано условие равновесия груза: $$T + F_{\text{А}} = mg$$	1
5	Отмечено, что груз опускается на глубину, равную высоте подъема жидкости в левом колене.	1

6	Получен ответ $h = 0{,}75H$ или $\alpha = 0{,}75$	2
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. Упал на кол (Зворыгина Е.). Маленький шарик радиусом r вертикально падает на цилиндрический колышек радиусом $R = 1$ см ($r \ll R$), главная ось симметрии цилиндра закреплена перпендикулярно скорости на высоте H = 1 м от пола. Скорость шарика перед ударом v = 6 м/с.



1) Через какое время шарик окажется на высоте 0,5 м от пола, если он ударился о колышек на расстоянии $b = \frac{\sqrt{2}R}{2}$ от вертикального поперечного сечения? (см. рисунок)
2) На каком расстоянии по горизонтали от места удара упадёт этот шарик первый раз?

Все удары считайте абсолютно упругими, трения нигде нет, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение

Из-за того, что все поверхности гладкие касательная к поверхности цилиндра компонента скорости сохранится, а нормальная изменится на противоположную.

Так как место удара шарика находится на расстоянии b от вертикального поперечного сечения, получаем угол между скоростью и нормалью к поверхности цилиндра α = 45°, это означает что шарик отскочит горизонтально с такой же по модулю скоростью v.

Тогда перемещение по вертикали $\Delta y = 0{,}5H + b = gt^2/2$, следовательно $t \approx 0{,}32$ с.

Найдём полное время T полёта шарика:

$$H + b = gT^2/2;$$
$$T \approx 0{,}45 \text{ с.}$$

Тогда дальность полёта L:

$$L = vT = 2{,}7 \text{ м.}$$

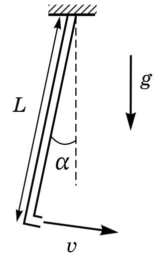
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	В решении указано, что сохраняется тангенциальная и изменяется нормальная компоненты скорости	2
2	Показано, что после удара шарик отскочит горизонтально	2
3	Найдено время t	2
4	Найдено время всего полёта T	2
5	Найдена дальность L.	2
Итого:		**10**

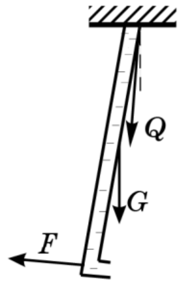
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи. В случае, если при решении пренебрегается R по сравнению с H, необходимо оценивать полным баллом.

2. Душ (Рубцов Д.). Легкая полая труба длиной L с изогнутым под прямым углом концом висит на шарнирном подвесе. Через нее течет вода со скоростью v. Под каким углом к вертикали располагается труба в состоянии устойчивого равновесия? Для каких скоростей существует такое устойчивое равновесие? Трения нет, ускорение свободного падения g.



Возможное решение



По II закону Ньютона в импульсной форме, реактивная сила $F = \frac{\Delta m}{\Delta t} v = \rho S v^2$.

Правило моментов относительно шарнирного подвеса $\rho \frac{L}{2} S g \sin \alpha = \rho S v^2$. Значит $\sin \alpha = \frac{2v^2}{gL}$.

Так как синус всегда меньше единицы, то устойчивое равновесие справедливо лишь для $v \leq \sqrt{\frac{gL}{2}}$.

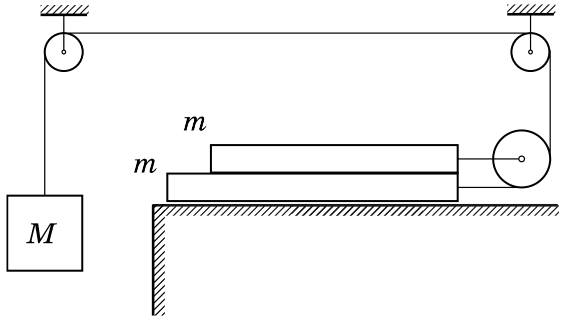
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	II закон Ньютона в импульсной форме	3
2	Правило моментов относительно шарнирного подвеса	3
3	Найден угол α или тригонометрическая функция, позволяющая вычислить α	2
4	Верно найдено условие устойчивости равновесия	2
Итого:		**10**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Начало скольжения (Жигар А.). В системе, изображенной на рисунке, блоки невесомые, трения в осях блоков нет, нити невесомые и нерастяжимые. Нижний блок жестко прикреплен к верхнему бруску. Коэффициенты трения между брусками и между нижним бруском и столом равны $\mu = 0{,}2$. Массы брусков равны m, а их длины заметно больше их высот. Считая, что бруски не отрываются от горизонтальных поверхностей, найдите:



1) При какой минимальной массе груза M, он начнет двигаться?

2) При какой минимальной массе M оба бруска придут в движение?

Возможное решение

1) Будем рассматривать верхний брусок и прикрепленный к нему блок как единое целое.
Запишем законы Ньютона для брусков:
Для верхнего бруска $T - F_{\text{тр}1} = 0$;
Для нижнего бруска $T - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = 0$.
Значит при увеличении массы M от нуля, первым начнет двигаться верхний брусок.

2) В момент начала движения $F_{\text{тр}1} = \mu N = \mu(mg - T)$, тогда $M = \frac{\mu m}{1+\mu} = m/6$

3) При дальнейшем увеличении M, ускорения груза и верхнего бруска одинаковы до момента начала движения нижнего бруска. Нижний брусок начнет скользить, когда сила трения между нижним бруском и столом достигнет силы трения скольжения $F_{\text{тр}2} = \mu N_2$.

4) Распишем 2 закон Ньютона в проекциях на вертикальные и горизонтальные оси для трех тел:

$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ N + T - mg = 0 \\ T - \mu N = ma \\ N_2 - N - mg = 0 \\ T - \mu N - \mu N_2 = 0 \end{cases}$$

5) Решив систему, получим $M = \frac{3\mu m}{1-\mu^2} = 5m/8$.

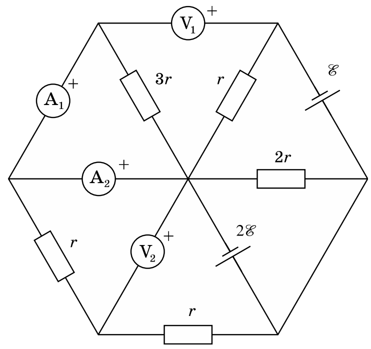
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Указано, что в первом случае проскальзывать начнёт верхний брусок	1
2	Верно найдена сила трения скольжения при проскальзывании верхнего бруска	1
3	Найдена минимальная масса M для первого случая	1
4	Записана или используется при решении кинематическая связь на равенство ускорений груза и верхнего бруска	1
5	Записано условие проскальзывания нижнего бруска $F_{\text{тр}2} = \mu N_2$	1
6	Записан второй закон Ньютона для груза	0,5
7	Записан второй закон Ньютона на горизонтальную ось для верхнего бруска	0,5
8	Записан второй закон Ньютона на горизонтальную ось для нижнего бруска	0,5
9	Записан второй закон Ньютона на вертикальную ось для нижнего бруска	0,5
10	Найдена минимальная масса M для второго случая	3
Итого:		**10**

Примечание для жюри

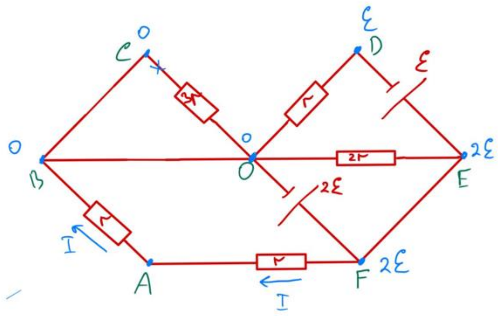
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Втекает и вытекает (Еськин М.). Определите показания идеальных приборов в цепи, схема которой изображена на рисунке. Так как приборы имеют полярность, считайте, что если ток втекает в контакт “+”, то показания амперметра положительные, если в “–”, то показания амперметра отрицательные. Для вольтметра считайте, что если потенциал у контакта “+” больше, то напряжение положительно и наоборот, если потенциал больше у контакта “–”. Сопротивление резисторов (r = 5 кОм) и ЭДС источников (ε = 5 В) указаны на схеме.



Возможное решение

Так как приборы идеальные, то можем заменить вольтметры на разрыв цепи, а амперметры на перемычки. Используя метод узловых потенциалов, расставим потенциалы в узлах.



1. Видно, что ток по резистору OC не потечет из-за равенства потенциалов. Значит не будет тока в амперметре A_1. То есть I_1=0 А.
2. Из рисунка видно, что разность потенциалов на первом вольтметре $U_1 = \varepsilon$ = 5 В. При этом больший потенциал находится у положительного контакта, а значит показания вольтметра будут положительными.
3. Ток через второй амперметр определяется токами, протекающими через узел B. По ребру BC ток не протекает, а значит ток через амперметр A_2 будет равен току I, протекающему по резистору BA. Этот ток определим из правила Кирхгофа для узлов B и F:

$$I = 2\varepsilon\ 2r = 1 \text{ мА}$$

То есть ток через амперметр A_2 будет равен I_2 = 1 мА. Но так как он втекает в отрицательный контакт амперметра, то знак тока будет “–”. Итоговый ответ: I_2= –1 мА.

4. Напряжение на вольтметре V_2 определяется как разность потенциалов между узлами OA. Зная, что $Ir = \varepsilon$, можем найти потенциал в точке A. Он будет равен ε. Значит разность потенциалов между узлами будет: $U_2 = -\varepsilon = -5$ В

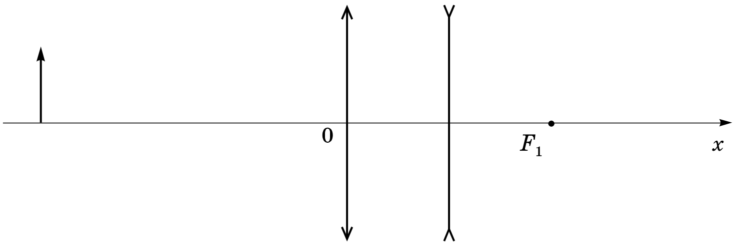
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Приборы заменены на разрыв цепи и перемычки	1
2	Расставлены потенциалы во всех возможных узлах	2
3	Определен модуль напряжения первого вольтметра U_1 = 5 В	1
4	Определено показание первого амперметра I_1 =0 А	1
5	Записано правило Кирхгофа для узлов BF	1
6	Определен модуль тока I_2 = 1 мА	1
7	В ответе верный знак тока I_2 – “–”	1
8	Определен модуль напряжения U_2 = 5 В	1
9	В ответе верный знак напряжения U_2 – “–”	1
Итого:		**10**

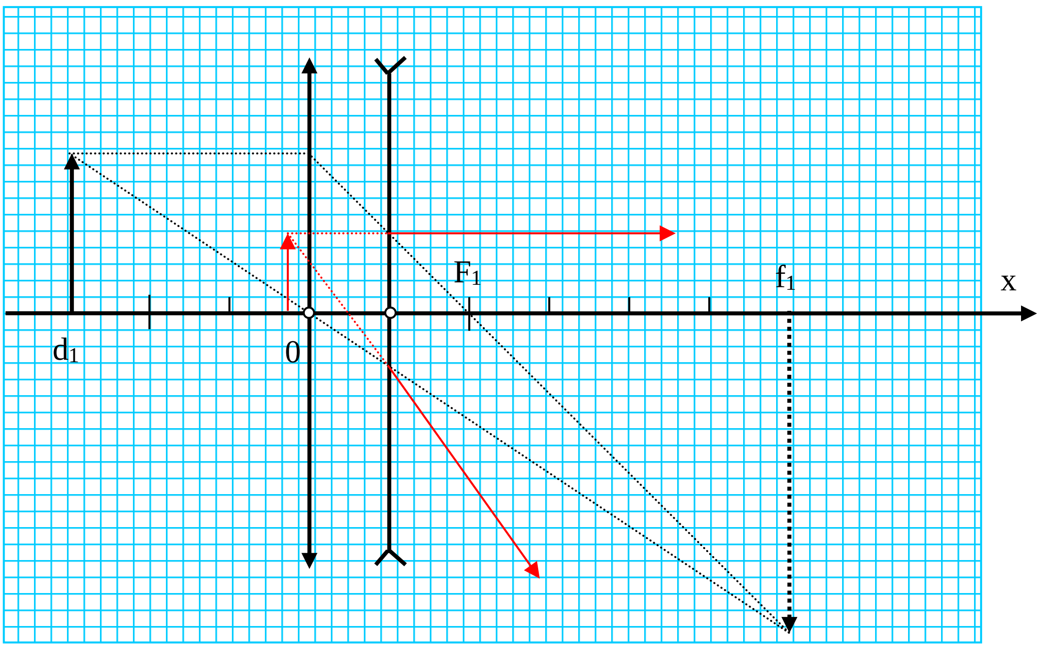
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. Система линз (Зайцев Р.). Определите координату, увеличение и вид изображения предмета в системе двух тонких линз с общей главной оптической осью. Первая линза – собирающая с фокусным расстоянием $F_1 = 2F$ и находится в начале координат. Вторая линза – рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = F$. Расстояние между линзами $S = F$. Предмет расположен перед собирающей линзой на расстоянии $3F$. Ось системы координат направим «вправо». Постройте примерный ход двух лучей при преломлении света в системе линз.



Возможное решение



Действительный предмет для первой линзы – $d_1 = 3F$. Первоначально рассчитываем положение изображения в первой линзе (действительное, увеличенное, перевернутое)

$$f_1 = \frac{3F \cdot 2F}{3F - 2F} = 6F.$$

«Предмет» (первое изображение) относительно второй линзы расположен справа, поэтому

$d_2 = -5F < 0$. «Рабочий» второй фокус – отрицательный. Рассчитываем положение второго изображения (мнимое, уменьшенное, прямое)

$$f_2 = \frac{(5F)\cdot(-F)}{5F - F} = -\frac{5}{4}F.$$

Рассчитываем первый и второй коэффициенты увеличения

$$k_1 = \frac{6F}{3F} = 2.$$

$k_2 = \frac{5F}{4 \cdot 5F} = \frac{1}{4}$.

Общий коэффициент увеличения оптической системы равен произведению коэффициентов увеличения ее составных частей.

$k = k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$.

Таким образом, изображение в оптической системе находится в отрицательной области относительно первой линзы ($-F/4 = -F_1/8$). Изображение уменьшено в два раза, является «прямым» и «мнимым». Примерный ход двух световых лучей показан на рисунке выше.

Критерии оценивания

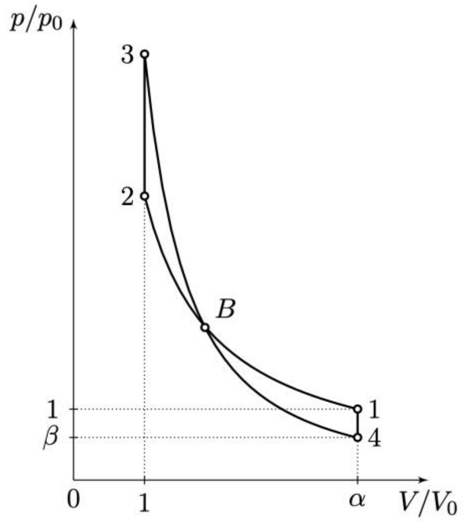
№	Критерий	Баллы
1	Первоначально рассчитываем положение изображения в первой линзе (действительное, увеличенное, перевернутое) $f_1 = \frac{3F \cdot 2F}{3F - 2F} = 6F$.	1
2	«Предмет» (первое изображение) относительно второй линзы расположен справа, поэтому $d_2 = -5F < 0$.	0,5
3	«Рабочий» второй фокус - отрицательный.	0,5
4	Рассчитываем положение второго изображения (мнимое, уменьшенное, прямое) $f_2 = \frac{(5F) \cdot (-F)}{5F - F} = -\frac{5}{4}F$.	1
5	Рассчитываем первый коэффициент увеличения $k_1 = \frac{6F}{3F} = 2$.	0,5
6	Рассчитываем второй коэффициент увеличения $k_2 = \frac{5F}{4 \cdot 5F} = \frac{1}{4}$.	0,5
7	Общий коэффициент увеличения оптической системы равен произведению коэффициентов увеличения ее составных частей. $k = k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$.	0,5
8	Изображение в оптической системе находится в отрицательной области относительно первой линзы ($- F/4 = -F_1/8$) (1 балл) Изображение уменьшено в 2 раза, является «прямым» и «мнимым» (0,5 балла)	1,5
9	Верно построен ход 2 лучей после преломления в собирающей линзе (без учета рассеивающей линзы) (по 1 баллу за луч)	2

10	Верно построен ход 2 лучей после преломления в рассеивающей линзе (по 1 баллу за луч)	2

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

1. Безработица (Клепиков М.). Идеальный одноатомный газ участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изохор, изотермы и адиабаты. Графики процессов 1-2 и 3-4 пересекаются в точке B. Отношение объёмов на изохорах равно α. Известно, что КПД тепловой машины, работающей по данному циклу $\eta = 0$ %. p_0, V_0 — некоторые неизвестные постоянные значения давления и объёма газа.

1. Найдите β (см. рисунок).
2. Считая β известным (в независимости от того, решили первый пункт или нет), определите координаты точки B.



Примечания:

1. Работа ν моль идеального газа в изотермическом процессе расширения (или сжатия) от начального объёма $V_н$ до конечного $V_к$ при температуре T равна:
$$A_T = \nu RT \cdot \ln\frac{V_к}{V_н}.$$
2. Уравнение Пуассона для адиабатного процесса с одноатомным газом:
$$pV^{\frac{5}{3}} = \text{const}.$$

Возможное решение

Процесс 1-2 — изотермический, так как данная кривая медленнее возрастает при уменьшении объёма газа, а значит запишем закон Бойля-Мариотта:
$$p_2V_0 = p_0\alpha V_0 \Longrightarrow p_2 = \alpha p_0.$$
Процесс 3-4 — адиабатический, значит применим уравнение Пуассона:
$$p_3V_0^{\frac{5}{3}} = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}} \Longrightarrow p_3 = \alpha^{\frac{5}{3}}\beta p_0.$$
КПД цикла может быть равен нулю, если за цикл не совершается работа, а значит
$$\sum A_i = 0.$$
В изохорных процессах газ не совершает работу, поэтому
$$A_{12} + A_{34} = 0.$$
Работа газа в изотермическом процессе:
$$A_{12} = \nu RT_1 \cdot \ln\frac{V_0}{\alpha V_0}.$$
Согласно первому началу термодинамики
$$0 = \Delta U_{34} + A_{34} \Longrightarrow A_{34} = -\frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_3).$$
Запишем уравнения состояния идеального газа для точек 3 и 4, и вычтем их:

$$(3)\colon \alpha^{\frac{5}{3}}\beta p_0 V_0 = \nu R T_3,$$
$$(4)\colon \beta p_0 \alpha V_0 = \nu R T_4,$$
$$\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right) = \nu R(T_4 - T_3).$$

Работа газа на адиабатном участке цикла:

$$A_{34} = -\frac{3}{2}\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right).$$

Работу газа в изотермическом процессе запишем, проведя замену $\nu R T_1$ на $p_0\alpha V_0$, согласно уравнению состояния в точке 1.

Просуммируем работы газа за цикл:

$$p_0\alpha V_0\cdot\ln\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right) = 0,$$
$$\ln\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\beta\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right),$$
$$\beta = \frac{2\ln\frac{1}{\alpha}}{3\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Для нахождения точки пересечения кривых составим уравнения зависимости давления от объёма каждой из них. Для этого воспользуемся значениями давлений и объёмов в точках на этих кривых:

$$pV = \alpha p_0 V_0 \implies p = \alpha p_0 V_0 \frac{1}{V},$$
$$pV^{\frac{5}{3}} = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}} \implies p = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{V^{\frac{5}{3}}}.$$

Приравняем полученные функции и найдем координату пересечения V_B:

$$\alpha p_0 V_0\frac{1}{V_B} = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{V_B^{\frac{5}{3}}},$$
$$V_B^{\frac{2}{3}} = \beta\alpha^{\frac{2}{3}}V_0^{\frac{2}{3}},$$
$$V_B = \beta^{\frac{3}{2}}\alpha V_0,$$

А значит давление в этой точке:

$$p_B = p_0\beta^{-\frac{3}{2}}.$$

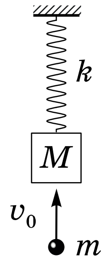
Ответ: $\beta = \frac{2\ln\frac{1}{\alpha}}{3\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)}$, $\left(\beta^{\frac{3}{2}}\alpha V_0; p_0\beta^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1.1	Обоснование сопоставления графиков кривых и процессов	1
1.2	Для изотермы показано, что $pV = \mathrm{const}$	0,5
1.3	$p_2 = \alpha p_0$	0,5
1.4	Правильно применено уравнение Пуассона	0,5
1.5	$p_3 = \alpha^{\frac{5}{3}}\beta p_0$	0,5
1.6	Аргументированный вывод о $\sum A_i = 0$	1
1.7	Работа газа в изотермическом процессе $A_{12} = \nu R T_1\cdot\ln\frac{V_0}{\alpha V_0}$	0,5
1.8	Работа газа в изотермическом процессе $A_{12} = p_0\alpha V_0\cdot\ln\frac{1}{\alpha}$	0,5
1.9	Использовано первое начало термодинамики для адиабатного процесса	1

1.10	Работа газа в адиабатном процессе $A_{34} = -\frac{3}{2}\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)$	0,5
1.11	Найден коэффициент $\beta = \frac{2\ln\frac{1}{\alpha}}{3\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)}$	0,5
2.1	Идея поиска точки пересечение путем приравнивания функций давления. Оценивается при любом указании на этот способ	1
2.2	Изотерма: $p = \alpha p_0 V_0 \frac{1}{V}$	0,5
2.3	Адиабата: $p = \beta p_0 (\alpha V_0)^{\frac{5}{3}} \frac{1}{V^{\frac{5}{3}}}$	0,5
2.4	Получен объём $V_B = \beta^{\frac{3}{2}}\alpha V_0$	0,5
2.5	Получено давление $p_B = p_0\beta^{-\frac{3}{2}}$	0,5

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.



2. Пуля (Савинцев В.). Брусок массой M висит на пружине жесткостью k. В начальный момент времени в него попадает летящая вертикально вверх пуля массой m и застревает в нем. Считайте, что удар происходит настолько быстро, что брусок за это время не успевает заметно сместиться. Известно, что брусок после соударения поднялся на x выше положения, при котором пружина ненатянута. Ускорение свободного падения g.

1. Определите, какая скорость v_0 была у пули в момент перед ударом.
2. Найдите потери энергии в процессе удара.
3. Найдите величину максимальной деформации пружины в процессе движения $x_{\max}$.

Возможное решение

Запишем условие равновесия для бруска в момент до удара с пулей.

$kx_0 = Mg$, следовательно $x_0 = Mg/k$.

При условии, что удар происходит быстро, можем считать, что вдоль вертикали выполняется закон сохранения импульса (ЗСИ). Запишем ЗСИ с учетом, что после удара пуля и брусок будут двигаться, как одно целое.

$mv_0 = (M + m)V \Rightarrow V = mv_0/(M + m)$.

Далее в процессе движения будет выполняться закон сохранения механической энергии. Запишем его для перехода от начального положения к ситуации, когда брусок находится в высшей точке траектории.

$$E = E_0 \Rightarrow \frac{kx^2}{2} = -(M+m)g(x + x_0) + \frac{m^2 v_0^2}{2(M+m)} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(M+m)}{m^2}\left(\frac{kx^2}{2} + (M+m)g\left(x + \frac{Mg}{k}\right) - \frac{kx_0^2}{2}\right)}$$

Теперь найдем энергию, выделившуюся при столкновении:

$$\frac{mv_0^2}{2} = Q + \frac{m^2 v_0^2}{2(M+m)} \Rightarrow Q = \frac{mMv_0^2}{2(M+m)}.$$

Запишем закон сохранения энергии при переходе от случая, когда тело находится в верхней точке траектории к моменту, когда пружина максимально растянута. В обоих случаях скорость бруска равна нулю.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kx^2}{2} = -(M+m)g(x + x_{\max}) + \frac{kx_{\max}^2}{2};$$

$$x_{\max} = \frac{(M+m)g}{k} \pm \frac{(M+m)g + kx}{k}.$$

Корень с минусом соответствует положению 1. Корень с плюсом — положению 2. Окончательно:

$$x_{\max} = \frac{2(M+m)g}{k} + x.$$

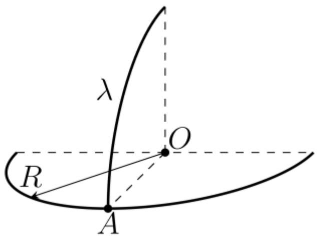
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано условие равновесия для бруска в момент до удара с пулей	1
2	Верно найдено начальное растяжение пружины x_0	1
3	Правильно записано ЗСИ	1
4	Правильно записано ЗСЭ	1
5	Найдено правильное выражение для v_0	1,5
6	Верное найдена энергия, выделившееся при столкновении	1,5
7	Правильно записан закон сохранения энергии при переходе от случая, когда тело находится в верхней точке траектории к моменту, когда пружина максимально растянута	1
8	Решено квадратное уравнение и найден $x_{\max}$	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

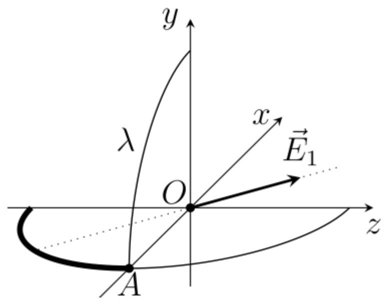
3. Дуговая склейка (Юдин И.). Равномерно заряженную проволоку согнули в дугу полуокружности радиусом R и расположили в горизонтальной плоскости. К середине этой дуги в точке A, приклеили дугу в четверть окружности с тем же радиусом в вертикальной плоскости из той же проволоки, так что центры дуг совпадали в точке O (см рисунок). Линейная плотность заряда проволоки λ. Определите:



1. Угол вектора напряженности электрического поля в точке O к горизонтальной плоскости.
2. Модуль вектора напряженности электрического поля в точке O.

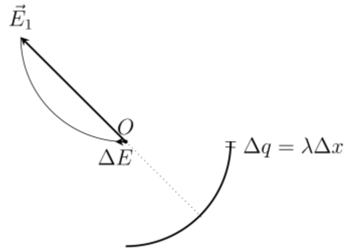
Возможное решение

Рассмотрим заряженную дугу в четверть окружности и поле, которое она создаёт в центре соответствующей окружности. В силу симметрии можно утверждать, что поле будет направлено в плоскости дуги по оси симметрии. На рисунке эта дуга в четверть окружности выделена более жирной линией, а создаваемое этой дугой поле обозначено вектором $\vec{E_1}$. Для дальнейшего рассуждения введём оси, тогда проекции вектора на оси $(E_1\cos(45°), 0, E_1\cos(45°))$. Для другой части заряженной дуги $(E_1\cos(45°), 0, -E_1\cos(45°))$. Для дуги в плоскости (x, y) поле будет $(E_1\cos(45°), -E_1\cos(45°), 0)$. Тогда суммарное поле: $(3E_1\cos(45°), -E_1\cos(45°), 0)$. Тангенс искомого угла $\mathrm{tg}(\alpha) = E_1\cos(45°)/(3E_1\cos(45°)) = 1/3$, тогда $\alpha = \mathrm{arctg}(1/3)$.



Модуль искомого вектора: $E_O = E_1\sqrt{9\cos^2(45°) + \cos^2(45°)} = \sqrt{\frac{10}{2}}E_1$.

Найдём модуль E_1. Для этого рассмотрим малую часть дуги длинной Δx, тогда заряд этой части $\Delta q = \lambda\Delta x$. В точке O создается поле величиной $\Delta E = \frac{k\lambda}{R^2}\Delta x$. Если мы рассмотрим другую часть окружности той же длины Δx, то в точке O эта часть создаст поле той же величины ΔE, только повёрнутой. Сумма всех этих полей будет направлена по дуге, длина этой дуги в пространстве полей будет пропорциональна длине дуги проволоки с коэффициентом $\frac{k\lambda}{R^2}$. Длина дуги $\frac{\pi}{2}R$, тогда длина дуги поля $l_E = \frac{k\lambda}{R^2}\frac{\pi}{2}R = \frac{k\pi\lambda}{2R}$. Суммарное поле – вектор E_1 – хорда, длина которой в $2\sqrt{2}/\pi$, т.е. поле четверти окружности $E_1 = \frac{k\sqrt{2}\lambda}{R}$, а само поле в точке O: $E_O = \frac{k\sqrt{10}\lambda}{R}$.



Критерии оценивания

№	Критерий:	Баллы
1.1	Разбиение конструкции на четверти окружности	1
1.2	Использованы идеи симметрии при нахождении направления поля от дуги в четверти окружности.	1
1.3	Найден угол между плоскостью и вектором: $\mathrm{arctg}(1/3)$ Если решение через интегрирование и ответ верный, то пункты 1.1 и 1.2 засчитывать за полный балл.	2
2.1	Нахождение модуля поля через поле дуги в четверть окружности $E_O = \sqrt{\frac{10}{2}}E_1$	2
2.2	Нахождение поля дуги четверти окружности $E_1 = \frac{k\sqrt{2}\lambda}{R}$	2
2.3	Найдено поле в точке O: $E_O = \frac{k\sqrt{10}\lambda}{R}$.	2

	Если решение через интегрирование и ответ верный, то пункты 2.1 и 2.2 засчитывать за полный балл.	

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. **Многоходовочка (Киреев А.).** Небольшое тело массой m и зарядом q располагается на горизонтальной шероховатой поверхности. Ему ударом в момент времени $t = 0$ сообщают начальную горизонтальную скорость v_0, в результате чего оно скользит по поверхности пока не остановится. Движение происходит в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ, ускорение свободного падения g.

Определите:

1) зависимость модуля скорости тела v от времени движения t;

2) время движения до остановки τ;

3) путь S, который пройдёт тело до остановки;

4) скорость тела v' сразу после прохождения первой трети пути $S/3$;

5) начальную угловую скорости вращения ω_0 вектора скорости тела;

6) модуль ускорения тела a_0 непосредственно сразу после удара;

7) зависимость угловой скорости вращения ω вектора скорости тела от времени t;

8) на какой угол φ_0 суммарно повернётся вектор скорости тела за время τ;

9) угол поворота φ' вектора скорости тела за первую половину всего времени движения;

10) какую работу $A_М$ совершат силы со стороны магнитного поля над телом на первой половине пути;

11) количество теплоты Q, выделившееся за всё время τ в результате движения тела по шероховатой поверхности.

Возможное решение

В процессе движения на тело действуют: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз; сила нормальной реакции опоры N, направленная вертикально вверх; сила трения $F_{тр} = \mu N$, направленная против скорости движения; горизонтальная сила со стороны магнитного поля $F_М = |q|vB$, направленная перпендикулярно скорости.

Так как сила $F_М$ со стороны магнитного поля направлена всегда перпендикулярно скорости, то работы она не совершает, значит $A_М = 0$. Вся первоначальная кинетическая энергия тела к моменту остановки тела перейдёт в тепло: $Q = \frac{mv_0^2}{2}$.

Введём оси: $O\tau$, направленную всегда вдоль вектора скорости тела; On, направленную всегда горизонтально к центру кривизны траектории тела (перпендикулярно скорости тела); Oz, направленную вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекции на оси:

$$\begin{cases} 0 = N - mg; & \text{на ось } Oz \quad (1) \\ ma_\tau = -F_{тр}; & \text{на ось } O\tau \quad (2) \\ ma_n = F_М, & \text{на ось } On \quad (3) \end{cases}$$

где $a_n = \omega v = \frac{v^2}{R}$ – нормальное ускорение, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенциальное ускорение тела.

Из уравнений (1) и (2) получаем $ma_\tau = -\mu mg.$ Откуда тангенциальное ускорение $a_\tau = -\mu g = const$, значит приходим к линейной зависимости от времени модуля скорости: $v = v_0 + a_\tau t = v_0 - \mu g t$. Пройденный путь l при движении с постоянным тангенциальным ускорением определяется по формуле: $l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_\tau} = \frac{v^2 - v_0^2}{-2\mu g}$. При $t = \tau$ скорость $v = 0$, путь $l = S$, значит $\tau = \frac{v_0}{\mu g}$, $S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$. После прохождения пути $l = \frac{S}{3}$ скорость $v = v'$, с учётом этого $\frac{v'^2 - v_0^2}{-2\mu g} = \frac{S}{3} = \frac{\frac{v_0^2}{2\mu g}}{3}$, следовательно $v' = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0$.

Из уравнения (3) с учётом формулы $a_n = \omega v$ получаем $m\omega v = |q|vB$, или $\omega = \frac{|q|B}{m} = const = \omega_0$, то есть угловая скорость не зависит от времени. Значит суммарный угол поворота от времени зависит линейно $\varphi = \omega t.$ При $t = \tau$ угол $\varphi = \varphi_0$, откуда $\varphi_0 = \frac{|q|B}{m}\tau = \frac{|q|B}{m} \cdot \frac{v_0}{\mu g}$. За первую половину времени движения угол поворота составит $\varphi' = \varphi_0/2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|q|B}{m} \cdot \frac{v_0}{\mu g}$.

Начальное ускорение $a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(\frac{|q|Bv_0}{m}\right)^2}$.

Ответы

а) $v = v_0 - \mu g t$;

б) $\tau = \frac{v_0}{\mu g}$;

в) $S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$;

г) $v' = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0$;

д) $\omega_0 = \frac{|q|B}{m}$;

е) $a_0 = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(\frac{|q|Bv_0}{m}\right)^2}$;

ж) $\omega = \frac{|q|B}{m}$;

з) $\varphi_0 = \frac{|q|v_0 B}{\mu m g}$;

и) $\varphi' = \frac{|q|v_0 B}{2\mu m g}$;

к) $A_М = 0$;

л) $Q = \frac{mv_0^2}{2}$.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано соотношение $F_М = \|q\|vB$ или эквивалентное	0,5
2	Записано соотношение $F_{тр} = \mu N$ или эквивалентное	0,5
3	Записано соотношение $0 = N - mg$ или эквивалентное	0,5
4	Записано соотношение $ma_\tau = -F_{тр}$ или эквивалентное	0,5
5	Записано соотношение $ma_n = F_М$ или эквивалентное	0,5
6	Записано соотношение $a_n = \omega v$ или эквивалентное	0,5
7	Получен аргументированный ответ на вопрос а) в виде $$v = v_0 - \mu g t$$	0,5
8	Получен аргументированный ответ на вопрос б) в виде $$\tau = \frac{v_0}{\mu g}$$	0,5
9	Получен аргументированный ответ на вопрос в) в виде $$S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$	0,5
10	Получен аргументированный ответ на вопрос г) в виде	1

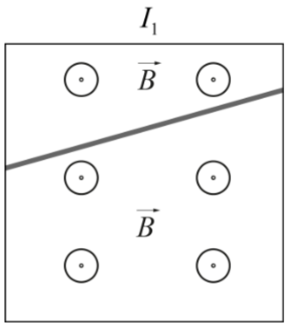
	$$v' = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0$$	
11	Получен аргументированный ответ на вопрос д) в виде $$\omega_0 = \frac{\lvert q\rvert B}{m}$$	0,5
12	Получен аргументированный ответ на вопрос е) в виде $$a_0 = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(\frac{\lvert q\rvert B v_0}{m}\right)^2}$$	0,5
13	Получен аргументированный ответ на вопрос ж) в виде $$\omega = \frac{\lvert q\rvert B}{m}$$	1
14	Получен аргументированный ответ на вопрос з) в виде $$\varphi_0 = \frac{\lvert q\rvert v_0 B}{\mu m g}$$	0,5
15	Получен аргументированный ответ на вопрос и) в виде $$\varphi' = \frac{\lvert q\rvert v_0 B}{2\mu m g}$$	0,5
16	Получен аргументированный ответ на вопрос к) в виде $$A_{\text{М}} = 0$$	0,5
17	Получен аргументированный ответ на вопрос л) в виде $$Q = \frac{m v_0^2}{2}$$	0,5
	max	**10,0**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

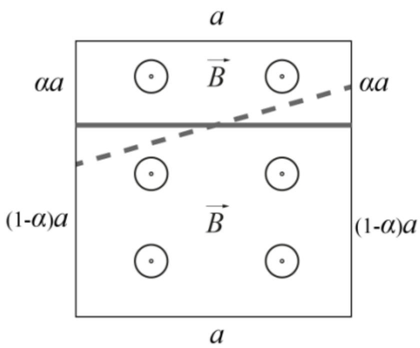
5. **Случайная перемычка (Кутелев К.).** Квадратная рамка сделана из однородного проводника с конечным сопротивлением. Две её противоположные стороны соединили перемычкой с пренебрежимо малым сопротивлением (см. рисунок). Полученные таким образом контуры поместили в однородное переменное магнитное поле. В некоторый момент времени в верхней ветке наблюдалась сила тока $I_1 = 7$ мА. При этом максимальная сила тока в системе в этот момент времени была $I_{max} = 10$ мА. Определите:

1) Силу тока в перемычке в этот момент времени $I_п$;
2) отношение величин ЭДС индукции в верхнем и нижнем контурах.



Возможное решение.

1) ЭДС индукции в контурах пропорционально их площади, так как поле однородное.
2) Сопротивление контуров пропорционально части периметра рамки входящей в соответствующий контур.
3) Направление тока (по/против часовой стрелки) везде в рамке одинаковое, а значит ток в перемычке равен разности токов верхней и нижней части рамки, и не может быть максимальным током в системе.
4) Значит $I_2 = I_{max} = 10$ мА, $I_п = 3$ мА.
5) Заметим, что если развернуть перемычку так, как показано на рисунке, площади контуров не изменятся (а значит и ЭДС). Так же останутся теми же части периметра рамки входящие в соответствующий контур (а значит и сопротивление контуров, так как у перемычки сопротивления нет).



6) Обозначим за a длину стороны рамки, а за α - часть стороны квадрата, оставшуюся в первом контуре. Тогда

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{R_2}{R_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{3-2\alpha}{2\alpha+1} = \frac{7}{10}$$

$$6\alpha^2 - 23\alpha + 7 = 0$$

$$\alpha_1 = 3.5$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}$$

Так как $\alpha < 1$, то подходит только 1/3. Отношение ЭДС тогда $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$

№	Критерий	Балл
1	Записан закон электромагнитной индукции	1
2	Записано выражение для сопротивления контура, включающее его длину	1
3	$I_2 = I_{max} = 10$ мА	1
4	$I_п = 3$ мА	1

5	Записан закон Ома или правила Кирхгофа	1
6	Получено выражение связывающее соотношение токов с положением перемычки	3
7	Найдено отношение площадей контуров и, соответственно, отношение ЭДС индукции	2
	max	**10,0**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.