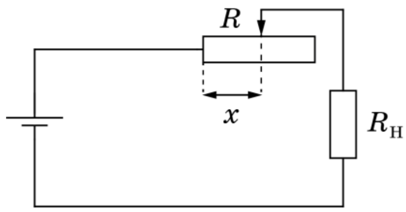
Задача 9.1. Термостат. В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (см. рис.). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента $R_{\text{Н}}$ в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x - это доля длины реостата, включённая в данный момент в цепь.



При температуре внешней среды t_1 = 25ºC для поддержания требуемой температуры ползунок реостата стоит в положении x_1 = 0,65, при t_2 = 20ºC ползунок реостата стоит в положении x_2 = 0,35. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды t_3 = 13ºC? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

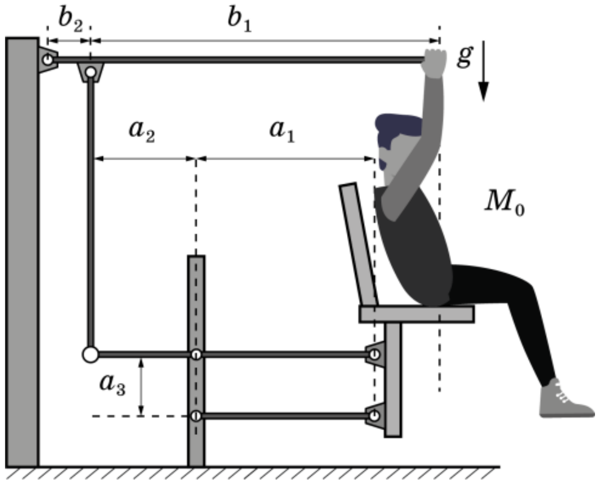
Задача 9.2. Силовой тренажёр. На спортивной площадке установлен тренажёр, схема которого показана на рисунке. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажёра (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз m = 3,7 кг.

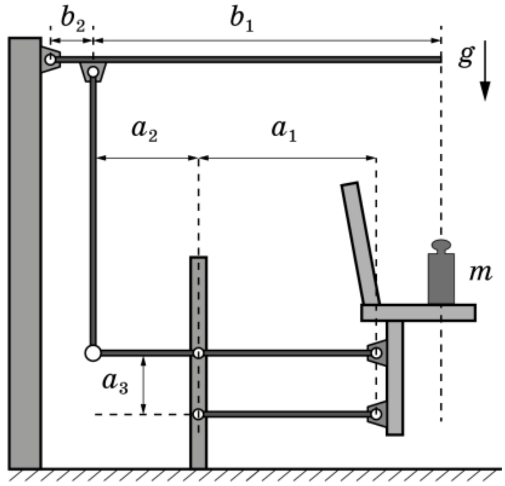
Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой M_0 = 86 кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении?

Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчётах:

a_1 = 27,5 см; a_2 = 13,0 см; a_3 = 17,5 см; b_1 = 73,5 см; b_2 = 8,5 см.

Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

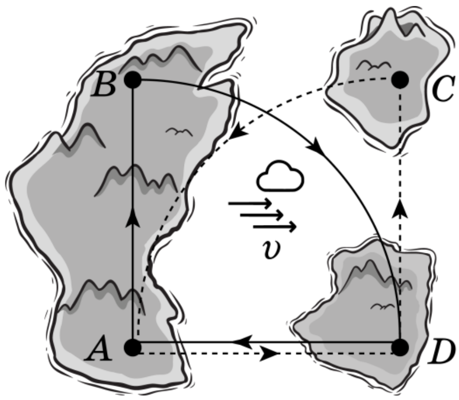




24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 9.3. Торможение шайбы. Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $S_1 = 8$ см от начальной точки, а через 2τ – на расстоянии $S_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

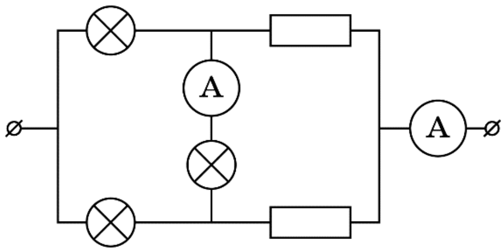
Задача 9.4. Четыре города. Четыре города расположены в вершинах квадрата $ABCD$ (см. рис). Параллельно направлению AD дует сильный ветер (из A в D) со скоростью v. Два одинаковых самолёта вылетают из города A и движутся по разным маршрутам: первый по $ABDA$, второй по $ADCA$ (BD и CA – «четвертинки» окружности). Найдите отношение времён движения самолётов по маршрутам $\frac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = ?$ Скорость самолёта при отсутствии ветра равна u.



Задача 9.5. Нелинейный мост. Электрическая цепь, изображённая на рисунке, состоит из трёх одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нём:

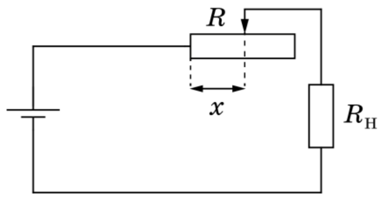
$$I = a\sqrt{U}\,.$$

Известно, что один из амперметров показывает величину силы тока I_x, а другой I_y, причём $I_x > I_y$. Определите силу тока в каждом из элементов цепи.



24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 9.1. Термостат. В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (см. рис.). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента $R_{\text{Н}}$ в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x - это доля длины реостата, включённая в данный момент в цепь.



При температуре внешней среды t_1 = 25ºС для поддержания требуемой температуры ползунок реостата стоит в положении x_1 = 0,65, при t_2 = 20ºС ползунок реостата стоит в положении x_2 = 0,35. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды t_3 = 13ºС? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

Возможное решение

Сопротивление реостата в зависимости от x равно xR.

Сила тока в цепи нагревателя

$$I = \frac{U}{R(x+0{,}25)}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на нагревательном элементе, составит

$$P_H = I^2 R_H = \frac{U^2}{R}\frac{0{,}25}{(x+0{,}25)^2}.$$

При установившейся температуре мощность нагревателя равна мощности тепловых потерь в окружающую среду:

$$P_H = P_{потерь} = \alpha(t_0 - t),$$

где α – постоянный коэффициент, t_0 – температура термостата, t – текущая температура среды.

Применительно к двум известным ситуациям это уравнение теплового баланса даст систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{U^2}{R}\dfrac{0,25}{0,81} = \alpha(t_0 - 25°\text{C}), \\ \dfrac{U^2}{R}\dfrac{0,25}{0,36} = \alpha(t_0 - 20°\text{C}). \end{cases}$$

Решая систему, находим t_0 = **29**ºС.

Для третьего случая уравнение баланса запишется в виде:

$$\frac{U^2}{R}\frac{0,25}{(x_3+0,25)^2} = \alpha(29°\text{C} - 13°\text{C}).$$

Решая это уравнение совместно с любым из уравнений системы, находим x_3 **= 0,2**.

Критерии оценивания

1. Получено правильное выражение для мощности нагрева		2 балла
a) Указана зависимость сопротивления резистора от x	0,5 балла	
b) Получена общая сила тока	0,5 балла	
c) Получено выражение для мощности нагревателя	1 балл	
2. Использовано условие установившейся температуры термостата		1 балл
3. Правильно применено условие баланса мощностей		2 балла
a) Для первого случая	1 балл	
b) Для второго случая	1 балл	
4. Правильно найдена температура термостата		2 балла
5. Правильно применено условие баланса мощностей в третьем случае		1 балл
6. Получено значение для x_3		2 балла
a) Получено правильное выражение	1 балл	
b) Получено правильное значение	1 балл	

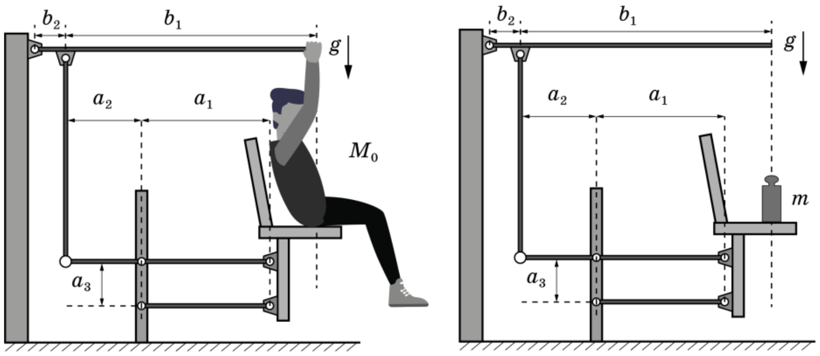
Задача 9.2. Силовой тренажёр. На спортивной площадке установлен тренажёр, схема которого показана на рисунке. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажёра (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз m = 3,7 кг.

Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой M_0 = 86 кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении?

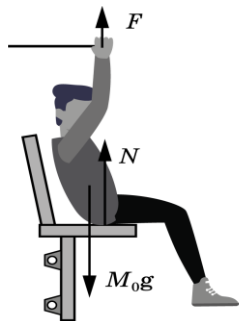
Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчётах:

a_1 = 27,5 см; a_2 = 13,0 см; a_3 = 17,5 см; b_1 = 73,5 см; b_2 = 8,5 см.

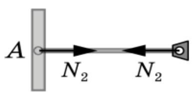
Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



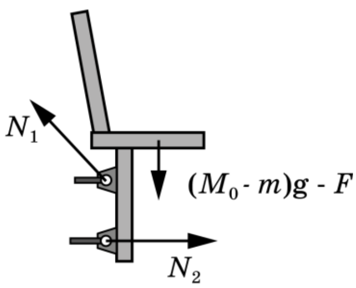
Возможное решение. Рычаги в системе обладают массой. Суммарный момент сил тяжести, связанных с этими массами, компенсируется моментом веса груза массы m. Значит, для их учёта достаточно вычесть массу m из массы человека M_0.



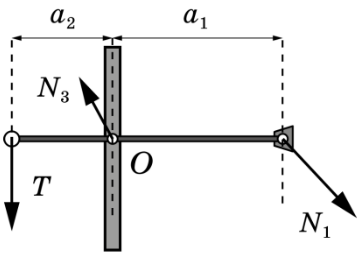
Сила давления человека на кресло меньше силы тяжести на величину силы F.



Рассмотрим силы, действующие на вертикальную и нижнюю горизонтальную штанги. Отметим, что их **силы тяжести мы скомпенсируем уменьшением массы человека**. Из рисунка видно, что сила N_2 может быть только горизонтальной, иначе момент сил относительно т. A будет отличен от нуля (на самом деле её вертикальную составляющую мы учли при уменьшении массы). Аналогично, сила T может быть только вертикальной, иначе момент сил относительно т. B будет отличен от нуля.



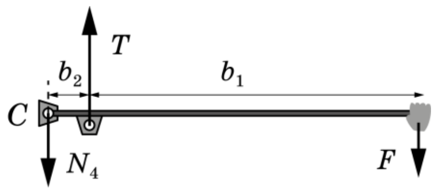
Расставим силы, действующие на кресло. Для равновесия необходимо равенство вертикальных компонент сил:



$$N_{1верт} = (M_0 - m)g - F \qquad (1)$$

Расставим силы, действующие на среднюю горизонтальную штангу. Для равновесия необходимо равенство моментов N_1 и T относительно точки O:

$$Ta_2 = N_{1верт}a_1 \qquad (2)$$



Расставим силы, действующие на верхнюю штангу. Для равновесия необходимо равенство моментов F и T относительно точки C:

$$Tb_2 = F(b_1 + b_2) \qquad (3)$$

Решая совместно все уравнения, полученные из условий равновесия, получаем ответ:

$$F = \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1}(M_0 - m)g \qquad (4)$$

Подставляем численные данные и получаем окончательный ответ: F = 148 Н.

Критерии оценивания

1. Использована идея с исключением моментов сил тяжести внутри механизма путём уменьшения массы человека на m	1 балл
2. Учтено уменьшение силы взаимодействия человека со стулом на F	1 балл
3. Обоснована горизонтальность N_2	1 балл
4. Получено условие равновесия стула (1)	1 балл
5. Использовано условие равновесия средней штанги (2)	1 балл
6. Использовано условие равновесия вертикальной штанги	1 балл
7. Использовано условие равновесия верхней штанги (3)	1 балл
8. Получено выражение для F (4)	2 балла
9. Получен правильный численный ответ	1 балл

Примечание к критериям

1. Если в решении нет идеи из п.1, но моменты сил тяжести внутри механизма учтены в решении, то балл за п.1 выставляется в полной мере. Тогда нет необходимости показывать горизонтальность N_2.

2. Для выполнения п.4, п.5, п.7 может быть записан любой аналог уравнений (1-3).

3. Если в решении не выполнен п.2, то баллы могут быть выставлены только за пункты 1, 3, 5, 6, 7.

Задача 9.3. Торможение шайбы. Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $S_1 = 8$ см от начальной точки, а через 2τ – на расстоянии $S_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение. На шайбу после начального толчка действуют 3 силы: сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения скольжения. В результате, до остановки шайба будет двигаться с ускорением

$$a = \mu g \to \mu = \frac{a}{g}.$$

Если к моменту 2τ шайба ещё не остановилась, то справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} S_1 = \upsilon\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}, \\ S_2 = \upsilon(2\tau) - \dfrac{a(2\tau)^2}{2}, \end{cases} \qquad (1)$$

где υ - начальная скорость шайбы.

Решая систему, получим:

$$a = \frac{2S_1 - S_2}{\tau^2} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\mu = 0{,}4$$

Если шайба остановилась между τ и 2τ, то справедлива другая система уравнений:

$$\begin{cases} S_1 = \upsilon\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}, \\ S_2 = \dfrac{\upsilon^2}{2a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Из данной системы получаем уравнение для a:

$$2aS_2 = \left(\frac{S_1}{\tau} + \frac{a\tau}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

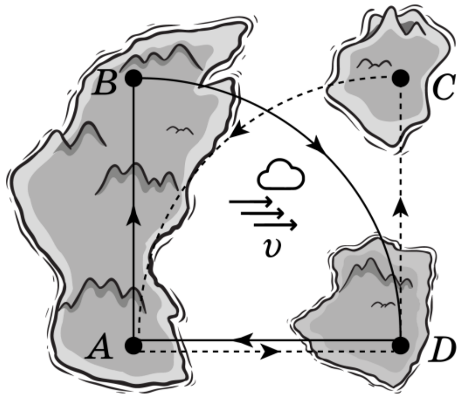
Решением данного уравнения будет соотношение: $a = 16\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Корень с «+» при проверке даёт время остановки, меньшее, чем τ, что противоречит условию.
Корень с «–» даёт время остановки больше 2τ, поэтому этот корень тоже нужно отбросить.

Критерии оценивания

1. Коэффициент трения выражен через ускорение		1 балл
2. Записана система уравнений [1]		1 балл
3. Найдено первое значение $\mu = 0{,}4$		2 балла
a) Получено выражение для a	1 балл	
b) Получено выражение для μ или значение для a	0,5 балла	
c) Получено значение для μ	0,5 балла	
4. Указано, что возможен случай с остановкой до 2τ		1 балл
5. Записана система уравнений [2]		1 балл
6. Получено уравнение [3]		1,5 балла
7. Найдены корни уравнения [3]		1 балл
8. Отброшены оба корня уравнения (3).		1,5 балла

Задача 9.4. Четыре города. Четыре города расположены в вершинах квадрата $ABCD$ (см. рис). Параллельно направлению AD дует сильный ветер (из A в D) со скоростью υ. Два одинаковых самолёта вылетают из города A и движутся по разным маршрутам: первый по $ABDA$, второй по $ADCA$ (BD и CA – «четвертинки» окружности). Найдите отношение времён движения самолётов по маршрутам $\dfrac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = ?$ Скорость самолёта при отсутствии ветра равна u.

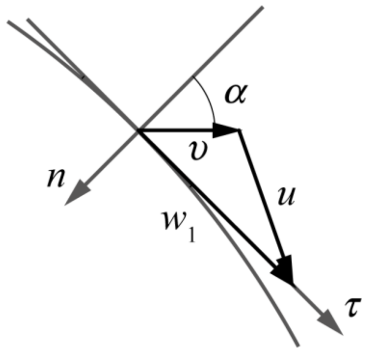


Возможное решение. Сравним времена движения по соответствующим участкам.

1) Так как скорости на участках AB и DC одинаковы, то и $t_{AB} = t_{DC}$.

2) Время движения на участке AD $t_{AD} = \dfrac{l}{u+\upsilon}$, время движения на участке DA $t_{DA} = \dfrac{l}{u-\upsilon}$, а выигрыш во времени $t_{DA} - t_{AD} = \Delta t_1 = \dfrac{l}{u-\upsilon} - \dfrac{l}{u+\upsilon} = \dfrac{2l\upsilon}{u^2-\upsilon^2}$

3) Сравним времена движения на BD и CA. Рассмотрим **маленький** участок Δl на траектории BD.

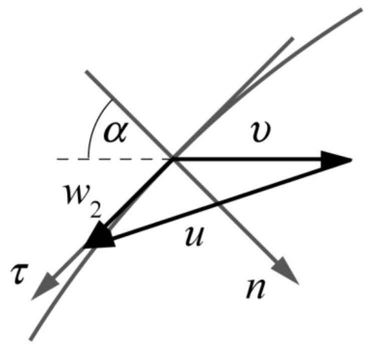


Скорость самолёта относительно земли w_1 равна векторной сумме скорости ветра υ и собственной скорости самолёта u. Введём систему координат с осями, направленными вдоль и нормально к траектории в данной точке. Чтобы вектор w_1 был направлен по касательной к траектории, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u_n = -\upsilon_n \\ u_\tau + \upsilon_\tau = w_1 \end{cases} \Rightarrow w_1 = u_\tau + \upsilon_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)$$

Участок малой длины Δl самолёт пролетит за время $\Delta t_{BD1} = \dfrac{\Delta l}{w_1} = \dfrac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)}$.

Аналогично рассмотрим **симметричный первому маленький участок** длиной Δl на траектории CA.



Скорость самолёта относительно земли w_1 равна векторной сумме скорости ветра υ (не изменилась) и собственной скорости самолёта u (изменилась по направлению). Введём систему координат с осями, направленными вдоль и нормально к траектории в данной точке. Чтобы вектор w_2 был направлен по касательной к траектории, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u_n = -\upsilon_n \\ u_\tau - \upsilon_\tau = w_2 \end{cases} \Rightarrow w_2 = u_\tau - \upsilon_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha).$$

Участок малой длины Δl самолёт пролетит за время $\Delta t_{CA1} = \dfrac{\Delta l}{w_2} = \dfrac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha)}$.

Разность времён прохождения малых участков:

$$\Delta t_{BD1} - \Delta t_{CA1} = \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)} - \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha)} =$$

$$\Delta l \frac{(\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha)) - (\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha))}{u^2 - u_n^2 - \upsilon^2 \sin^2(\alpha)}.$$

Учтём, что $u_n{}^2 = \upsilon_n{}^2$, $\upsilon^2 \sin^2(\alpha) = \upsilon_\tau^2$, а $\upsilon_\tau^2 + \upsilon_n^2 = \upsilon^2$, следовательно,

$$\Delta t_{BD1} - \Delta t_{CA1} = \frac{-2\upsilon \Delta l \sin(\alpha)}{u^2 - \upsilon^2}. \qquad (1)$$

Отметим, что $\Delta l \sin(\alpha)$ – это смещение вдоль ветра, а остальные величины в выражении постоянные. Поэтому, просуммировав значения (1) для всех участков траекторий *CA* и *BD*, получим задержку $\Delta t_2 = \dfrac{-2\upsilon l}{u^2 - \upsilon^2}$, которая совпадает с задержкой Δt_1, но имеет противоположный знак.

Значит, время движения по этим двум маршрутам одинаковое!

$$\frac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = 1.$$

Критерии оценивания

1. Указано, что $t_{AB} = t_{DC}$.	0,5 балла
2. Правильно выражено время движения на участке *AD*	1 балл
3. Правильно выражено время движения на участке *DA*	1 балл
4. Правильно найден выигрыш во времени Δt_1	1 балл
5. Найдено время движения на малых симметричных участках	4 балла
Для каждого участка:	
a) Идея векторного сложения скоростей	0,5 балла
b) Идея с проецированием на нормальную и тангенциальную оси	0,5 балла
c) Выражение для скорости самолёта через компоненты	0,5 балла
d) Выражение для времени движения	0,5 балла
6. Получено выражение [1] или аналог	1 балл
7. Правильно найдена задержка Δt_2	1 балл
8. Сделан вывод о равенстве времён движения по двум траекториям	0,5 балла

Примечание к критериям

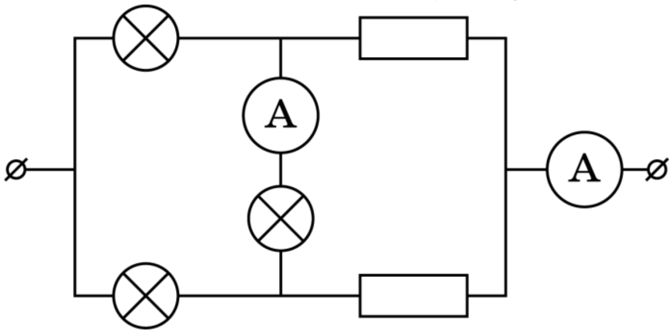
1. При неправильном решении можно поставить 1 балл по **п.5.а**, если в решении используется идея векторной суммы скоростей.

2. Если в п.7 неправильно указан знак, то балл всё равно засчитывается, ошибка будет в последнем пункте.

Нелинейный мост. Цепь изображённая на схеме состоит из трёх одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нём.

$$I = a\sqrt{U}$$

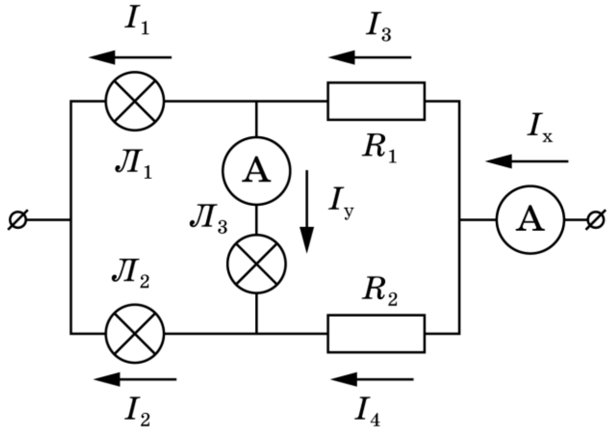
Известно, что один из амперметров показывает ток I_x, а другой I_y, причём $I_x > I_y$.



Определите силу тока в каждом из элементов схемы.

Возможное решение

Из двух заданных токов наибольший (I_x) является общим током цепи, так как это наибольший из возможных токов в данной схеме, а I_y - током в нелинейном элементе. Расставим токи в цепи.



Из ВАХ нелинейного элемента следует, что $U = \frac{I^2}{a^2}$

Напряжение на $Л_1$ равно $U_{Л1} = \frac{I_1^2}{a^2}$. С другой стороны, это напряжение равно сумме напряжений на $Л_2$ и $Л_3$: $U_{Л1} = U_{Л2} + U_{Л3} = \frac{I_2^2}{a^2} + \frac{I_y^2}{a^2}$. Дополним систему условием на сумму токов I_1 и I_2:

$$\begin{cases} \frac{I_1^2}{a^2} = \frac{I_2^2}{a^2} + \frac{I_y^2}{a^2} \\ I_1 + I_2 = I_x \end{cases}$$

Решаю систему получаем выражения для I_1 и I_2:

$$I_1 = \frac{I_x^2 + I_y^2}{2I_x}$$

$$I_2 = \frac{I_x^2 - I_y^2}{2I_x}$$

Токи I_3 и I_4 найдём из условия разветвления токов в узлах:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_y \\ I_2 = I_4 + I_y \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{(I_x + I_y)^2}{2I_x}$$

$$I_4 = \frac{I_x^2 - 2I_x I_y - I_y^2}{2I_x}$$

Критерии оценивания

1. Обосновано, что I_x это сила общего тока цепи, а I_y - сила тока через *Л*$_3$	1 балл
2. Получено правильное выражение для напряжения на нелинейном элементе	1 балл
3. Указано равенство падений напряжений в контуре с *Л*$_1$, *Л*$_2$ и *Л*$_3$	2 балла
4. Использовано условие разветвления токов I_1 и I_2	1 балл
5. Получено правильное выражение для I_1	1 балл
6. Получено правильное выражение для I_2	1 балл
7. Использованы условия разветвления токов I_3 и I_4	1 балл
8. Получено правильное выражение для I_3	1 балл
9. Получено правильное выражение для I_4	1 балл

Примечание к критериям

1. Правильное решение неавторским методом оценивается в 10 баллов.
2. В п.1 критериев балл ставится за объяснение какая сила тока проходит через каждый амперметр. Если токи расставлены правильно, но нет объяснения, то этот балл не ставится, но задача проверяется дальше.
3. В п.3 могут быть использованы правила Кирхгофа для контура с нелинейными элементами, рассмотрено распределение потенциалов в этом контуре или аналогичные им уравнения.
4. Для нахождения токов I_3 и I_4 может использоваться разветвление с участием I_y, так и разветвление I_x.

Задача 10.1 Шарик на нити. Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (рис. 1). На какой угол φ повернётся нить с этого момента времени до остановки шарика?

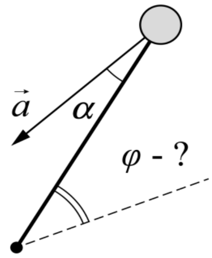
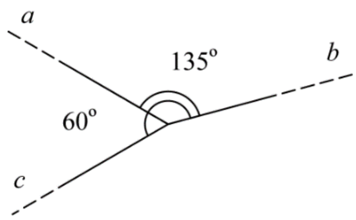


Рис. 1

Задача 10.2. Бильярд на льду. На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.



1) Определите, какая из трёх траекторий: – «*a*», «*b*» или «*c*» – может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.

2) Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите:

А) отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения;

Б) долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

Боковые поверхности шайб гладкие.

Задача 10.3. Газировка. В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ. Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объёма сосуда под поршнем (рис. 2). Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20\text{ см}$, площадь поршня $S = 10\text{ см}^2$. На поршень поместили гирю массы m_0 и, в результате установления равновесия, поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12\text{ см}$. Затем на поршень поместили ещё одну, точно такую же, гирю и поршень сместился ещё на $\Delta h_2 = 2{,}22\text{ см}$, вновь оказавшись в равновесии. Определите:

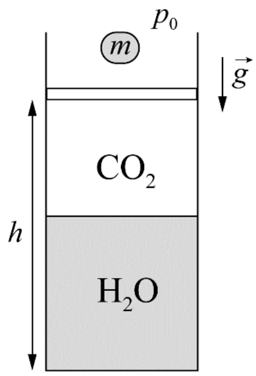


Рис. 2

1) массу m_0 одной гири;

2) массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.

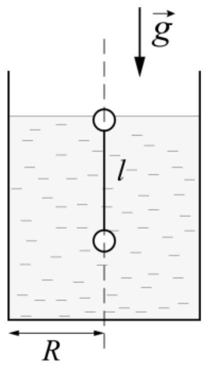
Считайте, что температура в сосуде постоянна, и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется.

Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание: масса газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 10.4. Крутится, вертится. Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединённые тонкой нитью длинной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном водой. При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того, как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда.



Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

Задача 10.5. Три элемента. Внутри «чёрного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая их трёх элементов: резистора с сопротивлением R = 3,5 Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$ (вольтамперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рис. 3) и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что ВАХ неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе, сила тока, протекающего через него, не убывает).

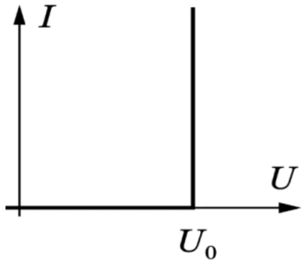


Рис. 3

Вольтамперная характеристика «черного ящика» показана на рис. 4.

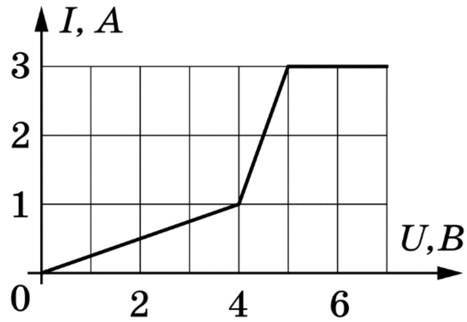


Рис. 4

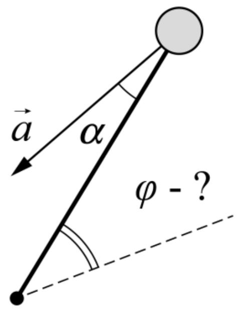
Определите:

1) Возможные схемы соединения элементов в «чёрном ящике» (при некотором напряжении на выводах чёрного ящика ток должен протекать через все элементы). Свой ответ обоснуйте.
2) Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.
3) Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X.

Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ нелинейного элемента для случаев максимально возможного напряжения $U_{\max}$ открытия диода и ещё одного значения U_N открытия диода, выраженного целым числом вольт.

__24 января__ на портале http://abitu.net/vseros __будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура__. Начало разбора (по московскому времени):
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура**. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 10.1 Шарик на нити. Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (см. рисунок). На какой угол φ повернётся нить с этого момента времени до остановки шарика?



Возможное решение. Шарик движется под действием двух сил: силы сопротивления воздуха, направленной против скорости и обеспечивающей тангенциальную составляющую ускорения, и силы натяжения нити, направленной вдоль нити и обеспечивающей центростремительную составляющую ускорения.

Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = a\sin\alpha = k\upsilon / m$, где υ – скорость, k – коэффициент в формуле для силы сопротивления, а m – масса шарика.

Центростремительная составляющая ускорения $a_{\text{цс}} = a\cos\alpha = \upsilon^2 / R$, где R радиус окружности.

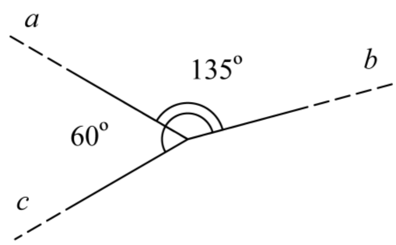
Отношение этих составляющих даёт $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{k\upsilon R}{m\upsilon^2} = \dfrac{kR}{m\upsilon}$.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление движения для произвольного i - го момента времени: $m\dfrac{d\upsilon_i}{dt_i} = -k\upsilon_i = -k\dfrac{dS_i}{dt_i}$, где S - пройденный путь. Сократив на dt_i получим: $md\upsilon_i = -kdS_i$. Последнее выражение справедливо для любого малого момента времени. Запишем такое выражение для каждого момента времени и просуммируем их по всем временным отрезкам, тогда получим: $m\Delta\upsilon = -k\Delta S$. Отсюда: $m(0-\upsilon) = -k(S-0)$, или

$S = \dfrac{m\upsilon}{k} = \dfrac{R}{\mathrm{tg}\alpha} = R\varphi$. Окончательно получаем $\varphi = \mathrm{ctg}\alpha$.

Критерии оценивания

1	Из второго закона Ньютона получено выражение для тангенциальной составляющей ускорения $a_\tau = k\upsilon / m$	1 балл
2	Получено выражение для угла α: $\mathrm{tg}\alpha = kR/(m\upsilon)$	2 балла
3	Записан второй закон Ньютона в дифференциальной форме (для малого момента времени) в проекции на направление движения: $m\dfrac{d\upsilon_i}{dt_i} = -k\dfrac{dS_i}{dt_i}$	2 балла
4	Корректно осуществлен переход к конечным приращениям: либо через суммирование, либо через интегрирование. (*Если потеряны знаки, то снимается 2 балла*.)	3 балла
5	Получен итоговый ответ: $\varphi = \mathrm{ctg}\alpha$	2 балла



Задача 10.2. Бильярд на льду. На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.

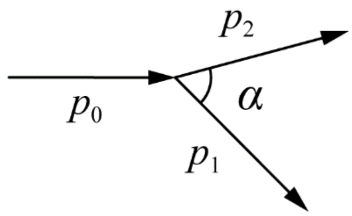
1) Определите, какая из трёх траекторий - «*a*», «*b*» или «*c*» - может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.

2) Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите:

А) отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения;

Б) долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

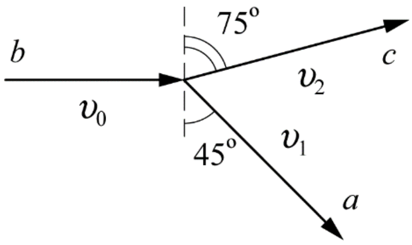
Боковые поверхности шайб гладкие.



Возможное решение. Из закона сохранения импульса $\left(\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)$ получим $p_{_0}^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha$, где α – угол разлёта (см. рис.).

При частично упругом столкновении кинетическая энергия налетающей шайбы больше суммы кинетических энергий шайб после столкновения. Здесь и далее кинетическую энергию удобно выразить через импульс: $E_{\text{кин}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$.

$\dfrac{p_{_0}^2}{2m} = \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m} + Q$; где Q – энергия, перешедшая в тепло в результате столкновения шайб.



Тогда $\dfrac{p_{_0}^2}{2m} > \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m}$. Подставляя $p_{_0}^2$, получим: $p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha > p_1^2 + p_2^2$, откуда $\cos\alpha > 0,\ 0 < \alpha < 90^\circ$.

Следовательно, в результате частично упругого столкновения шайбы разлетаются под острым углом, и траектория «*b*» принадлежит налетающей шайбе перед столкновением. Геометрия столкновения теперь выглядит так:

направив одну координатную ось вдоль траектории налетающей шайбы, а вторую – перпендикулярно, для проекций импульса на эти оси получим:

$$p_1\cos 45^\circ = p_2\cos 75^\circ,$$

$$p_1\sin 45^\circ + p_2\sin 75^\circ = p_0.$$

Отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки, равно отношению их кинетических энергий сразу после столкновения:

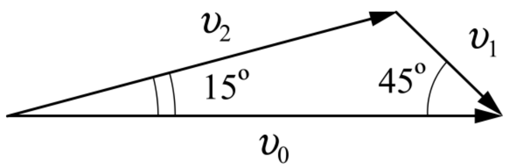
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \left(\frac{\cos 75^\circ}{\cos 45^\circ}\right)^2 \approx 0{,}13 \text{ или } \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\cos 45^\circ}{\cos 75^\circ}\right)^2 \approx 7{,}46.$$

Найдём долю кинетической энергии, переходящую в тепло.

$$Q = E_0 - E_1 - E_2 = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2\right) = \frac{p_1 p_2 \cos\alpha}{m}$$

$$\frac{Q}{E_0} = 2\frac{p_1 p_2 \cos\alpha}{p_0^2}.$$

Рассмотрим треугольник скоростей:



Из теоремы синусов:

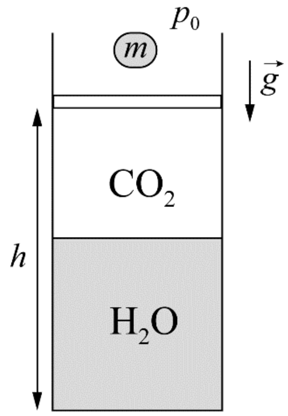
$$p_1 = p_0\frac{\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ};\ \ p_2 = p_0\frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{Q}{E_0} = 2\frac{p_1 p_2 \cos 60^\circ}{p_0^2} = 2\frac{\sin 15^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ}{\left(\sin 120^\circ\right)^2} \approx 0,24.$$

Критерии оценивания

1	Записан закон сохранения импульса	1 балл
2	Записан закон сохранения энергии с учетом потерь	1 балл
3	Аргументированно указано, какая из траекторий принадлежит налетающей шайбе. *(Если аргументация отсутствует или не является обоснованной, то баллы за этот пункт не ставятся, но за дальнейшее решение баллы следует ставить согласно критериям*	3 балла
4	Указано, что отношение пройденных до остановки путей равно отношению квадратов импульсов (скоростей) шайб	1 балл
5	Получено верное выражение для отношения путей: S_1 / S_2 или S_2 / S_1	1 балл
6	Получено верное численное значение для отношения путей	1 балл
7	Получено верное выражение для Q / E_0	1 балл
8	Получено верное численное значение для Q / E_0	1 балл



Задача 10.3. Газировка. В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ. Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объёма сосуда под поршнем. Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20$ см, площадь поршня $S = 10$ см^2. На поршень поместили гирю массы m_0 и, в результате установления равновесия, поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12$ см. Затем на поршень поместили ещё одну, точно такую же, гирю и поршень сместился ещё на $\Delta h_2 = 2{,}22$ см, вновь оказавшись в равновесии.

Определите:

1) массу m_0 одной гири;

2) массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.

Считайте, что температура в сосуде постоянна, и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется. Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание: масса газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

Возможное решение. Пусть в жидкости объёма V_0 при давлении p растворяется газ, занимающий в виде газовой фазы объём V при том же давлении p. В соответствии с законом Генри $V = kV_0$, и можно считать, что жидкость объёма V_0 представляет собой «дополнительный» объём для газа над жидкостью, помимо объёма, который занимает сам газ. В нашем случае при записи уравнения состояния, будем считать, что объём углекислого газа складывается из «дополнительного» объёма $V_0 = kSh/2$ и объёма между поршнем и поверхностью воды при неизменной массе газа. Обозначим Δp – избыточное давление, которое создаёт гиря массы m. Тогда после установки на поршень одной гири:

$$(p_0 + \Delta p)\left(kS\frac{h}{2} + S\left(\frac{h}{2} - \Delta h\right)\right) = p_0\left(kS\frac{h}{2} + S\frac{h}{2}\right).$$

Поделив обе части уравнения на $p_0 S$, получаем:

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(\frac{h}{2}(k+1) - \Delta h_1\right) = \frac{h}{2}(k+1)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)\Delta h_1 = \frac{\Delta p}{p_0}\frac{h}{2}(k+1). \quad (1)$$

Для двух гирь:

$$\left(1 + \frac{2\Delta p}{p_0}\right)\left(\frac{h}{2}(k+1) - \Delta h_1 - \Delta h_2\right) = \frac{h}{2}(k+1);$$

$$\left(1 + \frac{2\Delta p}{p_0}\right)(\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{2\Delta p}{p_0}\frac{h}{2}(k+1). \quad (2)$$

Поделив (2) на (1) получаем

$$\frac{1 + \frac{2\Delta p}{p_0}}{1 + \frac{\Delta p}{p_0}} \cdot \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{\Delta h_1} = 2$$

Подставив Δh_1 и Δh_2, находим $\frac{\Delta p}{p_0} = 0{,}2$, $m = \frac{\Delta p S}{g} = 2$ кг.

Далее из (1) находим $k = 0{,}87$.

Пусть Δp_x – избыточное давление на поршень, при котором он опустится до поверхности жидкости. Тогда

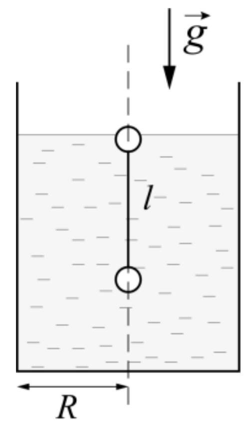
$$(p_0 + \Delta p_x)\frac{h}{2}kS = p_0\frac{h}{2}(k+1)S,$$

откуда $\Delta p_x \approx 1{,}15 p_0$, и общая масса груза на поршне при этом $m_x = \frac{\Delta p S}{g} = 11{,}5$ кг. Таким образом, дополнительно необходимо поставить на поршень груз $\Delta m = m_x - 2m \approx 7{,}5$ кг.

Критерии оценивания

1	Корректно записан закон Генри в форме, применимой для выбранного способа решения задачи: либо через объёмы, как в авторском решении, либо через количество вещества/массы растворённого газа в зависимости от внешнего давления.	1 балл
2	Записано уравнение состояния газа для первого опыта (с учётом растворённого газа)	2 балла
3	Записано уравнение состояния газа для второго опыта (с учётом растворённого газа)	1 балл
4	Получено правильное выражение для массы m_0 гири	1 балл
5	Получено правильное численное значение массы гири	1 балл
6	Записано уравнение состояния газа для случая растворения в воде всего газа	2 балла
7	Получено правильное выражение для общей массы всех гирь или массы m_2 дополнительной гири	1 балл
8	Получено верное численное значение массы дополнительной гири (*если ученик забыл вычесть 2m, то балл не ставится*)	1 балл

Задача 10.4. Крутится, вертится. Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединённые тонкой нитью длинной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном водой. При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того, как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда.



Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

Возможное решение. На каждый из шариков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда и сила натяжения нити $\vec{T}$; в сумме они создают центростремительное ускорение, равное $\overrightarrow{a_{\text{цс}}} = -\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ – горизонтальный вектор, проведённый от оси вращения к шарику).

Для начала найдём, чему равна сила Архимеда в данной ситуации. Так как сила Архимеда – это сумма сил давления воды на всю поверхность шарика, то она не зависит от материала, из которого изготовлен шарик. Заменим исходный шарик на точно такой же, но сделанный из воды. Очевидно, что он будет неподвижен относительно основной массы воды, а значит, сумма действующих на него сил тяжести и Архимеда будет обеспечивать центростремительное ускорение.

$$\rho_{\text{в}}V\overrightarrow{a_{\text{цс}}} = \rho_{\text{в}}V\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}},$$

откуда

$$\overrightarrow{F_{\text{арх}}} = -\rho_{\text{в}}V(\vec{g} + \omega^2\vec{r}).$$

Второй закон Ньютона для каждого из шариков будет выглядеть следующим образом:

$$-m\omega^2\vec{r} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + \vec{T}.$$

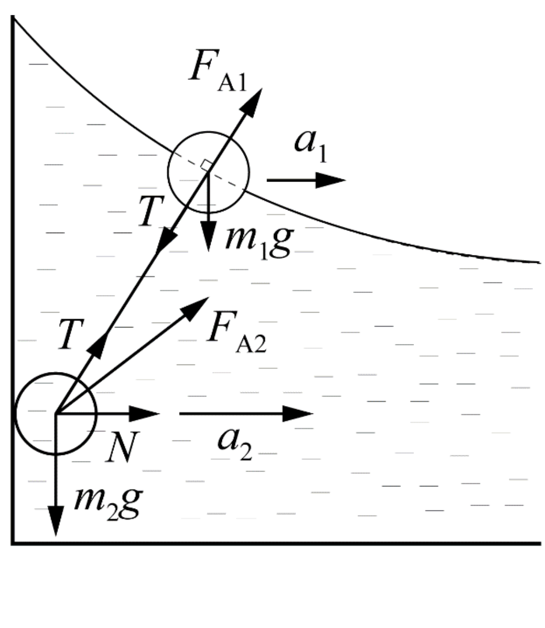
Для удобства, перенесём слагаемое $m\omega^2\vec{r}$ в правую часть равенства

$$\vec{0} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + \vec{T} + m\omega^2\vec{r}.$$

Заметим, что сумма $m\vec{g} + m\omega^2\vec{r}$ направлена строго против вектора силы Архимеда. Кроме того, из условия задачи следует, что плотность верхнего шарика меньше плотности воды, а нижнего – больше. Из этого следует, что если бы нити не было, то лёгкий шарик сдвигался бы к оси вращения, а тяжёлый – наоборот от оси. Из этого можно сделать вывод, что связанные нитью шарики будут находится по одну сторону от оси вращения.

Так как расстояние от шариков до оси вращения будет разным, то и сумма $m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + m\omega^2\vec{r}$ будет направлена для каждого шарика под своим углом к горизонту. Это означает, что шарики не могут быть уравновешены только лишь силой натяжения нити, и равновесие возможно, только если тяжёлый шарик упирается в стенку сосуда.

Расставим все силы на рисунке.



Сила Архимеда, действующая на верхний шарик, коллинеарна сумме $m\vec{g} + m\omega^2\vec{r}$, тогда и сила натяжения нити должна быть ей коллинеарна.

Запишем второй закон Ньютона для лёгкого (верхнего) шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити: $m_1g\ sin\alpha = m_1\omega^2 r_1\ cos\alpha$

где r_1- расстояние от оси вращения до лёгкого шарика. $r_1 = R - l\ sin\alpha$.

Из этих уравнений получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg(a)}{R - l\sin(a)}}\ .$$

Запишем второй закон Ньютона для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось:

$$m_2 g - \rho_ж gV - T\ cos\alpha = 0$$

Откуда

$$T = \frac{m_2 g - \rho_ж gV}{cos\alpha}$$

Однако, из условия равновесия нижнего шарика до раскручивания можем записать

$$m_2 g - \rho_ж gV - T_0 = 0.$$

Тогда

$$T = \frac{T_0}{cos\alpha}.$$

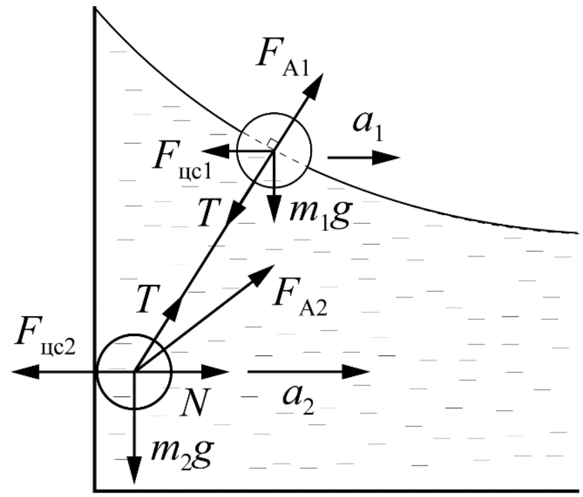
Критерии оценивания

1	Условие равновесия тяжёлого шарика до раскручивания	2 балла
2	Обосновано, что в конечном состоянии тяжёлый шарик будет касаться стенки	2 балла
3	2ЗН для лёгкого шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити (или в проекциях на две разные оси)	2 балла
4	Получен правильный ответ для угловой скорости	1 балл
5	2ЗН для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось (*даже если он не касается стенки*)	2 балла
6	Получен правильный ответ для силы натяжения (*даже если шарик не касается стенки*)	1 балл

Альтернативное решение (Неинерциальная СО)

Перейдём в НИСО связанную с вращающимся сосудом. На каждый из шариков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, центробежная сила $m\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ – горизонтальный вектор, проведённый от оси вращения к шарику), сила Архимеда $-\rho_в V(\vec{g} + \omega^2\vec{r})$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Заметим, что сумма силы тяжести и центробежной силы направлена строго против вектора силы Архимеда. Кроме того, из условия задачи следует, что плотность верхнего шарика меньше плотности воды, а нижнего – больше. Из этого следует, что если бы нити не было, то лёгкий шарик сдвигался бы к оси вращения, а тяжёлый – наоборот, от оси. Из этого можно сделать вывод, что связанные нитью шарики будут находиться по одну сторону от оси вращения.

Так как расстояние от шариков до оси вращения будет разным, то и сумма сил тяжести - центробежной и Архимеда - будет направлена для каждого шарика под своим углом к горизонту. Это означает, что шарики не могут быть уравновешены только лишь силой натяжения нити, и равновесие возможно только в случае, если тяжёлый шарик упирается в стенку сосуда.



Расставим все силы на рисунке.

Сила Архимеда, действующая на верхний шарик, коллинеарна сумме сил тяжести и инерции, тогда и сила натяжения нити должна быть ей коллинеарна.

Запишем второй закон Ньютона для лёгкого (верхнего) шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити:

$$m_1 g\ sin\alpha - m_1\omega^2 r_1\ cos\alpha = 0$$

где r_1- расстояние от оси вращения до лёгкого шарика. $r_1 = R - l\ sin\alpha$.

Из этих уравнений получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg(a)}{R - l\sin(a)}}\ .$$

Запишем второй закон Ньютона для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось:

$$m_2 g - \rho_ж gV - T\ cos\alpha = 0.$$

Откуда

$$T = \frac{m_2 g - \rho_ж gV}{cos\alpha}\ .$$

Однако, из условия равновесия нижнего шарика до раскручивания можем записать.

Тогда

$$T = \frac{T_0}{cos\alpha}.$$

Критерии оценивания альтернативного решения

1	Условие равновесия тяжёлого шарика до раскручивания	2 балла
2	Обосновано, что в конечном состоянии тяжёлый шарик будет касаться стенки	2 балла
3	2ЗН для лёгкого шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити (или в проекциях на две разные оси)	2 балла
4	Получен правильный ответ для угловой скорости	1 балл
5	2ЗН для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось (*даже если он не касается стенки*)	2 балла
6	Получен правильный ответ для силы натяжения (*даже если шарик не касается стенки*)	1 балл

Задача 10.5. Три элемента. Внутри «чёрного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая их трёх элементов: резистора с сопротивлением $R = 3{,}5$ Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$ (вольтамперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рис. 1) и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что вольтамперная характеристика неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе сила тока, протекающего через него, не убывает).
Вольтамперная характеристика «черного ящика» показана на рисунке 2.

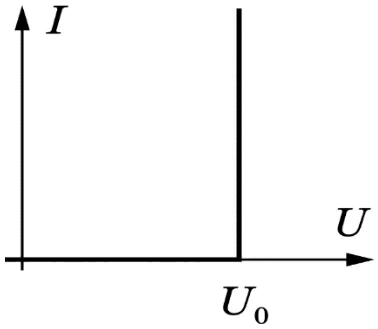


Рис. 1

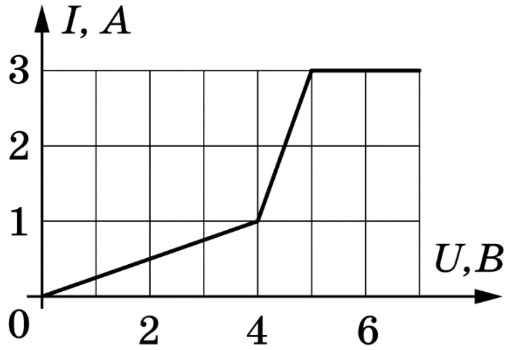


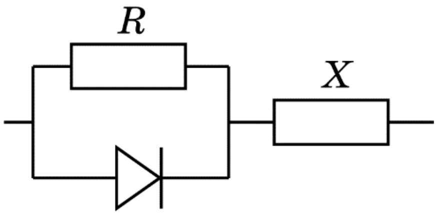
Рис. 2

Определите:

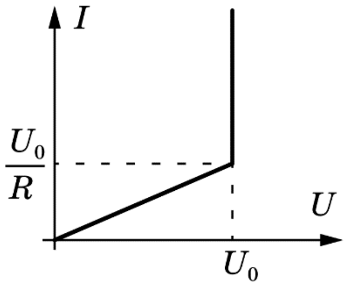
1) Возможные схемы соединения элементов в «чёрном ящике» (при некотором напряжении на выводах чёрного ящика ток должен протекать через все элементы). Свой ответ обоснуйте.
2) Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.
3) Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X.

Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ нелинейного элемента для случаев максимально возможного напряжения $U_{\max}$ открытия диода и ещё одного значения U_N открытия диода, выраженного целым числом вольт.

Возможное решение. Из ВАХ ЧЯ видно, что, начиная с некоторого значения внешнего напряжения, сила тока через ЧЯ перестает возрастать. Ни резистор, ни диод, ни их последовательное или параллельное соединение не могут так ограничивать силу тока. Значит, сила тока ограничивается неизвестным нелинейным элементом. Если бы параллельно элементу X располагался ещё какой-то участок цепи, то элемент X не смог бы ограничить общий ток через ЧЯ. Таким образом участок цепи, содержащий резистор и диод, должен быть подключён последовательно к элементу X. Оставшиеся два элемента могут быть соединены друг с другом последовательно или параллельно. Так как диод не пропускает ток при малых напряжениях, а на ВАХ ЧЯ ток при малых напряжения присутствует, то диод должен быть соединён с резистором параллельно.



Участок цепи с параллельно соединёнными диодом и резистором имеет вольтамперную характеристику, изображённую ниже.



ВАХ ЧЯ получается путём сложения вдоль оси напряжений ВАХ цепи резистор-диод и ВАХ нелинейного элемента. В самом деле, при последовательном соединении элементов через них протекает один и тот же ток, а напряжения складываются.

Понятно, что напряжение открытия диода не может превышать 5В, так как напряжение на нелинейном элементе не отрицательно, а ВАХ цепи резистор-диод не имеет горизонтального участка при силе тока 3А. ВАХ нелинейного элемента получается путём вычитания из ВАХ чёрного ящика ВАХ цепи резистор-диод. Пунктирной линией изображена ВАХ цепи диод-резистор, а точками ВАХ неизвестного нелинейного элемента.

Если открытие диода происходит при напряжении $U < 4\text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рис. 1 (для $U_0 = 2\text{ В}$). Если же открытие диода происходит при $U > 4\text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рис. 2 (для $U_0 = 4\text{ В}$). В таком случае ВАХ элемента X имеет участок, на котором сила тока возрастает с уменьшением напряжения, что противоречит условию задачи.

При $U \le 4\text{ В}$ напряжение $U_0 = 7/8\,U$, поскольку $U_0 = IR$, а $U = I \cdot 4\text{ Ом}$, где I – сила тока в цепи в момент открытия диода. Значит, $\max U_0 = 3{,}5\text{ В}$. Соответствующая этому случаю ВАХ элемента X представлена на рис. 3.

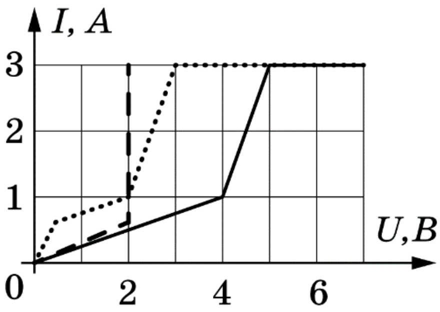


Рис. 1

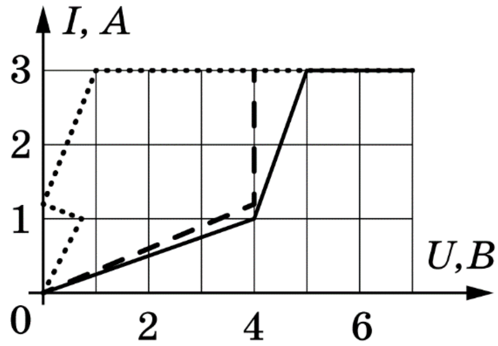


Рис. 2

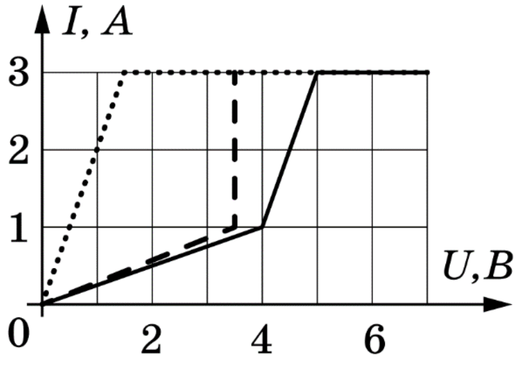


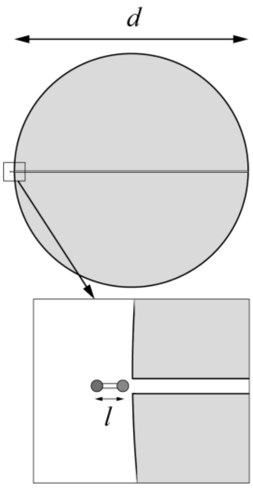
Рис. 3

Критерии оценивания

1	Указано, что нелинейный элемент подключён последовательно остальным	1 балл
2	Утверждение из п. 1 корректно обосновано	1 балл
3	Указано, что диод и резистор соединены параллельно	1 балл
4	Утверждение из п.3 корректно обосновано	1 балл
5	Приведена схема ЧЯ	1 балл
6	Указано, что напряжение открытия диода не более 5В	1 балл
7	Обосновано, что напряжение открытия не может быть более 3,5 В	1 балл
8	Найдено одно значение напряжения открытия в интервале 0-3,5 В и для него построена ВАХ нелинейного элемента	1 балл
9	Указано, что любое напряжение открытия в интервале 0-3,5 В подходит.	1 балл
10	Построены две ВАХ: для напряжения 3,5 В и одного из напряжений: 1, 2 или 3 В.	1 балл

Примечание: Если построена только одна ВАХ нелинейного элемента, для напряжения открытия от 0 до 3,5 В, то это оценивается в пункте 8, а за пункт 10 баллы не ставятся.

Задача 11.1. Диполь в шаре. В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал. Шар равномерно заряжен по объёму с объёмной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплён. Вещество шара не поляризуется.



Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_д$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_ш$.

Определите плечо диполя l, считая, что $l << d$.

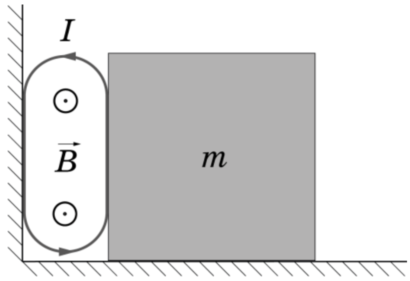
Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

Задача 11.2. Магнитная пружина. Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m. Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

1) До какой наибольшей скорости υ_m разгонится куб, если его отпустить?

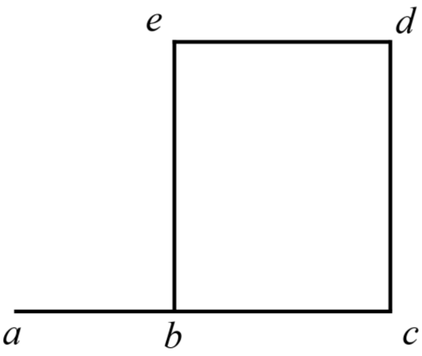
2) Через какое время t_m будет достигнута эта скорость?



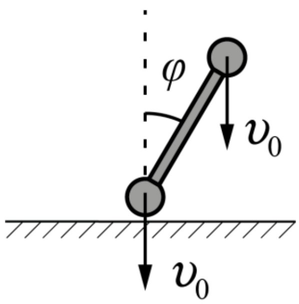
Примечание. Считайте, что при движении куба провод остаётся в одной вертикальной плоскости.

24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 11.3. Обрывок из архива Кельвина. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли диаграмму (см. рис.) квазистатического циклического процесса тепловой машины, рабочим телом которой являлось неизвестное вещество. Диаграмма процесса была построена в непривычных координатах $T(Q)$ (T – температура, Q – количество подведённой теплоты) и имела вид ломаной линии *abcdeb*. От времени чернила выцвели и координатные оси исчезли, однако из пояснений к рисунку следовало, что каждый отрезок на рисунке параллелен одной из осей координат. Восстановите построением положение осей Q и T и укажите их направления. Опишите ваш способ построения и нарисуйте в работе диаграмму с осями координат и вспомогательными линиями, использованными при построении.



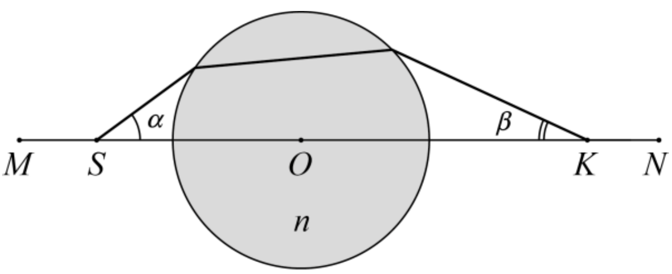
Задача 11.4. Падающая гантель. Два одинаковых маленьких шарика, соединённых невесомым твёрдым стержнем длины L, падают на гладкую, абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны υ_0, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.



1) Каковы величина скорости центра масс гантели υ_C и угловая скорость вращения стержня ω сразу после удара?

2) Под каким углом φ к вертикали был наклонён стержень перед ударом?

Задача 11.5. Прозрачный шарик. Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n. Луч, вышедший из источника S под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара, пересекает MN под углом β в точке K (см. рис.). Расстояние $SK = l$.

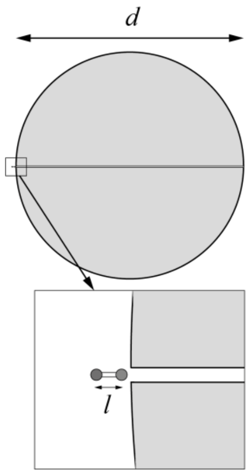


1) Определите расстояние SO от источника до центра шара и радиус R шара.

2) Вычислите SO и R для значений $n = 2, \alpha = 60^\circ C, \beta = 30^\circ C, l = 10$ см.

***24 января** на портале http://abitu.net/vseros **будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура**. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура**. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 11.1. Диполь в шаре. В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал. Шар равномерно заряжен по объёму с объёмной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплён. Вещество шара не поляризуется.



Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_д$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_ш$.

Определите плечо диполя l, считая, что $l << d$.

Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

Возможное решение. Напряжённость внутри однородно заряженного шара можно найти из теоремы Гаусса:

$$E(x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} x ,$$

где ρ – объёмная плотность заряда шара, x – расстояние до центра шара.

На диполь в электрическом поле действует равнодействующая двух кулоновских сил. Для втягивания диполя в шар нужно расположить его таким образом, чтобы ближний к центру шара заряд был положительным, так как поле ближе к центру слабее, а нам надо добиться превосходства силы притяжения над силой отталкивания.

$$F_Д = F_+ - F_- = q(E(x+l) - E(x)) = \frac{ql\rho}{3\varepsilon_0} = \text{const} ,$$

где q – заряд диполя (модуль заряда каждого из шариков).

Таким образом, диполь будет разгоняться с постоянным ускорением $a_д$ до вылета из шара.

$$\begin{cases} d = \dfrac{a_д t_д^2}{2}, \\ a_д = \dfrac{ql\rho}{6m\varepsilon_0}, \end{cases}$$

где m – масса одного из шариков диполя.

$$t_д = \sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}\sqrt{\frac{4d}{l}} .$$

Рассмотрим движение одного шарика. Если заряд шарика по знаку совпадает с зарядом большого шара, то в канал его не втянет, значит в условии речь идёт о шарике с противоположным (отрицательным) зарядом.

Второй закон Ньютона запишется в виде:

$$ma = qE(x),$$

$$m\ddot{x} = -\frac{q\rho}{3\varepsilon_0} x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}} .$$

До противоположного конца канала шарик долетит за время

$$t_ш = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}} .$$

Используя выражения для $t_ш$ и $t_д$, получаем ответ:

$$l = d\left(\frac{2}{\pi}\frac{t_ш}{t_д}\right)^2 .$$

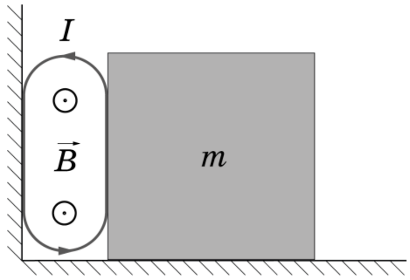
Критерии оценивания

1. Получено или использовано без вывода правильное выражение для напряжённости электрического поля $E(x)$ внутри шара	1,5 балла
2. Получено правильное выражение для силы, действующей на диполь в шаре	1,5 балла
3. Правильно указан знак заряда ближнего к центру шара шарика диполя в начальном положении	0,5 балла
4. Получено правильное уравнение движения диполя	1 балл
5. Получено правильное выражение для $t_д$	1 балл
6. Правильно указан заряд шарика, втягивающегося в шар	0,5 балла
7. Получено уравнение гармонических колебаний для движения шарика	2 балл
8. Получено правильное выражение для $t_ш$	1 балл
9. Получено правильное выражение для l	1 балл

Задача 11.2. Магнитная пружина. Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m. Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

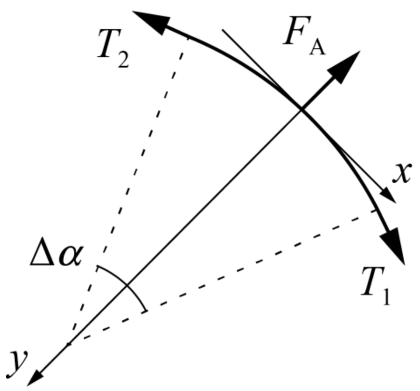
1) До какой наибольшей скорости υ_m разгонится куб, если его отпустить?

2) Через какое время t_m будет достигнута эта скорость?



Примечание. Считайте, что при движении куба провод остаётся в одной вертикальной плоскости.

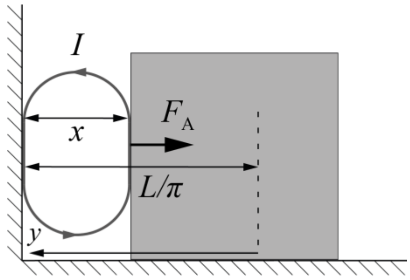
Возможное решение. Рассмотрим равновесие (бесконечно) малого участка провода, не контактирующего со стенкой или гранью куба, имеющего радиус кривизны R и угловой размер $\Delta\alpha$. Запишем условия равновесия в проекциях на оси x (проходит по касательной к проводу в середине участка) и y (проходит через центр кривизны участка). Учтём, что сила Ампера $F_A = IB\Delta l = IBR\Delta\alpha$:



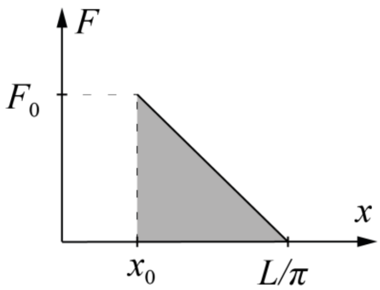
$$\begin{cases} T_1\cos(\Delta\alpha/2) = T_2\cos(\Delta\alpha/2); \\ T_1\sin(\Delta\alpha/2) + T_2\sin(\Delta\alpha/2) = IBR\Delta\alpha. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что натяжение провода постоянно: $T_1 = T_2 \equiv T$, из второго (с учётом малости $\Delta\alpha$) – что радиус кривизны постоянен на «свободных» участках провода: $R = T/(IB) = \text{const}$. Значит, эти участки – дуги окружностей. Одновременно мы замечаем, что сила натяжения – конечная величина, а остальные силы (сила Ампера, сила реакции стенки или грани куба) для любого элемента – бесконечно малые величины (порядка Δl), поэтому угол поворота провода на любом участке – тоже бесконечно малая величина порядка Δl. Это означает, что в состоянии равновесия провод не имеет изломов. Поэтому можно сделать вывод, что в каждый момент времени после отпускания системы невесомый провод, находящийся в «квазиравновесном» состоянии, состоит из двух одинаковых полуокружностей с диаметром, равным x, и двух одинаковых линейных участков, прижатых к стенке и грани куба. Следовательно, длина линейного участка провода, соприкасающегося с гранью куба, равна $l(x) = (L - \pi x)/2$. Куб разгоняется за счёт давления этого участка, которое возникает из-за силы Ампера $F_A = IBl(x) = IB(L - \pi x)/2$.

Поэтому разгон, начинающийся при $x = x_0$, заканчивается при $x = L/\pi$, когда провод перестаёт соприкасаться с гранью куба.



Обратим внимание, что поведение разгоняющий силы в точности совпадает с поведением силы упругости пружины длиной L/π с коэффициентом жёсткости $k = \pi IB/2$. Поэтому движение в процессе разгона соответствуют четверти периода гармонических «колебаний» на пружине от начальной деформации $y_0 = \frac{L}{\pi} - x_0$ до «положения равновесия». Максимальная скорость разгона



$$\upsilon_m = \omega y_0 = y_0\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right).$$

Другой способ вычисления максимальной скорости – это использование закона изменения кинетической энергии. Поскольку сила, действующая на куб, зависит линейным образом от его перемещения, то её работу можно вычислить как площадь под графиком $F(x) = IB(L - \pi x)/2$. Следовательно, изменение кинетической энергии куба в процессе разгона

$$\frac{m\upsilon_m^2}{2} = A_F = \frac{1}{2}F_0\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right) = \frac{\pi IB}{4}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right)^2,$$

то есть

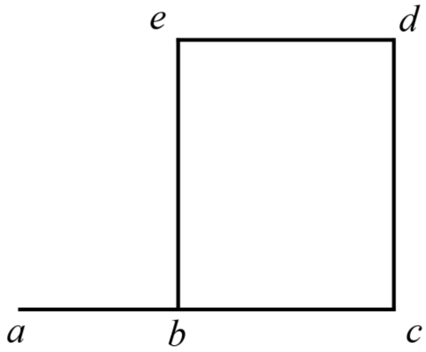
$$\upsilon_m = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right).$$

Время разгона равно четверти «периода колебаний»: $t_m = \frac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{2IB}}$.

Критерии оценивания.

№	результат	максимальный балл
1.	Доказано (с использованием условия равновесия провода), что участки провода, не соприкасающиеся со стенкой или гранью куба, имеют форму полуокружностей: • постоянство радиуса кривизны на «свободных» участках – 1,5 балла; • отсутствие изломов – 0,5 балла.	2
2.	Правильно найдена длина участка провода, соприкасающегося с гранью куба: • указано (в том числе без доказательства), что в любой момент времени провод состоит из двух линейных участков и двух полуокружностей с диаметром, равным x – 0,5 балла; • получена формула $l(x)=\dfrac{L-\pi x}{2}$ – 0,5 балла.	1
3.	Указано (или используется в решении), что разгон куба прекращается при $x = L/\pi$	1
4.	Найдена величина силы, действующей на куб со стороны провода как функция расстояния x: • записано соотношение $F = IBl(x)$ – 0,5 балла; • получена правильная формула $F_A = IB(L-\pi x)/2$ – 1,5 балла	2
5.	Правильно найдена величина максимальной скорости куба $\upsilon_m=\sqrt{\dfrac{\pi IB}{2m}}\left(\dfrac{L}{\pi}-x_0\right)$ из закона изменения энергии: • правильно вычислена работа силы – 1 балл; • получен правильный ответ для υ_m – 1 балл. из кинематики гармонического движения: • указано на гармоничность движения и записана формула $\upsilon_m=\omega y_0$ – 1 балл; • получен правильный ответ для υ_m – 1 балл	2
6.	Правильно найдено время разгона $t_m=\sqrt{\dfrac{\pi m}{2IB}}$: • указано, что время разгона соответствует четверти «периода» гармонического движения – 1 балл; • получен правильный ответ для t – 1 балл	2
	ВСЕГО	10

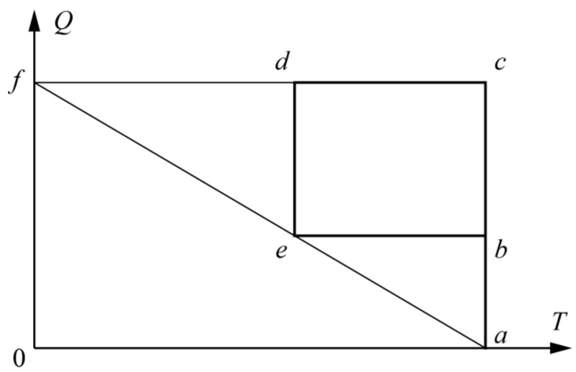
Задача 11.3. Обрывок из архива Кельвина. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли диаграмму (см. рис.) квазистатического циклического процесса тепловой машины, рабочим телом которой являлось неизвестное вещество. Диаграмма процесса была построена в непривычных координатах $T(Q)$ (T – температура, Q – количество подведённой теплоты) и имела вид ломаной линии $abcdeb$. От времени чернила выцвели и координатные оси исчезли, однако из пояснений к рисунку следовало, что каждый отрезок параллелен одной из осей координат. Восстановите построением положение осей Q и T и укажите их направления. Опишите ваш способ построения и нарисуйте в работе диаграмму с осями координат и вспомогательными линиями, использованными при построении.



Возможное решение. Поскольку все отрезки параллельны координатным осям Q и T, на рисунке представлен цикл Карно. Отрезки cd и eb не могут быть параллельны оси Q, иначе в точке b температура отличается от температуры точки a, а это невозможно в циклическом процессе. Поэтому abc и de параллельны оси Q, а cd и eb – оси T. Ось температур должна проходить через точку a, так как с неё начинается отсчёт подведённой теплоты.

Перейдём к построению осей. Здесь и далее подстрочный индекс «х» относится к холодильнику, индекс «н» – к «нагревателю». КПД цикла Карно $\eta = 1 - \frac{T_{\text{Х}}}{T_{\text{Н}}} = 1 - \frac{Q_{\text{Х}}}{Q_{\text{Н}}}$, откуда $\frac{Q_{\text{Н}}}{T_{\text{Н}}} = \frac{Q_{\text{Х}}}{T_{\text{Х}}}$.

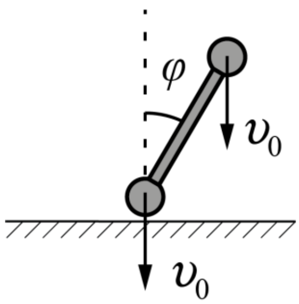
Проведём прямые через cd и ae. Они пересекаются в некоторой точке f. Так как длина ed соответствует $Q_{\text{х}}$, длина ac соответствует $Q_{\text{н}}$, ed – изотерма при $T_{\text{х}}$, а ac – изотерма при $T_{\text{н}}$, то из последнего соотношения следует, что прямые cd и ae пересекаются на оси Q над началом координат. Таким образом, точка f принадлежит оси Q и лежит над началом координат. Проведём прямую, параллельную cd через точку a и проведём перпендикуляр к ней из точки f. Точка пересечения даст нам начало координат, а сам перпендикуляр будет являться осью Q. В условии указано, что это цикл тепловой машины, следовательно, это прямой цикл, поэтому ось Q имеет направление, указанное на рисунке.



Критерии оценивания

1) Указано, что на рисунке цикл Карно	1 балл
2) Указано, что abc и de – изотермы	1 балл
3) Указано, что cd и eb – адиабаты	1 балл
4) Использовано соотношение $\frac{Q_{\text{Н}}}{T_{\text{Н}}} = \frac{Q_{\text{Х}}}{T_{\text{Х}}}$ или эквивалентное ему	2 балла
5) Установлено, что ось температур проходит через точку a и верно указано её направление	1,0 балл
6) Показано, что точка пересечения прямых cd и ae принадлежит оси Q	3 балла
7) Восстановлена ось Q и верно указано её направление	1,0 балл

Задача 11.4. Падающая гантель. Два одинаковых маленьких шарика, соединённых невесомым твёрдым стержнем длины L, падают на гладкую, абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны v_0, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.



1) Каковы величина скорости центра масс гантели v_c и угловая скорость вращения стержня ω сразу после удара?

2) Под каким углом φ к вертикали был наклонён стержень перед ударом?

Возможное решение

Определение скорости центра масс и угловой скорости

Вариант 1. Рассмотрим момент времени сразу после удара. Из закона сохранения энергии следует

$$m{v_0}^2 = \frac{m({v_1}^2 + {v_2}^2)}{2}$$

$${v_1}^2 + {v_2}^2 = 2{v_0}^2,$$

где индексы 1 и 2 обозначают нижний и верхний шарики, соответственно.

Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и находится из выражения

$$\overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}}{2}$$

$$v_c = \frac{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

Из закона сложения скоростей $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ имеем

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = v_0\sqrt{2}.$$

Угловая скорость вращения стержня равняется $\omega = \frac{v_{\text{отн}}}{L}$.

Таким образом, ответы на первый вопрос:

$$v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \text{ и } \omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Вариант 2. Найти скорость центра масс и угловую скорость стержня можно также, используя теорему Кёнига:

$$E_{\text{кин}} = 2m\frac{{v_c}^2}{2} + E_{\text{вр}} = m{v_0}^2.$$

Здесь $E_{\text{вр}} = 2m\frac{(\frac{\omega L}{2})^2}{2} = \frac{m\omega^2 L^2}{4}$ представляет собой кинетическую энергию вращения системы относительно центра масс, v_c – скорость центра масс после удара. Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и определяется выражением $\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$. С учётом перпендикулярности $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$

$$v_c = \frac{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}{2}.$$

Из закона сохранения энергии ${v_1}^2 + {v_2}^2 = 2{v_0}^2$. Подставляя это в выражение для v_c, получаем

$$v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя выражения для $E_{\text{вр}}$ и v_c в уравнение для $E_{\text{кин}}$, получим для угловой скорости тот же ответ, что и первым способом:

$$\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Примечание. Возможны другие варианты, комбинирующие закон сохранения энергии и условие перпендикулярности векторов. Все они оцениваются одинаково при корректном получении правильных ответов.

Определение угла φ

Вариант 1 (сохранение проекции импульса верхнего шарика)

Ответ можно получить, используя тот факт, что для верхнего шарика выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось, перпендикулярную стержню. Этот факт следует из того, что единственная сила, действие которой на верхний шарик за бесконечно малое время соударения существенно – это сила реакции стержня, направленная строго вдоль стержня. До удара проекция скорости шарика на эту ось равна

$$v_x = v_0 \sin\varphi.$$

После удара, воспользовавшись законом сложения скоростей, получим для проекции

$$v_x = \frac{\omega L}{2} - v_c \sin\varphi.$$

Из этих двух уравнений, используя ранее полученные выше выражения для v_c и ω, получаем ответ для φ:

$$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0 + v_c)} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \varphi = arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 24{,}5°.$$

Вариант 2 (использование закона сохранения момента импульса)

Внешняя сила, действующая на гантель во время удара – сила нормальной реакции гладкой поверхности – имеет нулевое плечо относительно точки удара нижнего шарика о поверхность. Поэтому момент импульса гантели относительно оси, проходящей через эту точку, сохраняется. При этом момент импульса гантели относительно этой оси равен моменту импульса верхнего шарика 2, а скорость которого после удара $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр}2}$. Мы уже знаем, что сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и равна по величине $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Скорость вращения $\vec{v}_{\text{вр}2}$ направлена перпендикулярно стержню, а её модуль $\left|\vec{v}_{\text{вр}2}\right| = \frac{\omega L}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Поэтому закон сохранения момента импульса имеет вид

$$mv_0 Lsin\varphi = -m\frac{v_0}{\sqrt{2}}Lsin\varphi + mL\frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Выражая из этого соотношения синус искомого угла, получим $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Итак, $\varphi = arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 24{,}5°$.

Вариант 3 (использование закона изменения момента импульса)

В случае непостоянства момента импульса относительно выбранной точки мы должны учесть изменение момента импульса из-за внешних сил. В рамках данной задачи момент импульса может меняться только под действием реакции поверхности. Из теоремы о движении центра масс найдём импульс, переданный поверхностью шарикам,

$$\Delta P_N = 2m(v_0 + v_c)$$

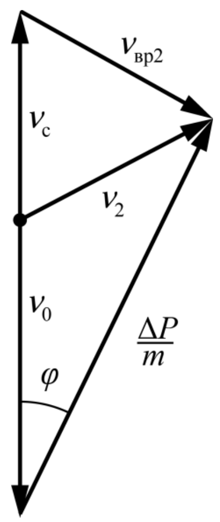
Запишем закон изменения момента импульса относительно центра масс:

$$2\frac{mL^2\omega}{4} = \frac{mL^2\omega}{2} = \frac{\Delta P_N L\sin\varphi}{2}.$$

Отсюда, используя ранее полученные выражения для v_c и ω, получаем ответ для φ.

$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0+v_c)} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \varphi = arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 24{,}5°$.

Вариант 4 (использование векторных диаграмм).



Поскольку стержень невесом, а время удара мало, изменение импульса верхнего шарика $\Delta\vec{P}$ направлено вдоль стержня. Представим скорость этого шарика двумя способами:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta\vec{P}}{m}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{вр2}$$

Здесь $\vec{v}_{вр2}$ - скорость верхнего шарика в системе центра масс после удара. Поскольку стержень твёрдый, $\frac{\Delta\vec{P}}{m}$ и $\vec{v}_{вр2}$ перпендикулярны. Изобразим это геометрически.

Поскольку $v_{вр2} = \frac{\omega L}{2}$, из прямоугольного треугольника получим:

$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0+v_c)} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \varphi = arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 24{,}5°$.

Критерии оценивания

Ответ на вопрос 1 (5 баллов)

Вариант 1 (кинематика)

1. Из закона сохранения энергии получено $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$ 1 балл
2. Записано выражение для скорости центра масс $\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}$ 0,5 балла
3. Получено верное выражение для скорости центра масс $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ 1 балл
4. Выражение для угловой скорости вращения через относительную скорость шариков $\omega = \frac{v_{\text{отн}}}{L}$ 1 балл
5. Выражение для относительной скорости движения шариков $v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2{}^2}$ 0,5 балла
6. Получено верное выражение для угловой скорости $\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}$ 1 балл

Всего: 5 баллов

Вариант 2 (использование теоремы Кёнига)

1. Использовано при решении выражение для кинетической энергии гантели после удара в виде $E_{\text{кин}} = 2m\frac{v_c{}^2}{2} + E_{\text{вр}} = mv_0{}^2$ 1 балл
2. Из закона сохранения энергии получено $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$ 0,5 балла
3. Из определения скорости центра масс $\overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}{2}$ и закона сохранения энергии $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$, с учётом перпендикулярности $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$, получено выражение для v_c, а именно $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ 1,5 балла
4. Использовано для решения выражение для энергии вращения в системе центра масс $E_{\text{вр}} = \frac{m\omega^2 l^2}{4}$ 1 балл
5. Получено верное выражение для угловой скорости $\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}$ 1 балл

Всего: 5 баллов

Ответ на вопрос 2 (5 баллов)

Вариант 1 (сохранение проекции импульса верхнего шарика) вдоль

1. Указано, что сила, действующая на верхний шарик, направлена стержня и проекция импульса на перпендикулярное направление сохраняется 1 балл
2. Выражение для проекции импульса верхнего шарика на направление, перпендикулярное стержню до удара, $p_x = mv_0 \sin\varphi$ 1 балл
3. Выражение для проекции импульса верхнего шарика после удара на направление, перпендикулярное стержню, с использованием полученных выражений для скорости центра масс и угловой скорости вращения $p_x = m(\frac{\omega L}{2} - v_c \sin\varphi_0)$ 2 балла

4. Получен верный ответ для φ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Вариант 2 (использование закона сохранения момента импульса)

1. Записан закон сохранения момента импульса относительно точки удара нижнего шарика о поверхность — 3 балла
2. С использованием ранее полученных результатов для v_c и ω получен верный ответ для φ — 2 балла

Всего: 5 баллов

Вариант 3 (использование закона изменения момента импульса)

1. Выражение для импульса, полученного гантелей при столкновении с поверхностью $P_N = 2m(v_0 + v_c)$ — 1 балл
2. Записан закон изменения момента импульса относительно выбранной участником точки — 2 балла
3. С использованием ранее полученных результатов для v_c и ω получен верный ответ для φ — 2 балла

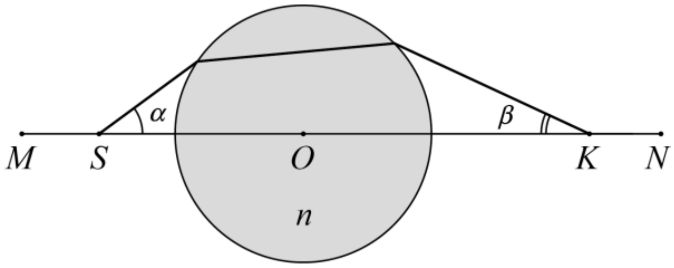
Всего: 5 баллов

Вариант 4 (использование векторных диаграмм)

1. Указано, что сила, действующая на верхний шарик, направлена вдоль стержня — 1 балл
2. Записано выражение для скорости верхнего шарика после удара в векторной форме через изменение импульса для верхнего шарика $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta\vec{P}}{m}$ — 1 балл
3. Записано выражение для скорости верхнего шарика после удара в векторной форме через скорость центра масс и скорость второго шарика в системе центра масс $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр}2}$ — 1 балл
4. Использована векторная диаграмма и перпендикулярность $\vec{v}_2$ и $\Delta\vec{P}$ — 1 балл
5. Получен верный ответ для φ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Задача 11.5. Прозрачный шарик. Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n. Луч, вышедший из источника S под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара, пересекает MN под углом β в точке K (см. рис.). Расстояние $SK = l$.



1) Выразите радиус R шара и расстояние SO от источника до центра шара через параметры l, α, β, n.

2) Вычислите SO и R для значений $n = 2,\ \alpha = 60°\text{C},\ \beta = 30°\text{C},\ l = 10$ см.

Возможное решение

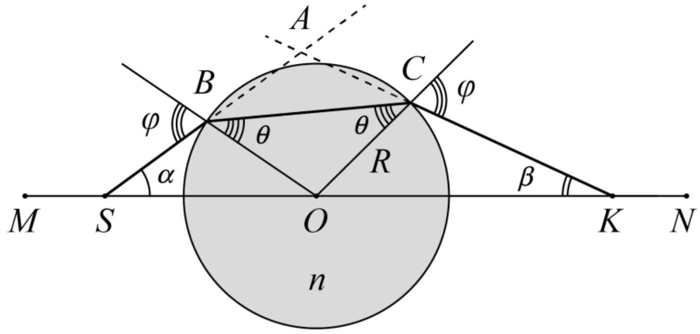


рис.1.

Пусть B – точка падения луча, о котором идёт речь в задаче, на поверхность шара (рис.1.), C – точка выхода луча из шара, φ и θ – углы падения и преломления, связанные законом Снелла: $\sin\varphi = n\sin\theta$, A – точка пересечения продолжений лучей SB и CK. Так как треугольник OBC – равнобедренный, то угол падения в точке C равен углу преломления θ в точке B. Согласно закону преломления угол преломления в точке C будет равен углу падения φ в точке B. С учётом этого, по теореме синусов, для треугольников SBO и OCK:

$$\frac{SO}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{OK}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\beta}.$$

Следовательно, $$\frac{SO}{OK} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Тогда ответ на первый вопрос: $$SO = l\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

Обратите внимание на то, что и в точке B, и в точке C угол отклонения луча при преломлении равен $\gamma = \varphi - \theta$. Поэтому полный угол отклонения луча равен 2γ. Следовательно, $\angle SAK = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - 2\gamma$, то есть $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Таким образом, справедливо соотношение $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \gamma)} = n$, из которого следует:

$$\sin\varphi = n\sin\varphi\cos\gamma - n\sin\gamma\cos\varphi.$$

Из последнего уравнения находим $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{n\sin\gamma}{n\cos\gamma - 1}$ и $\sin\varphi = \dfrac{n\sin\gamma}{\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}$.

Из теоремы синусов для треугольника SBO следует $\dfrac{SO}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

Запишем формулы для ответа на второй вопрос:

$$R = SO\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = l\frac{\sin\alpha\sin\beta\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}{(\sin\alpha + \sin\beta)n\sin\gamma}.$$

После подстановки заданных численных значений получаем: SO = 3,66 см, R = 3,30 см.

Критерии оценивания

1. Проведён анализ хода луча в шаре, то есть на рисунке отмечены углы падения и преломления для луча, падающего на шар, и луча, выходящего из шара — 0,5 балла
2. Записан закон Снелла для этих лучей $\sin\varphi = n\sin\theta$ — 0,5 балла
3. Указано (или используется в решении), что угол падения при входе луча в шар равен углу преломления при выходе из шара и угол преломления при входе в шар равен углу падения при выходе — 1 балл
4. Получено соотношение $\frac{SO}{OK} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ или эквивалентное — 1 балл
5. Получен верный ответ для SO — 1 балл
6. Получено верное выражение для связи угла поворота луча с углами α и β $\left(\varphi - \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ или эквивалентное — 1 балл
7. Получено верное выражение для угла падения или угла преломления через данные задачи — 1 балл

Примечание: *если это выражение получено другим корректным способом, без вычисления угла поворота луча, то балл за п.6 тоже ставится.*

8. Получен верный ответ для R — 2 балла
9. Получено численное значение SO — 1 балл
10. Получено численное значение R — 1 балл