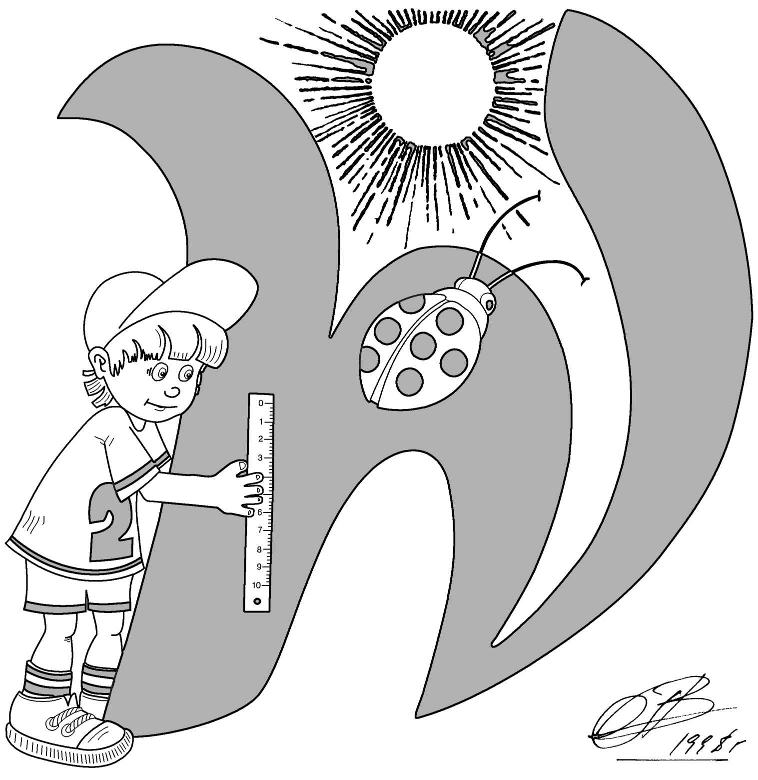
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 1999/2000 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Кирьяков Б.	1. Шведов О.	1. Прокопенко Т.
2. Шведов О.	2. Плис В.	2. Варгин А.
3. Мельниковский Л.	3. Гуденко А.	3. Чивилев В.
4. Судаков О.	4. Шведов О.	4. Варгин А.
	5. Шеронов А.	5. Имамбеков А.

Ответственные за классы

9 класс	10 класс	11 класс
Шведов О.	Мельниковский Л.	Чивилев В.

Общая редакция — Дунин С., Овчинников О., Слободянин В.

Оформление и верстка — Дидовик А., Макаров А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:38.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Свободное падение

Оцените (численно) максимальную скорость, которую может развить парашютист в затяжном прыжке (до раскрытия парашюта). Известно, что сила сопротивления воздуха F, действующая на парашютиста, является степенной функцией его скорости v, характерного размера a и плотности воздуха ρ: $F = \alpha\rho^m a^n v^k$, где α — безразмерный множитель порядка единицы, m,n,k — некоторые числа. Плотность воздуха ρ принять равной 1 кг/м^3, характерный размер парашютиста 0 5 м.

Задача 2. Скорая помощь

Грузовик въезжает с постоянной по модулю скоростью v на горку по дороге, профиль которой изображен на рисунке (рис. 1). Дорога состоит из прямолинейных участков (горизонтальных и под углом α к горизонту) и дуг окружности радиуса R. В кузове грузовика находится незакрепленный груз. При каком минимальном коэффициенте трения $\mu_{\text{кр}}$ груза о кузов груз будет неподвижен относительно грузовика во время движения? В каком месте дороги груз начнет скользить по кузову, если коэффициент трения будет чуть меньше, чем $\mu_{\text{кр}}$? Ответ обоснуйте. Размеры грузовика пренебрежимо малы по сравнению с R.

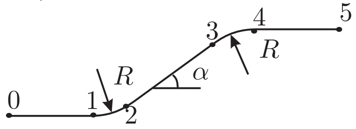


Рис. 1

Задача 3. Три кипятильника

На открытой площадке находятся три одинаковые банки со льдом, в которые помещены одинаковые электрические нагревательные элементы. В некоторый момент эти элементы включают в три разные розетки с напряжениями $U_1 = 380$ В, $U_2 = 220$ В и $U_3 = 127$ В. В первой банке весь лед растаял за $t_1 = 2$ мин, а во второй — за $t_2 = 10$ мин. За какое время t_3 растает весь лед в третьей банке? Начальная температура льда во всех банках 0°С. Сопротивление нагревательного элемента не зависит от величины протекающего тока. Считайте, что в любой момент времени температура внутри каждой банки одинакова по всему объему.

Задача 4. Точка отрыва

Груз массы m прикреплен к потолку легкой пружиной жесткости k. В начальный момент времени груз лежит на подставке П, пружина не растянута, а ее ось вертикальна (рис. 2). На какую максимальную длину L растянется пружина, если подставка начнет опускаться с ускорением a? Постройте график зависимости $L(a)$. Попытайтесь подобрать удобные масштабы для переменных L и a.

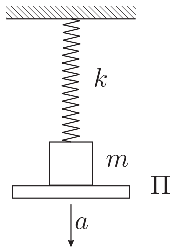


Рис. 2

10 класс

Задача 1. Планета переменной плотности

Плотность вещества некоторой планеты, имеющей форму шара радиуса $R = 6400$ км, зависит только от расстояния до центра планеты. При бурении скважины глубиной несколько десятков километров обнаружилось, что ускорение свободного падения не зависит от глубины погружения под поверхность планеты. Найти плотность вещества, из которого состоит поверхность планеты, если средняя плотность планеты, равная отношению ее массы к объему, равна $\rho = 5{,}5$ г/см^3. Объем шара радиуса R равен $4\pi R^3/3$.

Задача 2. Муха-Цокотуха

В электростатических полях Муха-Цокотуха умеет летать только по эквипотенциальным поверхностям. Ее поместили между обкладками заряженного плоского конденсатора (рис. 3) на оси OO' на расстоянии $\frac{9999}{20000}d$ от одной из них (d — расстояние между пластинами). Обкладки конденсатора имеют форму круга, радиуса R, причем $R \gg d$. На каком расстоянии r от конденсатора будет Муха, когда окажется вне конденсатора на его оси симметрии.

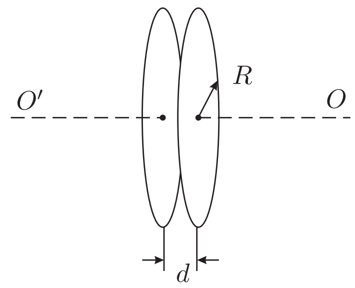


Рис. 3

Задача 3. Два цилиндра

Система из двух жестко соединенных цилиндров одинакового радиуса и весом $P = 2$ Н каждый находится в горизонтальном желобе с гладкими стенками. Коэффициент трения правого цилиндра о поверхность $\mu_1 = 0 3$, а левого — $\mu_2 = 0 1$. Цилиндры можно тащить за нить, прикрепляемую к одному из колец на внешней стороне цилиндров.

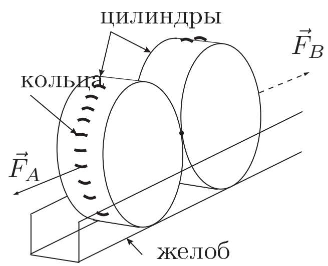


Рис. 4

1. В какую сторону легче сдвинуть эту систему, прикладывая горизонтальную силу к нити, направленной вдоль линии, соединяющей центры цилиндров.

2. Найти минимальные горизонтальные силы F_A и F_B, необходимые для того, чтобы сдвинуть систему вправо и, соответственно, влево.

3. Можно ли эту систему сдвинуть влево или вправо, потянув ее в горизонтальном направлении за нить прочностью $T = 0 7$ Н. Ответ обоснуйте.

Задача 4. Разрядка конденсатора

Заряженный конденсатор емкости C разряжают через элемент с неизвестной вольтамперной характеристикой, при этом ток в цепи зависит от времени как $I(t) = I_0 - at$, $0 < t < I_0/a$, I_0 и a — положительные константы. В момент времени $t_0 = I_0/a$ конденсатор разряжается полностью. Найдите вольтамперную характеристику элемента.

Задача 5. Нетривиальный процесс

Температура ν молей газообразного гелия увеличивается в процессе, теплоемкость которого изменяется прямо пропорционально температуре T: $c(T) = 3RT/4T_1$, где T_1 — начальная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. Какую работу A совершит газ к моменту, когда его объем станет минимальным в указанном выше процессе?

11 класс

Задача 1. За решёткой

Найти сопротивление между точками A и B проволочной сетки с квадратными ячейками. Сопротивление куска проволоки длиной равной стороне квадрата ячейки $r = 2\,4$ Ом.

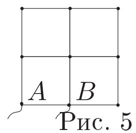


Рис. 5

Задача 2. Шайба

Небольшая шайба B скользит по гладкой внутренней поверхности воронки, описывая окружность в горизонтальной плоскости. В результате незначительного толчка вверх вдоль поверхности скольжения шайба сошла с орбиты и вылетела из воронки со скоростью v. Зная, что $H = 100$ см, $H_1 = 75$ см, найти v. Считать, что для точек профиля внутренней поверхности воронки координата y обратно пропорциональна квадрату радиуса воронки r: $y \sim 1/r^2$ (рис. 6).

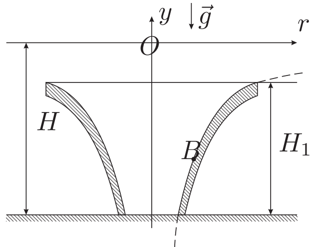


Рис. 6

Задача 3. Собака на санках

С горки с углом наклона к горизонту α съезжают по кратчайшему пути с постоянной скоростью v_1 санки массой M (рис. 7). За санками бежит собака массой m и запрыгивает на них, имея в начале прыжка скорость v_0, направленную под углом β к поверхности горки. Найти скорость санок с собакой, если известно, что санки после соприкосновения с собакой не останавливались.

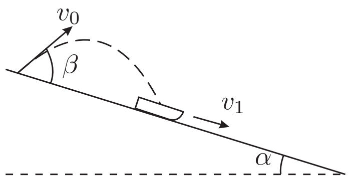


Рис. 7

Задача 4. Декремент затухания

Тело массой m может совершать колебания с помощью легкой пружины жесткостью k по горизонтальной поверхности стола вдоль направления оси пружины (рис. 8). Трения между телом и столом нет, но на тело во время движения действует сила сопротивлнеия, пропорциональная его скорости $\vec{F}_c = -\gamma\vec{v}$, где $\gamma > 0$. Телу при недеформированной пружине сообщают скорость v_0 и на него начинает действовать сила, изменяющаяся со временем по гармоническому закону. Оказалось, что полная энергия установившихся колебаний в любой момент времени равна начальной энергии системы. Считая известными m,k,γ,v_0, найти циклическую частоту ω и максимальную величину F_0 вынуждающей гармонической силы.

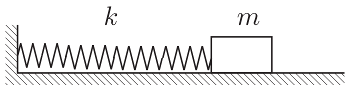


Рис. 8

Задача 5. Архив лорда Кельвина

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, совершенного над идеальным газом (рис. 9). От времени чернила выцвели и от координатных осей P (давление) и V (объем) осталась только точка O их пересечения. Из пояснений к тексту следовало, что в точке A температура газа максимальна, а кратчайший поворот от положительного направления оси V к положительному направлению оси P совершается против часовой стрелки. Восстановите построением положение осей P и V.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Свободное падение

Для определения чисел m,n,k воспользуемся соображениями размерности. Сила измеряется в кг · м/с^2, плотность - в кг/м^3, размер a — в м, скорость — м/с. Отсюда

$$\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}^m}{\text{м}^{3m}}\text{м}^n\frac{\text{м}^k}{\text{с}^k}.$$

Приравнивая степени при кг,м,с в левой и правой частях данного равенства, получаем:

$$1 = m, \qquad 1 = -3 + k + n, \qquad -2 = -k.$$

Отсюда

$$m = 1, n = 2, k = 2,$$

$$F = \alpha\rho a^2 v^2.$$

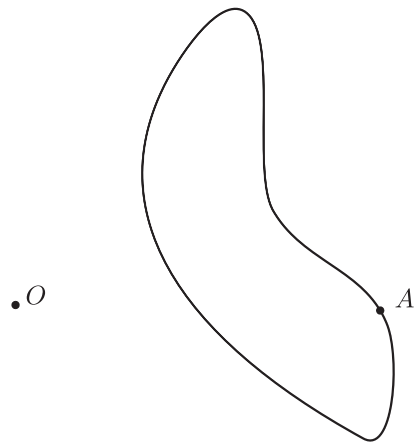


Рис. 9

Установившаяся скорость парашютиста в затяжном прыжке определяется из соотношения

$$Mg = \alpha\rho a^2 v^2.$$

Подставляя $M \approx 70$ кг, $\rho = 1$ кг/м^3, $a^2 \approx 0\,25$ м^2, $\alpha \approx 1$, $g = 10$ м/с^2, получаем $v^2 \approx 2800$ м^2/с^2, $v \approx 50 - 60$ м/с.

Задача 2. Скорая помощь

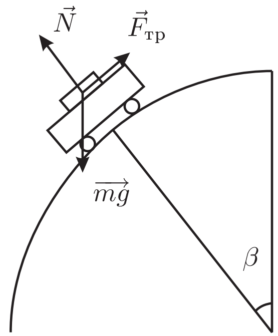


Рис. 10

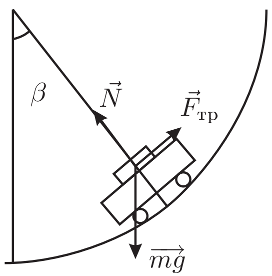


Рис. 11

При движении по наклоненному под углом α прямолинейному участку дороги груз не будет скользить по кузову, если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим движение по участкам дороги, которые имеют форму дуг окружностей радиуса R. Обозначим через m массу груза, N — силу реакции со стороны кузова, $F_{\text{тр}}$ — силу трения груза о кузов. Так как центростремительное ускорение равно v^2/R, то для движения по участку дороги 3–4, выпуклому вверх:

$$mg\cos\beta - N = mv^2/R \qquad \text{и} \qquad mg\sin\beta = F_{\text{тр}}.$$

Так как в случае отсутствия скольжения $F_{\text{тр}} < \mu N$, то груз не будет скользить при $\mu > \frac{\sin\beta}{\cos\beta - v^2/gR}$.

Отметим, что при $\cos\beta - v^2/gR < 0$ грузовик оторвется от дороги, поэтому условие задачи о движении грузовика по дороге выполнено не будет.

Аналогично, для вогнутого участка дороги 1–2 получаем, что груз не будет скользить при $\mu > \frac{\sin\beta}{\cos\beta + v^2/gR}$.

Таким образом, случай

$$\cos\alpha - \frac{v^2}{gR} < 0$$

не соответствует условию задачи, а при

$$\cos\alpha - \frac{v^2}{gR} \geqslant 0$$

груз не будет скользить, если

$$\mu > \mu_{\text{кр}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - v^2/gR}.$$

Если μ будет чуть меньше, чем $\mu_{\text{кр}}$, груз в точке 3 начнет скользить по кузову.

Задача 3. Три кипятильника

Подводимое ко льду тепло складывается из мощности нагревательного элемента и теплообмена с окружающей средой. Во время плавления температура льда остается постоянной (и равной 0°C), поэтому мощность теплообмена с окружающей средой тоже постоянна и одинакова для всех банок. Обозначим ее P_1. Выделяющаяся на нагревательном элементе мощность $P_2 = UI = U^2/R$, где U и I — напряжение на нагревательном элементе и ток в нем, а R — его сопротивление.

Пусть энергия, необходимая для плавления льда, равна W, а полная подводимая мощность $P_{\text{общ}} = P_1 + P_2 = P_1 + U^2/R$. Время, необходимое для таяния льда, обратно пропорционально мощности $t = W/P_{\text{общ}}$. Отсюда получаем:

$$\frac{P_1 + U_1^2/R}{P_1 + U_2^2/R} = \frac{t_2}{t_1}$$

$$P_1 R = \frac{U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1}{t_1 - t_2} = -2{,}44 \cdot 10^4\ \text{В}^2.$$

Таким образом, оказывается, что $P_1 < 0$, т.е. тепло *отводится* ото льда к окружающей среде. Минимальное напряжение, достаточное для плавления льда (т.е. такое что $P_1 + P_2 > 0$), очевидно, определяется выражением $U_{\min} = \sqrt{-P_1 R} = 156$ В. Значит, нагревательный элемент, питаемый напряжением $U_3 = 127$ В, никогда не расплавит этот лед.

Задача 4. Точка отрыва

Рассмотрим случай $a < g$. До отрыва груза от подставки $a = (mg - N - kx)/m$, где N — реакция опоры, x — удлинение пружины. В момент отрыва груза от подставки $N = 0$, а удлинение $x_0 = m(g-a)/k$. В положении равновесия груза на пружине ее удлинение $x_1 = mg/k$. После отрыва от подставки на груз будет действовать сила $F = mg - kx$. График зависимости силы от удлинения x пружины приведен на рисунке (рис. 12). В момент начала движения подставки и в моммент максимального удлинения пружины скорость груза равна 0, в точке x_1 — скорость максимальна.

Таким образом на участке $(0,x_1)$ работа внешних сил идет на ускорение груза, а численно она равна площади трапеции над осью Ox. На участке (x_1,L) работа внешних сил идет на торможение груза и численно равна площади треугольника под осью Ox. Ясно, что площади должны быть равны друг другу.

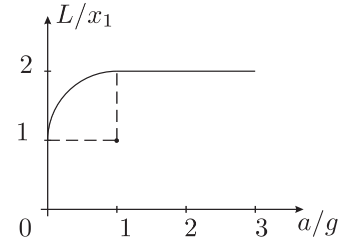


Рис. 13

$$\frac{1}{2}(x_0 + x_1)ma = \frac{1}{2}(L - x_1)(kL - mg),$$

$$(\frac{x_0}{x_1} + 1)\frac{a}{g} = (\frac{L}{x_1} - 1)(\frac{L}{mg/k} - 1),$$

$$2\frac{a}{g} - (\frac{a}{g})^2 = (\frac{L}{x_1} - 1)^2,$$

$$(\frac{L}{x_1} - 1)^2 + (\frac{a}{g} - 1)^2 = 1.$$

Значит, для $a/g < 1$ график представляет собой четверть дуги окружности с центром в точке $L/x_1 = 1$, $a/g = 1$.

В случае, если $a \geqslant g$ отрыв груза от подставки происходит сразу после начала ее движения и $L = 2x_1$. Окончательно,

$$L = x_1\left(1 + \sqrt{\frac{a}{g}(2 - \frac{a}{g})}\right), \qquad \text{при} \qquad a < g;$$

$$L = 2x_1, \qquad \text{при} \qquad a \geqslant g.$$

10 класс

Задача 1. Планета переменной плотности

Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра планеты равно $g(r) = GM(r)/r^2$, где $M(r)$ — масса вещества, находящегося внутри сферы радиуса r с центром, совпадающим с центром планеты. Имеем:

$$M(R) = M, \qquad M(R - \Delta R) \approx M - 4\pi R^2 \Delta R \rho_{\text{пов}},$$

где $\rho_{\text{пов}}$ — плотность вещества, из которго состоит поверхность планеты.

Отсюда

$$\frac{M - 4\pi R^2 \Delta R \rho_{\text{пов}}}{(R - \Delta R)^2} \approx \frac{M}{R^2},$$

$$MR^2 - 4\pi R^4 \Delta R \rho_{\text{пов}} \approx MR^2 - 2MR\Delta R + M(\Delta R)^2.$$

Пренебрегая последним слагаемым в правой части, находим:

$$2\pi R^3 \rho_{\text{пов}} = M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{ср}},$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — средняя плотность вещества, из которого состоит планета. Отсюда $\rho_{\text{пов}} = \frac{2}{3}\rho_{\text{ср}} = 3{,}7$ г/см^3.

Задача 2. Муха-Цокотуха

Пусть в середине конденсатора потенциал равен 0, тогда на расстоянии $d/20000$ от середины потенциал равен $\varphi_x = \frac{d}{20000}\frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}$, где Q — заряд на обкладках.

На больших расстояниях вдоль оси поле конденсатора — это поле двух точечных зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r+d}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{r^2}.$$

Условие равенства потенциалов дает:

$$\frac{d}{20000}\frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{r^2}, \qquad r = R\sqrt{5000} \approx 70\ 7R.$$

Задача 3. Два цилиндра

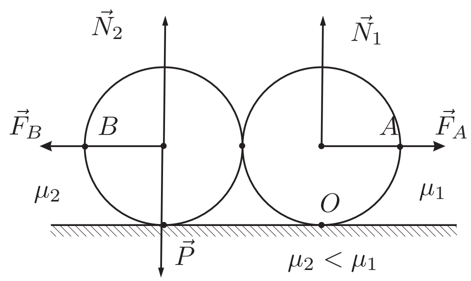


Рис. 14

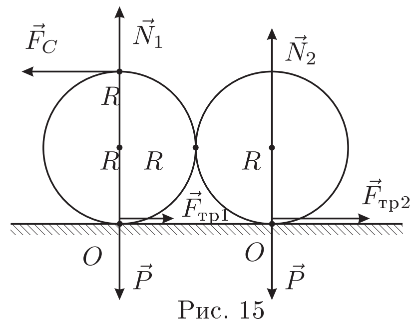


Рис. 15

Пусть на систему действует сила F_A. Запишем равенство моментов сил относительно т. O:

$$F_A R + N_2 2R = P 2R.$$

Из условия равновесия получаем еще два уравнения:

$$N_1 + N_2 = 2P,$$

$$F_A = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2.$$

Решая систему (1)–(3), получаем

$$F_A = \frac{2P(\mu_1 + \mu_2)}{2 - (\mu_1 - \mu_2)} \approx 0\ 89 \text{ Н}.$$

Аналогичным образом найдем

$$F_B = \frac{2P(\mu_1 + \mu_2)}{2 + (\mu_1 - \mu_2)} \approx 0\ 72 \text{ Н}.$$

Из (1) видно, что если увеличить плечо горизонтальной силы, то это приведет к уменьшению реакции опоры N_2 и, следовательно, к уменьшению силы трения. Приложим горизонтальную силу F_C в точке C. Тогда уравнение (1) получит вид $F_C 2R + N_2 2R = P 2R$. Решая полученную систему, получим:

$$F_C = \frac{P(\mu_1 + \mu_2)}{1 + (\mu_1 - \mu_2)} = P/3 = 0\ 67 \text{ Н}.$$

Значит, с помощью нити прочностью 0 7 Н систему сдвинуть можно.

Задача 4. Разрядка конденсатора

Заряд на конденсаторе в момент времени t представляется в виде площади треугольника (рис. 16), т.е. $Q = a(t_0 - \tau)^2/2$.

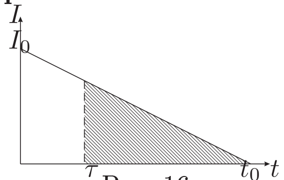


Рис. 16

Напряжение на конденсаторе

$$U = Q/C = a(t_0 - \tau)^2/(2C)$$

совпадает с напряжением на элементе, ток через который равен $I = a(t_0 - \tau)$. Отсюда $U = I^2/(2aC)$, $0 < I < I_0$ — вольтамперная характеристика элемента.

Задача 5. Нетривиальный процесс

Как видно, до температуры T_2, где $c(T_2) = c_V$ и $T_2 = 2T_1$, изменение внутренней энергии $\Delta U = \nu\frac{3}{2}R(T - T_1)$ больше подведенного к нему тепла $\Delta Q = \nu\frac{3}{8}c_{T_1}(T^2 - T_1^2)$.

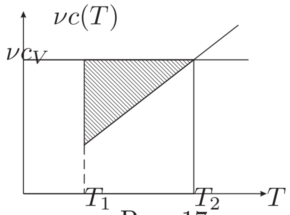


Рис. 17

Поэтому до температуры T_2 объем газа уменьшается и над ним совершается работа, равная площади заштрихованного треугольника (рис. 17):

$$|\Delta A| = \Delta U - \Delta Q = \nu\frac{3}{8}RT_1.$$

11 класс

Задача 1. За решёткой

Схема в условии эквивалентна схеме, приведенной на рисунке (рис. 18), т.к. при рассмотрении участка CB можно заметить, что

$$\varphi_M = \varphi_N = (\varphi_C + \varphi_B)/2.$$

Окончательно, $R_{AB} = 17r/24 = 1\ 7$ Ом.

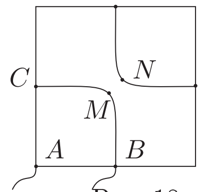


Рис. 18

Задача 2. Шайба

Пусть шайба массой m вращается по окружности радиусом R со скоростью v_0 на высоте h. Ясно, что $mv_0^2/R = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$, отсюда $v_0^2 = gR\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Для профиля $y = -k/r^2$, где $k > 0$, имеем $y' = 2k/r^3 = -2y/r$. Тогда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y'|_{r=R} = -2y/R = 2(H - h)/R.$$

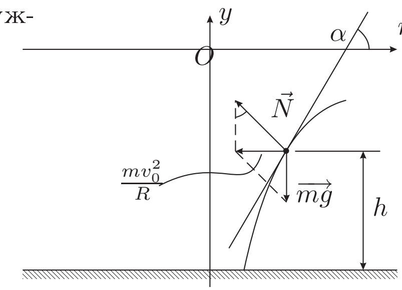


Рис. 19

Следовательно, $v_0^2 = gR\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2g(H - h)$.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgH_1 = \frac{mv_0^2}{2} + mgh.$$

Из последних двух равенств находим $v = \sqrt{2g(H - H_1)} \approx 3\ 8$ м/с.

Задача 3. Собака на санках

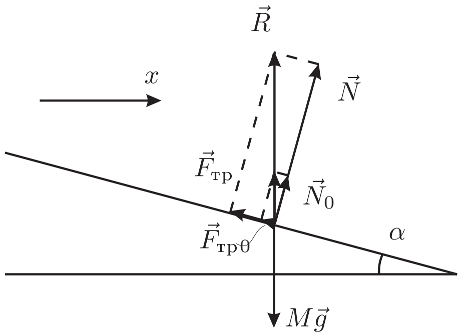


Рис. 20

На систему из санок и собаки за время их взаимодействия действуют внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$, изменяющаяся со временем сила реакции $\vec{R}$ со стороны горки. Покажем, что $\vec{R}$ направлена вертикально вверх. Разложим $\vec{R}$ (рис. 20) на силу нормального давления $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$. Ясно, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, где μ — коэффициент трения скольжения. До прыжка сила реакции $\vec{R}_0 = \vec{N}_0 + \vec{F}_{\text{тр}0}$, где $F_{\text{тр}0} = \mu N_0$ и $\vec{R}_0$ направлена вертикально вверх. При взаимодействии собаки с санками при возрастании N в k раз ($N = kN_0$) сила $F_{\text{тр}}$ возрастает тоже в k раз и $\vec{R}$ остается параллельной $\vec{R}_0$, т.е. $\vec{R}$ направлена вертикально вверх. Итак, для системы из санок и собаки за время их взаимодействия все внешние силы направлены вертикально.

Отсюда следует, что проекция импульса системы на горизонтальную ось Ox сохраняется:

$$Mv_1 \cos\alpha + mv_0 \cos(\beta - \alpha) = (M + m)v_2 \cos\alpha.$$

Отсюда находим скорость санок с собакой:

$$v_2 = \frac{Mv_1 \cos\alpha + mv_0 \cos(\beta - \alpha)}{(M + m)\cos\alpha}.$$

Задача 4. Декремент затухания

Пусть под действием вынуждающей силы $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \beta)$ тело совершает вынужденные колебания вдоль оси Ox с частотой ω и амплитудой A. Тогда координата x, скорость и ускорение тела будут:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha),$$

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \alpha),$$

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha).$$

По условию,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если $m\omega^2 = k$. Отсюда $\omega = \sqrt{k/m}$ и $A = v_0\sqrt{m/k}$.

Подставив в уравнение вторго закона Ньютона

$$ma_x = -\gamma v_x - kx + F\cos(\omega t + \beta)$$

записанные выше выражения для x, v_x, a_x с учетом полученных выражений для ω и A, имеем после упрощений $\gamma v_0 \sin(\omega t + \alpha) = F_0 \cos(\omega t + \beta)$. Если это равенство выполняется при любых t, то для соответствующего выбора α и β должно быть $F_0 = \gamma v_0$.

Задача 5. Архив лорда Кельвина

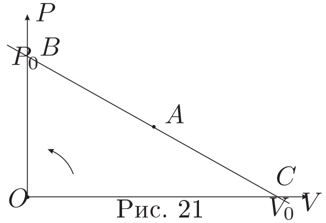


Рис. 21

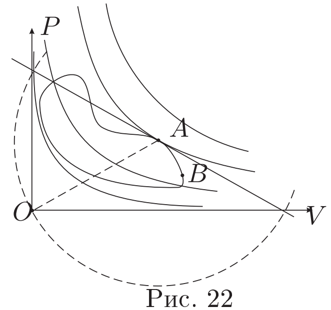


Рис. 22

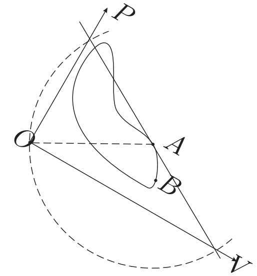


Рис. 23

Рассмотрим сначала как изменяется температура T газа при движении вдоль отрезка BC, задаваемого уравнением $V/V_0 + P/P_0 = 1$ (рис. 21). Для ν молей газа $PV = \nu RT$. Поэтому $T = PV/\nu R = \frac{P_0}{\nu R V_0}(V_0 V - V^2)$. Максимум T будет в некоторой точке A при $V = V_0/2$. Это значит, что точка A находится на середине гипотенузы прямоугольного треугольника $\triangle OBC$ и поэтому равноудалена от точек O, B и C.

Возьмем произвольный цикл (рис. 22). Проведем ряд изотерм. Изотерма с наибольшей температурой, касающаяся кривой цикла (точка A на рисунке) соответствует максимальной температуре в цикле. Проведем через точку A общую касательную к кривой цикла и изотерме. Ясно, что максимальная температура на касательной соответствует точке A.

По доказанному выше, эта точку равноудалена от начала координат и точек пересечения касательной с осями координат: $AO = AB = AC$. Теперь понятен алгоритм восстановления осей.

1. Проводим касательную в точку A (рис. 23).
2. Проводим окружность с центром в точке A и радиусом AO.
3. Через точки пересечения окружности с касательной проводим оси координат.
4. Из двух возможных взаимнообратных вариантов направлений осей P и V выбираем тот, который удовлетворяет условию задачи.