



Олимпиадные школы МФТИ

ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКИ
vk.com/4mipt

Условия и решения олимпиады ЛОШ-2022 2 смена

Авторы условий:

7 класс

1. Вергунов А.
2. Щавлев В.
3. Колдунов Л.
4. Баженова С.,
Гриднев И.

9 класс

1. Корнева А.
2. Пауков М.
3. Колдунов Л.
4. Колдунов Л.
5. Бейлин Н.

8 класс

1. Вергунов А.
2. Щавлев В.
3. Свинцицкий А.
4. Бейлин Н.

10 класс

1. Корнева А.
2. Пауков М.
3. Бейлин Н.
4. Бейлин Н.
5. Колдунов Л.

Рисунки — Я. Поздняк.

Набор и вёрстка — А. Свинцицкий, Д. Хромов.

Долгопрудный, 2022 г.

Содержание

Олимпиада 7 класс	2
Решение 7 класс	4
Критерии 7 класс	9
Олимпиада 8 класс	10
Решение 8 класс	12
Критерии 8 класс	15
Олимпиада 9 класс	16
Решение 9 класс	18
Критерии 9 класс	22
Олимпиада 10 класс	23
Решение 10 класс	25
Критерии 10 класс	28

Олимпиада 7 класс

7.1. Победа

Машина часть пути проехала с некоторой скоростью v_1 , а оставшееся расстояние — со скоростью $v_2 = 120$ км/ч. При этом средняя скорость машины на всем пути оказалась равна $v = 80$ км/ч. Определите среднюю скорость u машины на первой половине пути, если известно, что изменение скорости произошло на этом участке.

7.2. Обед на небоскрёбе

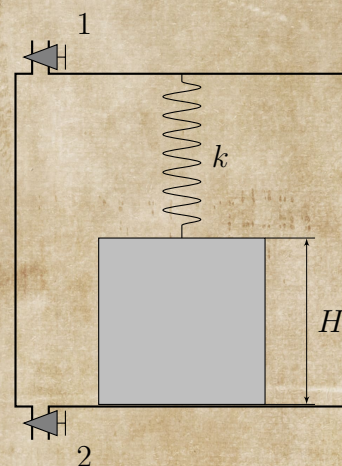
Однородная балка покоится на двух опорах. Если на неё поместить два шарика, как показано на рисунке, разность сил реакций со стороны опор на балку будет равна 10 Н. Если шарики поменять местами, то разность сил реакций окажется равной 7 Н.



1. Определите, насколько отличаются массы шариков;
2. Найдите массу балки для случая, когда суммарная масса шариков равна 900 г.

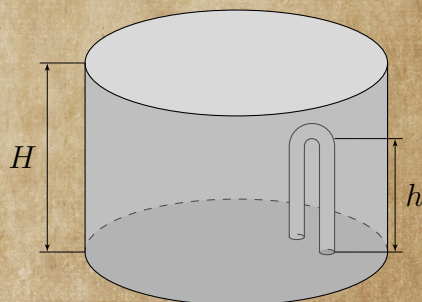
7.3. Очередная чашка

Экспериментатор Глюк проводил опыт с емкостью, показанной на рисунке. Внутри нее находился куб со стороной H и плотностью 500 кг/м³, верхняя грань которого была соединена с верхней гранью емкости пружиной. Пружина была растянута. Через клапан 1 в емкость Глюк начал медленно наливать воду и заметил, что куб отрывается от дна тогда, когда уровень воды в емкости становится равен $h = H/3$. Глюк вылил воду через клапан 2, закрыл клапан 1 и аккуратно перевернул емкость так, что куб находится на той же самой вертикали. После чего стал аккуратно добавлять воду через клапан 2. Какая часть куба будет под водой в момент, когда он снова коснется стенки емкости? Пружина подчиняется закону Гука. После переворота емкости куб не касается ее стенок. Считайте, что куб умеет двигаться только вдоль вертикальной прямой.



7.4. Особенная чашка

В одну из бессонных ночей экспериментатору Глюку было лень мыть очередную чашку и он решил использовать особенную. Особенная чашка представляет собой цилиндрический стакан с тонкими стенками, в дно которого вставлена тонкая трубка, а второй конец выведен в чашку как показано на рисунке. Экспериментатор не был бы самым собой, если бы перед приготовлением чашечки ароматного и чёрного как безлунная ночь кофе он не попытался погрузить её в ванну с ртутью, снимая зависимость «вертикальной проекции силы, с которой Глюк действует на кружку



при её погружении (ось направлена вниз)» от глубины погружения дна чашки и занося результаты измерений в таблицу. Затем, осушив чашку и избавившись от ртути, экспериментатор стал медленно наливать в неё кофе, параллельно изучая полученные данные. В какой-то момент кофе начал вытекать из чашки, вследствие чего Глюк тут же перестал её наполнять. Быстро соображающий Глюк осознал, что из-за пролитого кофе была безвозвратно утрачена часть данных.

x , см	0	1	2	3	4	5	9	10	11	12
F/F_0	-4,0	-3,0	-2,0	-1,5	-0,5	0,5	0	0	0	0

Определите:

1. в каком диапазоне может лежать высота h ;
2. массу особенной чашки M ;
3. максимальный возможный объем утраченного кофе V_{\max} ;
4. постройте графики зависимости $F(x)/F_0$ для максимального и минимального значения высоты h .

Во всех экспериментах положение чашки классическое, вертикальное. Внутренний конец трубочки расположен очень близко ко дну. Площадь горизонтального сечения чашки 50 см^2 . Полная высота чашки $H = 13 \text{ см}$. F_0 — неизвестная единица измерения силы. Плотность ртути $\rho_{\text{рт}} = 13600 \text{ кг/м}^3$.

Решение 7 класс

7.1. Обозначим длину всего пути как s_0 . Время, за которое машина проехала первую половину пути, равно

$$t_1 = \frac{s_0}{2u}.$$

Так как на второй половине пути машина ехала со скоростью v_2 , то время, за которое она его проехала, равно

$$t_2 = \frac{s_0}{2v_2}.$$

Тогда время, за которое машина проехала весь путь, равно

$$t = t_1 + t_2.$$

С другой стороны,

$$t = \frac{s_0}{v}.$$

Тогда получаем уравнение:

$$\frac{s_0}{2u} + \frac{s_0}{2v_2} = \frac{s_0}{v}.$$

Решим это уравнение относительно u :

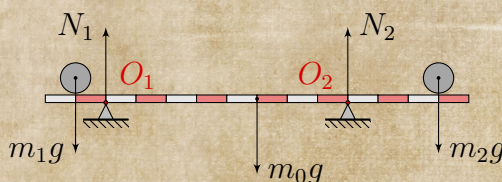
$$\frac{u + v_2}{uv_2} = \frac{2}{v}; \quad \Rightarrow \quad u + v_2 = 2u \frac{v_2}{v}; \quad \Rightarrow \quad u \left(2 \frac{v_2}{v} - 1 \right) = v_2;$$

$$u = \frac{v_2}{2 \frac{v_2}{v} - 1} = 60 \text{ км/ч.}$$

7.2. Запишем правило моментов для балки относительно точек O_1 и O_2 :

$$O_1: \quad N_2 \cdot 8x + m_1g \cdot x = m_0g \cdot 5x + m_2g \cdot 11x;$$

$$O_2: \quad N_1 \cdot 8x + m_2g \cdot 3x = m_0g \cdot 3x + m_1g \cdot 9x.$$



Вычитая эти уравнения, получаем:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{g}{8}(2m_0 + 14m_2 - 10m_1).$$

После того как шарики поменяли местами:

$$O_1: \quad N'_2 \cdot 8x + m_2g \cdot x = m_0g \cdot 5x + m_1g \cdot 11x;$$

$$O_2: \quad N'_1 \cdot 8x + m_1g \cdot 3x = m_0g \cdot 3x + m_2g \cdot 9x.$$

Тогда получаем:

$$\Delta N' = N'_2 - N'_1 = \frac{g}{8}(2m_0 + 14m_1 - 10m_2).$$

Чтобы определить, насколько отличаются массы шариков, вычтем $\Delta N'$ из ΔN :

$$\Delta N - \Delta N' = \frac{g}{8}(14(m_2 - m_1) + 10(m_2 - m_1)) = 3g(m_2 - m_1);$$

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{\Delta N - \Delta N'}{3g}.$$

Возможны два случая:

Случай 1. $N_2 - N_1 = 10$ Н и $N'_2 - N'_1 = 7$ Н. Тогда $\Delta m = 0,1$ кг.

Случай 2. $N_2 - N_1 = 10$ Н и $N'_1 - N'_2 = 7$ Н. Тогда $\Delta m = \frac{17}{30}$ кг $\approx 0,6$ кг.

Чтобы найти массу балки m_0 , рассмотрим сумму $\Delta N + \Delta N'$:

$$\Delta N + \Delta N' = \frac{g}{2}(m_0 + m_1 + m_2);$$

$$m_0 = \frac{2(\Delta N + \Delta N')}{g} - (m_1 + m_2) = 2,5 \text{ кг.}$$

Заметим, что другой случай ($\Delta N = 10$ Н, $\Delta N' = -7$ Н) не возможен, так как масса балки получится отрицательной.

7.3. Обозначим площадь грани куба как S_0 , плотность куба как ρ_k . Объем части куба, погруженной в воду, равен $S_0 H/3 = V/3$. Тогда сила Архимеда равна

$$F_A = \rho_v \frac{V}{3} g,$$

где ρ_v — плотность воды. Пусть пружина растянута на Δx_1 . Запишем второй закон Ньютона:

$$Mg = k\Delta x_1 + \rho_v \frac{V}{3} g,$$

где $M = \rho_k V$. Выразим из этого уравнения $k\Delta x_1$:

$$k\Delta x_1 = \rho_k V g - \rho_v \frac{V}{3} g.$$

Когда куб коснется потолка емкости, растяжение пружины будет таким же, как и в изначальном состоянии:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1.$$

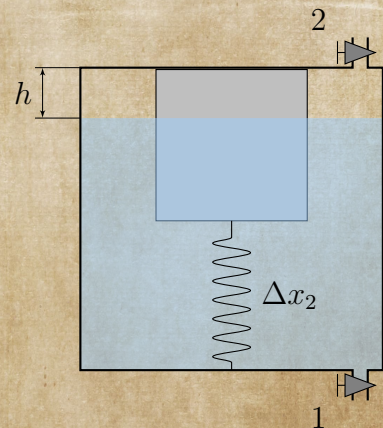
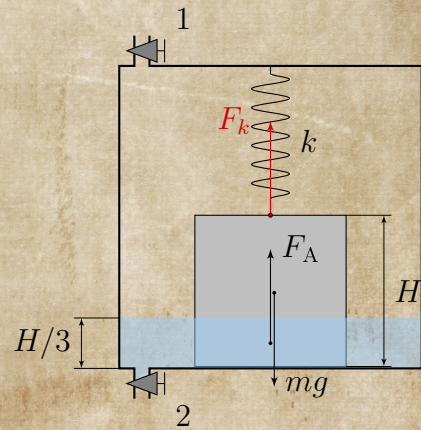
Обозначим за $V_{\text{п}}$ объем части куба, которая будет под водой, и запишем второй закон Ньютона:

$$\rho_v V_{\text{п}} g = \rho_k V g + k\Delta x_1.$$

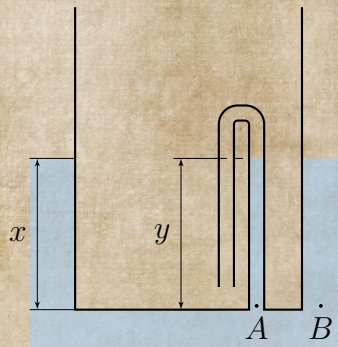
Подставим выражение для $k\Delta x_1$ и решим полученное уравнение относительно $V_{\text{п}}$:

$$\rho_v V_{\text{п}} g = \rho_k V g + \rho_k V g - \rho_v \frac{V}{3} g;$$

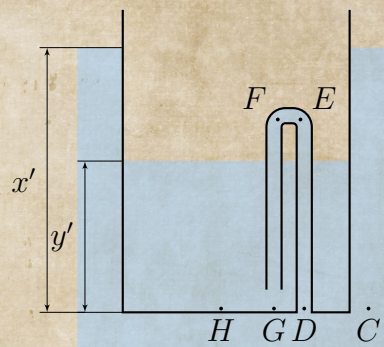
$$V_{\text{п}} = \left(2 \frac{\rho_k}{\rho_v} - \frac{1}{3}\right) V = \frac{2}{3} V.$$



7.4. При погружении чашки в ртуть имеем следующую ситуацию:



Давление в точках А и В равны, значит высота столба ртути внутри трубки y равна глубине погружения дна чашки x . Причем это верно для любого $y < h$.



Когда y достигает высоты h , ртуть начнет поступать в чашку через трубку. Пусть уровень ртути в чашке равен y' , тогда

$$p_c = \rho g x' = p_D = p_e + \rho g h = p_F + \rho g h = p_G = p_H = \rho g y'.$$

Значит $x' = y'$. Проанализируем зависимость $F(x)$. При $x < h$:

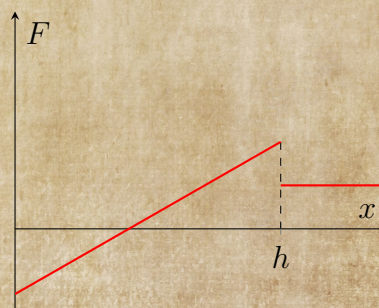
$$F(x) = -Mg + \rho S x g.$$

При $x \geq h$:

$$F(x) = -Mg + F_A,$$

где сила Архимеда F_A постоянна, т.к. стенки тонкие, а значит при их погружении объем погруженного тела не изменяется.

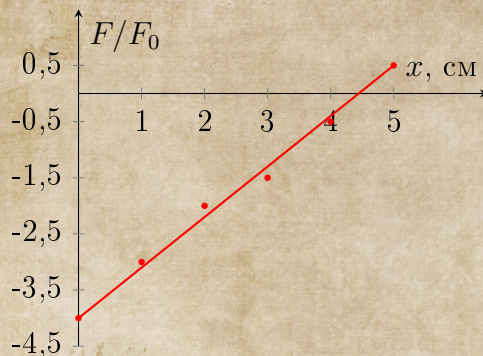
Таким образом, $F(x)$ линейно возрастает при $x < h$ и постоянна при $x \geq h$. График $F(x)$ имеет следующий вид:



Из уцелевших данных мы понимаем, что до $x = 5$ см $F(x)$ линейно растет, а после $x = 9$ см $F(x)$ постоянна, значит возможные значения h :

$$h \in [5 \text{ см}; 9 \text{ см}].$$

Построим линейную часть графика $F(x)/F_0$.



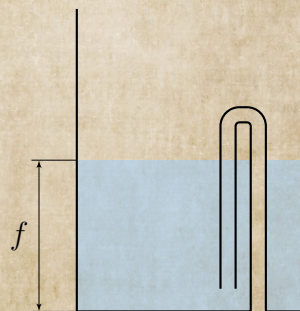
В точке пересечения линейной части графика и оси абсцисс $F(x) = 0$, значит сила тяжести уравновешивается силой Архимеда:

$$Mg = \rho_{\text{рт}} S x_0 g; \implies M = \rho_{\text{рт}} S x_0,$$

где x_0 — абсцисса точки пересечения. Из графика находим $x_0 \approx 4,5$ см. Тогда масса чашки равна:

$$M \approx 3,1 \text{ кг.}$$

При наливании кофе в чашку происходит следующее:

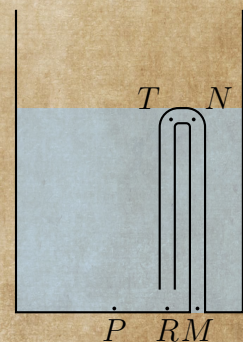


Кофе наливается до момента $f = h$. А при достижении высоты h полностью выливается, т.к. выливание не может остановиться. Действительно, предположим, что это не так, тогда:

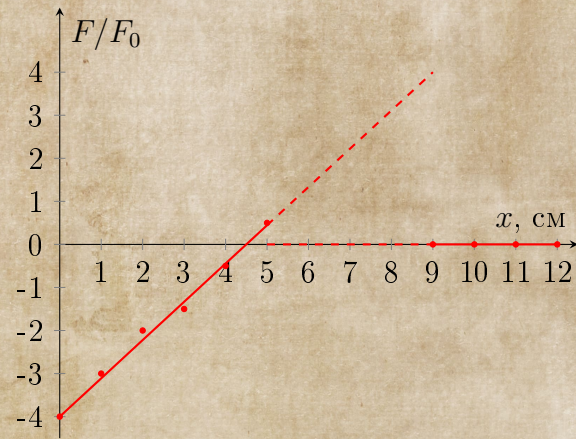
$$p_M = p_{\text{атм}} = p_N + \rho_{\text{к}} g h = p_T + \rho_{\text{к}} g h = p_R = p_P = \rho_{\text{к}} g h + p_{\text{атм}}.$$

Получили противоречие, значит $h = 0$, и максимальный объем утраченного кофе равен:

$$V = S h_{\text{max}} = 450 \text{ см}^3.$$



Построим $F(x)$ для крайних случаев $h = h_{\text{max}}$ и $h = h_{\text{min}}$ на одном графике.



Критерии 7 класс

Критерии 1 задача

1. Написано, что на второй половине пути скорость всюду v_2 — 4 балла.
2. Записано уравнение на времена — 4 балла.
3. Получен ответ — 2 балла.

Критерии 2 задача

1. Записаны уравнения моментов в первом случае — по 0,5 балла за уравнение.
2. Получено выражение для ΔN — 1 балл.
3. Записаны уравнения моментов во втором случае — по 0,5 балла за уравнение.
4. Получено выражение для $\Delta N'$ — 1 балл.
5. Найдено, насколько отличаются массы шариков — по 2 балла за каждый случай.
6. Найдена масса балки — 2 балла.

Критерии 3 задача

1. Найден объем погруженной части — 1 балл.
2. Записано выражение для силы Архимеда — 1 балл.
3. Записано выражение для силы упругости — 1 балл.
4. Записан 2-ой закон Ньютона в первом случае — 1 балл.
5. Сказано, что при перевороте во втором случае растяжение пружины будет таким же, как и в первом случае — 3 балла.
6. Записан 2-ой закон Ньютона во втором случае — 1 балл.
7. Составлена и решена итоговая система уравнений — 2 балла.

Критерии 4 задача

1. Описана теория при погружении в ртуть — 1 балл.
2. Описана теория при наливании кофе — 1 балл.
3. Найдена h_{min} — 1 балл.
4. Найдена h_{max} — 1 балл.
5. Найдена масса чашки M — 2 балла.
6. Найден максимальный объем утраченного кофе V — 1 балл.
7. Построены графики для $h = h_{min}$ и $h = h_{max}$ — по 1,5 балла.

Олимпиада 8 класс

8.1. Победа

Машина часть пути проехала с некоторой скоростью v_1 , а оставшееся расстояние — со скоростью $v_2 = 120$ км/ч. При этом средняя скорость машины на всем пути оказалась равна $v = 80$ км/ч. Определите среднюю скорость u машины на первой половине пути, если известно, что изменение скорости произошло на этом участке.

8.2. Обед на небоскрёбе

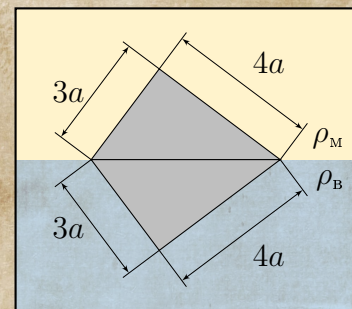
Однородная балка покоится на двух опорах. Если на неё положить два шарика, как показано на рисунке, разность сил реакций со стороны опор на балку будет равна 10 Н. Если шарики поменять местами, то разность сил реакций со стороны опор окажется равной 7 Н.



1. Определите, насколько отличаются массы шариков;
2. Найдите массу балки для случая, когда сумма масс шариков равна 900 г.

8.3. Хоть круть-верть, хоть верть-круть, круть-верть хоть, вер...

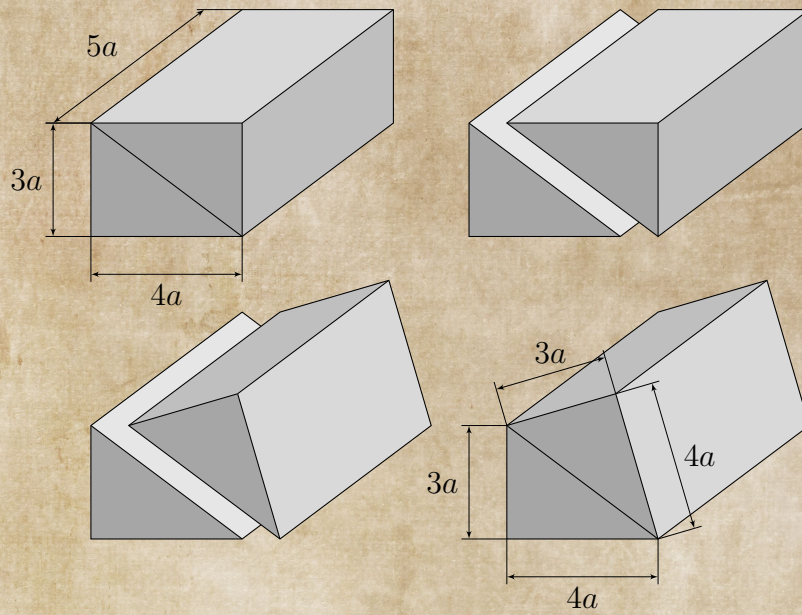
Брусok со сторонами $3a$, $4a$, $5a$ разрезали вдоль плоскости, изображённой на рисунке снизу. Затем получившиеся половинки бруска совместили и склеили так, как изображено на рисунке на следующей странице. Получившуюся конструкцию поместили в закрытый сосуд, в котором находились только масло и вода. Конструкция плавает так, как показано на рисунке справа. Высота уровня масла относительно границы раздела сред равна $22a/5$.



1. Определите плотность материала бруска.
2. Определите силы давления со стороны масла F_M и воды F_B на поверхность бруска и укажите их направления.
3. Докажите, что сумма моментов сил равна нулю при таком положении.

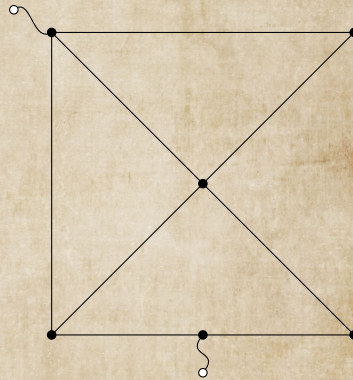
Плотность масла 900 кг/м³, плотность воды 1000 кг/м³. Величина $a = 10$ см.

Замечание. Высота, проведённая к гипотенузе в прямоугольном треугольнике, равна произведению катетов делённому на гипотенузу.



8.4. Xbox

Найдите сопротивление схемы при подключении контактов к вершине квадрата и середине стороны (см. рисунок). Сопротивление участка провода между любыми двумя жирными точками, к которым он подключен, равно r . Провода считайте однородными.



Решение 8 класс

8.1. Смотрите решение 1 задачи 7 класса.

8.2. Смотрите решение 2 задачи 7 класса.

8.3. Пусть ρ_b, ρ_m, ρ_v — плотности бруска, масла и воды соответственно. Тогда силы Архимеда, действующие на брусок со стороны воды и масла, равны соответственно:

$$F_v = \rho_v \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} a^3 g, \quad F_m = \rho_m \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} a^3 g.$$

Запишем второй закон Ньютона:

$$\rho_b \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3 g = \rho_m \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} a^3 g + \rho_v \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} a^3 g.$$

Отсюда получаем плотность бруска:

$$\rho_b = \frac{\rho_v + \rho_m}{2} = 950 \text{ кг/м}^3.$$

Так как половинки бруска покоятся, то проекции сил давления на горизонтальную ось равны нулю. Значит сила давления со стороны масла направлена вертикально вниз, а сила давления со стороны воды — вертикально вверх. Рассмотрим столб масла над бруском. Запишем для него второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось, учитывая, что сила, с которой брусок действует на столб масла, по модулю равна силе давления масла на брусок:

$$\rho_m \left(5a \cdot 5a \cdot \frac{22}{5} a - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} a^3 \right) g - F_m = 0;$$

$$F_m = 80\rho_m a^3 g = 720 \text{ Н.}$$

Суммарная сила Архимеда складывается их сил давления масла и воды, тогда в проекции на вертикальную ось имеем:

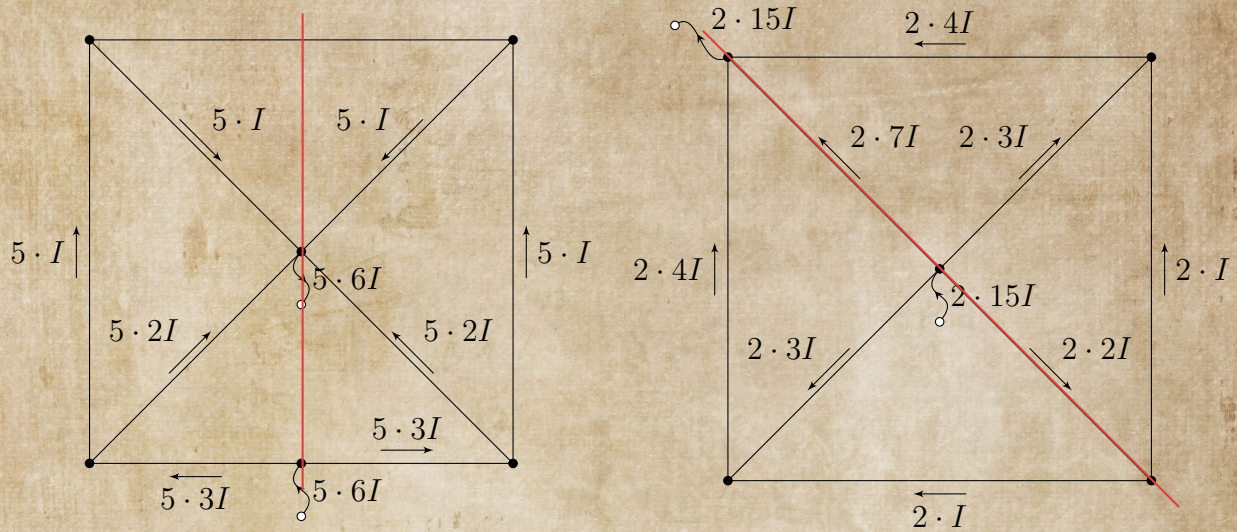
$$F_A = F_v - F_m.$$

Получаем силу давления воды:

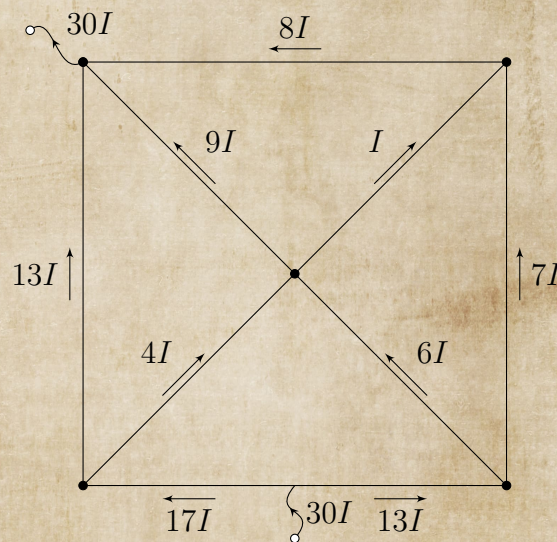
$$F_v = (\rho_m + \rho_v) \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} a^3 g + 80\rho_m a^3 g = (110\rho_m + 30\rho_v) a^3 g = 1290 \text{ Н.}$$

Покажем, что сумма моментов сил, действующих на брусок, равна нулю. Сила Архимеда, действующая на тело со стороны жидкости, приложена к центру тяжести части тела, находящейся в этой жидкости. Тогда точки приложения всех сил, действующих на брусок, расположены на одной вертикали. Так как сумма этих сил равна нулю, то относительно любой точки суммарный момент этих сил также равен нулю.

8.4. Способ 1. Воспользуемся методом наложением токов и симметрией. Расставим токи:



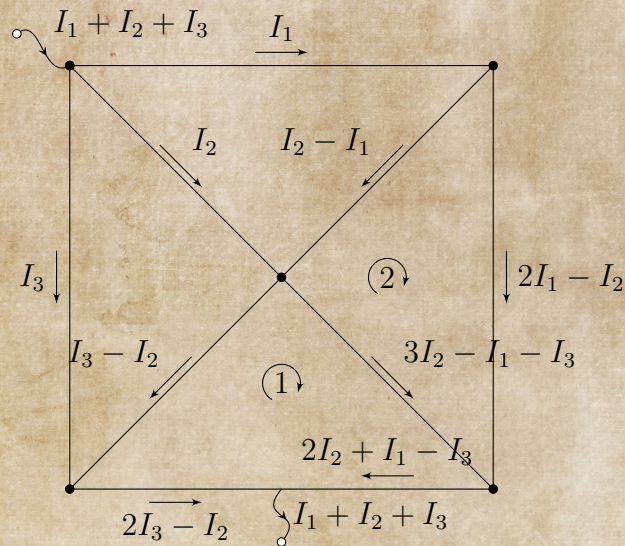
После наложения получаем:



Найдем эквивалентное сопротивление:

$$R_3 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{13Ir + 17I\frac{r}{2}}{30I} = \frac{43}{60}r.$$

Способ 2. Пользуясь первым законом Кирхгофа, расставим токи в схеме:



Второй закон Кирхгофа для первого контура:

$$(I_3 - I_2)r + (2I_3 - I_2)\frac{r}{2} = (3I_2 - I_1 - I_3)r + (2I_2 + I_1 - I_3)\frac{r}{2};$$

$$7I_3 - 11I_2 + I_1 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа для второго контура:

$$(3I_2 - I_1 - I_3)r + (I_2 - I_1)r = (2I_1 - I_2)r;$$

$$I_3 - 5I_2 + 4I_1 = 0.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_3 = 5I_2 - 4I_1; \\ 7I_3 - 11I_2 + I_1 = 0. \end{cases}$$

Выразим I_3 и I_2 через I_1 :

$$I_3 = \frac{13}{8}I_1; \quad I_2 = \frac{27}{24}I_1.$$

Найдем эквивалентное сопротивление:

$$R_3 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{(2I_3 - I_2)\frac{r}{2} + I_3r}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{4I_3 - I_2}{2(I_1 + I_2 + I_3)}r = \frac{43}{60}r$$

Критерии 8 класс

Критерии 1 задача

Смотрите критерии 1 задачи 7 класса.

Критерии 2 задача

Смотрите критерии 2 задачи 7 класса.

Критерии 3 задача

1. Записано выражение для силы Архимеда, создаваемой водой — 1 балл.
2. Записано выражение для силы Архимеда, создаваемой маслом — 1 балл.
3. Найдена плотность бруска — 2 балла.
4. Указано, что суммарная сила давления — это суммарная сила Архимеда — 2 балла.
5. Рассмотрен столб масла над бруском — 1 балл.
6. Найдена сила давления масла — 1 балл.
7. Найдена сила давления воды — 1 балл.
8. Доказано, что суммарный момент сил равен нулю — 1 балл.

Критерии 4 задача

Способ 1 (Метод наложения токов).

1. Расставлены токи в первой схеме — 2 балла.
2. Расставлены токи во второй схеме — 2 балла.
3. Произведено масштабирование токов — 2 балла.
4. Наложение токов — 2 балла.
5. Получен ответ — 2 балла.

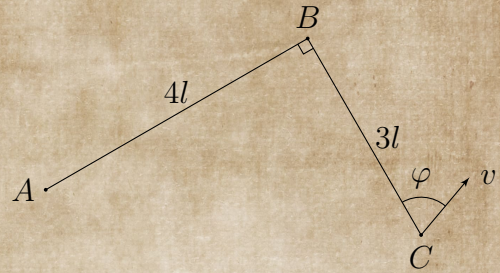
Способ 2 (Метод узловых потенциалов).

1. Расставлены токи — 4 балла.
2. Записана система уравнений — 4 балла.
3. Получен ответ — 2 балла.

Олимпиада 9 класс

9.1. Великолепная семёрка

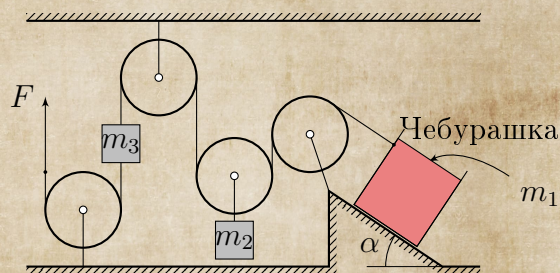
Твёрдая деталь в виде прямого угла движется по гладкой горизонтальной поверхности. Сторона AB имеет длину $4l$, сторона BC — $3l$. В некоторый момент скорость точек A и C равна v . Известно, что скорость точки C направлена под углом $\varphi = \arcsin 24/25$ к стороне BC (см. рисунок).



1. Определите вектор скорости точки B в этот момент.
2. Определите угловую скорость вращения твёрдого тела

9.2. ГУК

Умный Крокодил Гена хочет покатасть по закреплённой гладкой наклонной плоскости с углом при основании 30 градусов Чебурашку в коробке из-под апельсинов. Чтобы было интереснее, он разработал целый механизм, приведённый на рисунке. Этот механизм состоит из блоков, нитей и апельсинов равной массы $m_2 = m_3$. Гене доподлинно известно, что масса Чебурашки в 4 раза меньше массы апельсинов $m_2 = 4m_1$. Он прикладывает силу $F = 5m_1g$ в надежде покатасть Чебурашку в коробке из-под апельсинов вверх и доставить ему радость. С каким ускорением поедет Чебурашка в коробке из-под апельсинов? Блоки и нити идеальные.

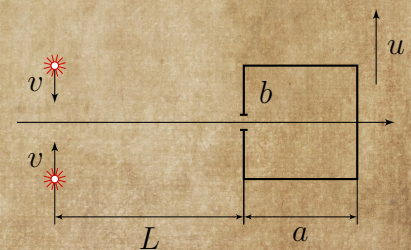


9.3. Оставьте треугольник в покое

Равносторонний треугольник ставят в двугранный прямой угол так, что его сторона находится на горизонтальной поверхности с коэффициентом трения $\mu = 1/\sqrt{3}$, а противоположная этой стороне вершина опирается на вертикальную гладкую стену. Найдите, при каких углах между плоскостью треугольника и горизонтальной поверхностью треугольник будет находиться в состоянии покоя.

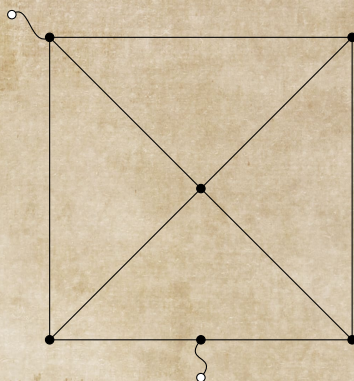
9.4. Свет-камера-мотор!

Через камеру-обскуру наблюдают за двумя светящимися точками, которые находятся на расстоянии L от плоскости камеры с отверстием. Размер отверстия b , в начальный момент времени изображения точек различимы. Точки начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v , а камера-обскура начинает двигаться со скоростью u . Найдите, как долго изображения точек не будут различимы. Размер камеры $a \ll L$.



9.5. Хвох

Найдите сопротивление схемы при подключении контактов к вершине квадрата и середине стороны (см. рисунок). Сопротивление участка провода между любыми двумя жирными точками, к которым он подключен, равно r . Провода считайте однородными.



Решение 9 класс

9.1. Возможно два случая в зависимости от направления скорости точки A .

Случай 1. Вращательное движение. Этот случай реализуется, если $\vec{v}_A \nparallel \vec{v}_C$. Проведем перпендикуляр к скорости в точке C . Точку пересечения перпендикуляра и стороны AB обозначим как O . Докажем, что $AO = OC$.

$$\sin \varphi = \frac{3l}{OC}; \quad \Rightarrow \quad OC = \frac{25}{8}l;$$

$$OB = OC \cos \varphi = OC \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{7}{25}OC = \frac{7}{8}l;$$

$$AO = AB - OB = 4l - \frac{7}{8}l = \frac{25}{8}l.$$

Т.к. $v_A = v_C$ и $AO = OC$, то точка O является мгновенным центром скоростей. Найдём угловую скорость:

$$\omega = \frac{v}{OC} = \frac{8v}{25l}.$$

Значит скорость точки B равна по модулю

$$v_B = \omega OB = \frac{7}{25}v$$

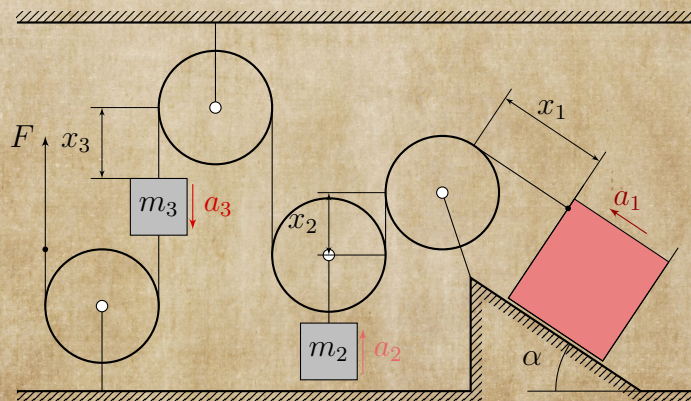
и направлена перпендикулярно OB , как изображено на верхнем рисунке справа.

Случай 2. Поступательное движение. В этом случае $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B \parallel \vec{v}_C$ и $v_A = v_B = v_C$.

9.2. Запишем условие нерастяжимости нити и получим кинематическую связь. Длина участка нити от Чебурашки до апельсина массой m_3 постоянна:

$$l = x_1 + x_2 + x_3 + \Delta = \text{const},$$

где Δ — длина нити на блоках и других участках, где она не меняется.



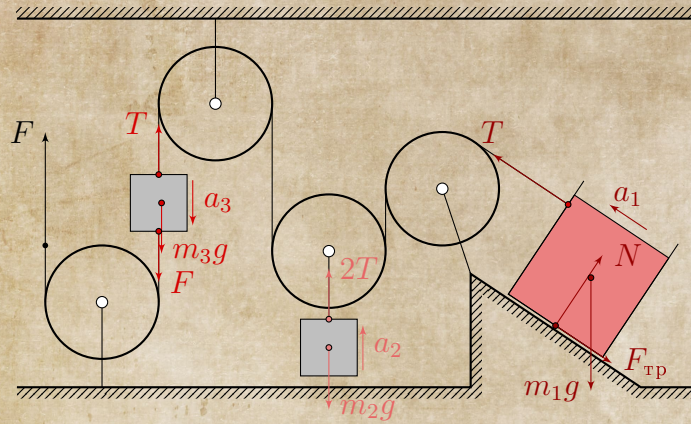
Продифференцировав l два раза, получим:

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0.$$

Заметим, что $\ddot{x}_1 = -a_1$, $\ddot{x}_2 = -a_2$, $\ddot{x}_3 = a_3$. Тогда кинематическая связь имеет вид:

$$a_3 = a_1 + 2a_2.$$

Так как нить и блоки идеальные, то силы натяжения будут такими, как на рисунке:



Запишем второй закон Ньютона для каждого из трех тел:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha; \\ m_2 a_2 = 2T - m_2 g; \\ m_3 a_3 = F + m_3 g - T. \end{cases}$$

Решая систему уравнений и подставляя $m_2 = m_3 = 4m_1$, $F = 5m_1 g$, получим выражение для искомого ускорения a_1 :

$$a_1 = \frac{17 - 5(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{9} g.$$

Подставляем $\alpha = 30^\circ$:

$$a_1 = \frac{29}{18} g \approx 16 \text{ м/с}^2.$$

9.3. Так как стержень в равновесии, сумма моментов сил относительно точки O равна нулю:

$$N_1 h \cos \alpha - mg \cdot \frac{2}{3} h \cos \alpha - F_{\text{тр}} h \sin \alpha;$$

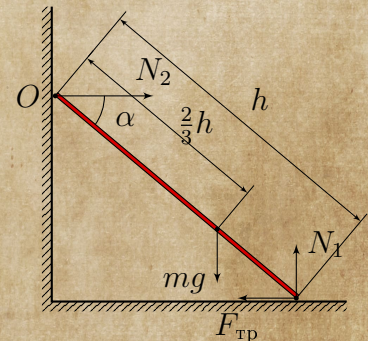
$$\frac{2}{3} mg + F_{\text{тр}} \operatorname{tg} \alpha = N_1.$$

Сумма проекций сил на ось Oy также равна нулю:

$$N_1 = mg.$$

Учитывая также, что $F_{\text{тр}} \leq \mu N_1$, получаем:

$$\frac{mg}{3} = F_{\text{тр}} \operatorname{tg} \alpha \leq \mu mg \operatorname{tg} \alpha;$$



$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{3\mu}.$$

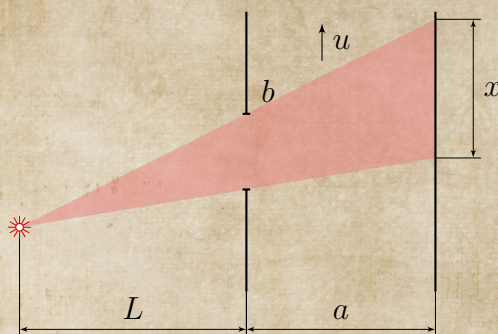
Подставляя $\mu = 1/\sqrt{3}$ и учитывая, что $\alpha \leq 90^\circ$, получаем:

$$\alpha \in [30^\circ, 90^\circ].$$

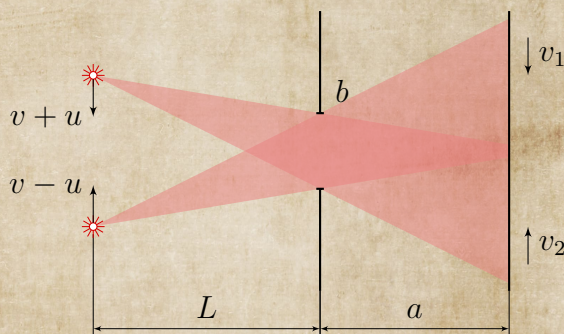
9.4. Найдем размер пятна x :

$$\frac{b}{L} = \frac{x}{L+a} \approx \frac{x}{L},$$

значит размер пятна равен размеру щели: $x \approx b$.



Перейдем в систему отсчета камеры-обскуры.



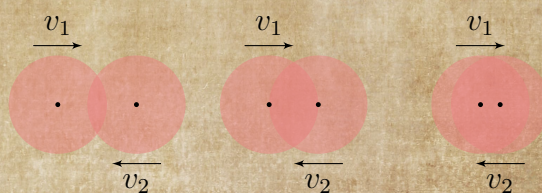
Обозначим за v_1 и v_2 скорости верхнего и нижнего пятен. Из геометрии получаем:

$$\frac{v_1 \Delta t}{(v-u) \Delta t} = \frac{a}{L}; \quad \Rightarrow \quad v_1 = (v-u) \frac{a}{L}.$$

Аналогично:

$$v_2 = (v+u) \frac{a}{L}.$$

Два пятна можно различить, если центр одного пятна не лежит внутри другого пятна.



Тогда легко найти время, в течение которого пятна неразличимы:

$$\Delta t = \frac{b}{v_1 + v_2} = \frac{b}{2v \frac{a}{l}} = \frac{bl}{2va}.$$

9.5. Смотрите решение 4 задачи 8 класса.

Критерии 9 класс

Критерии 1 задача

1. Показано, что т. O лежит на AB — 2 балла.
2. Найдена угловая скорость — 2 балла.
3. Найдена скорость v_B — по 2 балла за модуль и направление.
4. Рассмотрен случай параллельного движения — 2 балла.

Критерии 2 задача

1. Указано, что нить нерастяжима — 1 балл.
2. Получено уравнение на ускорения из кинематической связи — 1 балл.
3. Записан второй закон Ньютона для m_1 — 2 балла.
4. Записан второй закон Ньютона для m_2 — 2 балла.
5. Записан второй закон Ньютона для m_3 — 2 балла.
6. Найдено ускорение — 2 балла.

Критерии 3 задача

1. Указано положение центра масс треугольника — 1 балл.
2. Расставлены силы — 1 балл.
3. Записано правило моментов относительно точки O — 3 балла.
4. Найдена сила реакции опоры N — 1 балл.
5. Записано неравенство для силы трения — 1 балл.
6. Получено неравенство на $\operatorname{tg} \alpha$ — 2 балла.
7. Получен ответ — 1 балл.

Критерии 4 задача

1. Получен размер пятна — 2 балла.
2. Найдены скорости пятен — 3 балла.
3. Указан критерий различимости пятен — 3 балла.
4. Получен ответ — 2 балла.

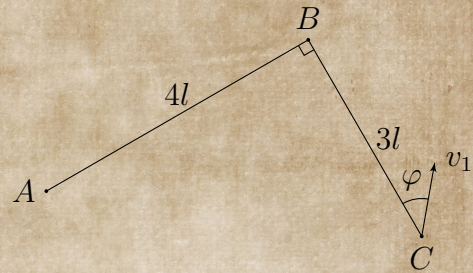
Критерии 5 задача

Смотрите критерии 4 задачи 8 класса.

Олимпиада 10 класс

10.1. Великолепная семёрка

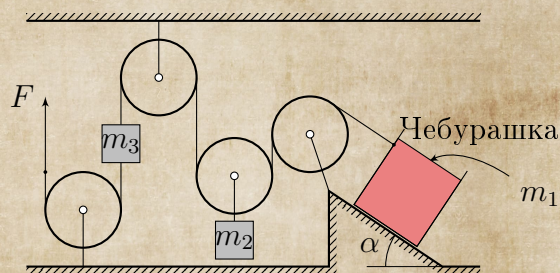
Твёрдая деталь в виде прямого угла движется по гладкой горизонтальной поверхности. Сторона AB имеет длину $4L$, сторона BC — $3L$. В некоторый момент скорость точек A и C равна v . Известно, что скорость точки C направлена под углом $\varphi = \arcsin 24/25$ к стороне BC (см. рисунок).



1. Определите вектор скорости точки B в этот момент.
2. Определите угловую скорость вращения твёрдого тела

10.2. ГУК

Умный Крокодил Гена хочет покатать по закреплённой шершавой наклонной плоскости (коэффициент трения 0,2) Чебурашку в коробке из-под апельсинов. Чтобы было интереснее, он разработал целый механизм, приведённый на рисунке. Этот механизм состоит из блоков, нитей и апельсинов равной массы $m_2 = m_3$. Гене доподлинно известно, что масса Чебурашки в 4 раза меньше массы апельсинов $m_2 = 4m_1$. Он прикладывает силу $F = 5m_1g$ в надежде покатить Чебурашку в коробке из-под апельсинов вверх и доставить ему радость. При каком углах наклонной плоскости у него это получится? Блоки и нити идеальные.



10.3. Джентльменский набор

В лаборатории, в цилиндре с гладкими вертикальными стенками под массивным поршнем массой m находится водород. При квазистатическом нагревании содержимого сосуда водород расширялся согласно закону $PV^2 = \text{const}$. Давление воздуха в лаборатории $p_{\text{лаб}}$ не постоянно. Найдите, на какую высоту поднимется поршень с грузом, если известно, что к нему подвели количество теплоты Q , а работа сил давления $p_{\text{лаб}}$ равна половине модуля работы газа.

10.4. Делимый заряд

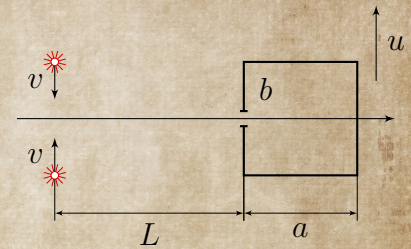
У вас есть заряд Q , который вы можете распределить между точечным объектом и плоской пластиной в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Длина гипотенузы пластины равна $2a$. Ваша задача — добиться максимальной силы взаимодействия между этими объектами при их фиксированном положении: точечный объект находится на расстоянии a от вершины прямого угла на прямой перпендикулярной плоскости пластины.

1. Найдите, как нужно поделить заряд между ними для выполнения поставленной задачи.
2. Какова в этом случае будет проекция силы взаимодействия на нормаль к пластине?

Заряд по пластине можно распределять только с постоянной поверхностной плотностью заряда.

10.5. Свет-камера-мотор!

Через камеру-обскуру наблюдают за двумя светящимися точками, которые находятся на расстоянии L от плоскости камеры с отверстием. Размер отверстия b , в начальный момент времени изображения точек различимы. Точки начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v , а камера-обскура начинает двигаться со скоростью u . Найдите, как долго изображения точек не будут различимы. Размер камеры $a \ll L$.



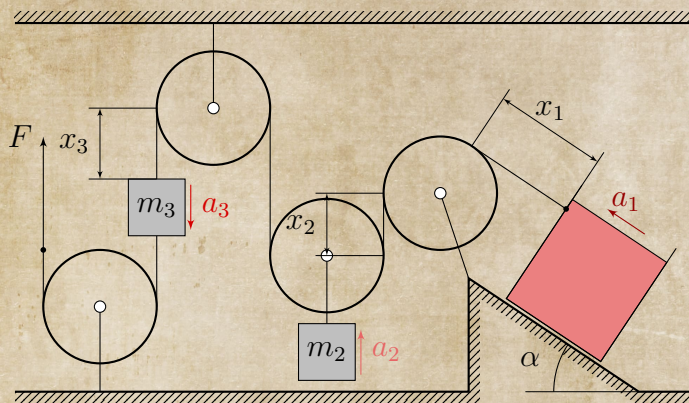
Решение 10 класс

10.1. Смотрите решение 1 задачи 9 класса.

10.2. Запишем условие нерастяжимости нити и получим кинематическую связь. Длина участка нити от Чебурашки до апельсина массой m_3 постоянна:

$$l = x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + \Delta = \text{const},$$

где Δ — длина нити на блоках и других участках, где она не меняется.



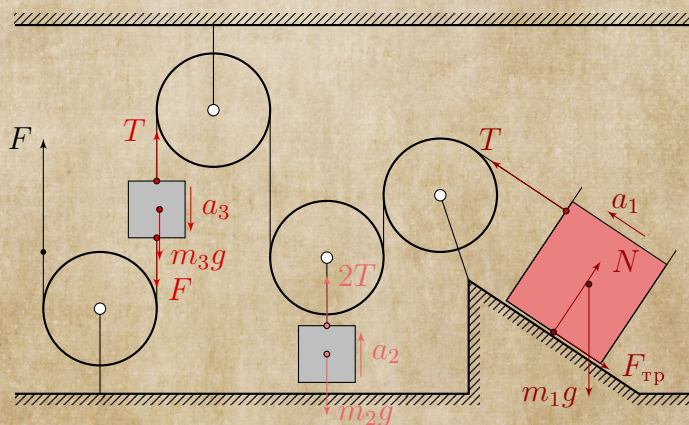
Продифференцировав l два раза, получим:

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0.$$

Заметим, что $\ddot{x}_1 = -a_1$, $\ddot{x}_2 = -a_2$, $\ddot{x}_3 = a_3$. Тогда кинематическая связь имеет вид:

$$a_3 = a_1 + 2a_2.$$

Так как нить и блоки идеальные, то силы натяжения будут такими, как на рисунке:



Запишем второй закон Ньютона для каждого из трех тел:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha; \\ m_2 a_2 = 2T - m_2 g; \\ m_3 a_3 = F + m_3 g - T. \end{cases}$$

Решая систему уравнений и подставляя $m_2 = m_3 = 4m_1$, $F = 5m_1g$, получим выражение для искомого ускорения a_1 :

$$a_1 = \frac{17 - 5(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{9}g.$$

Чтобы Чебурашка ехал вверх, необходимо, чтобы $a_1 > 0$. Т.к. $\sin \alpha \leq 1$, $\cos \alpha \leq 1$, то, учитывая, что $\mu = 0,2$:

$$a_1 = \frac{17 - 5(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{9}g \geq \frac{17 - 5(1 + 0,2)}{9}g \geq \frac{11}{9}g.$$

То есть при любом $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Чебурашка будет ехать вверх.

10.3. Запишем первое начало термодинамики:

$$\delta Q = \delta A + dU.$$

Распишем количество теплоты с учетом выражения для изменения внутренней энергии двухатомного газа:

$$\delta Q = pdV + \frac{5}{2}pdV + \frac{5}{2}Vdp = \frac{7}{2}pdV + \frac{5}{2}Vdp.$$

Запишем связь малых изменений давления и объема газа в данном процессе:

$$pV^2 = \text{const}; \quad \implies \quad p \cdot 2VdV + V^2dp = 0; \quad \implies \quad Vdp = -2pdV.$$

Найдем связь малого количества теплоты, подведенного к газу, и малой работы газа:

$$\delta Q = \frac{7}{2}pdV - 5pdV = -\frac{3}{2}pdV = -\frac{3}{2}\delta A.$$

Перепишем это соотношение для полной работы газа:

$$A = -\frac{2}{3}Q.$$

Запишем полное изменение потенциальной энергии поршня:

$$\Delta E = A_{\text{лаб}} + A.$$

Найдем связь работы воздуха в лаборатории $A_{\text{лаб}}$ и количества теплоты, подведенного к газу:

$$A_{\text{лаб}} = \left| \frac{1}{2}A \right| = \frac{1}{3}Q.$$

Найдем связь изменения энергии и теплоты Q :

$$\Delta E = \frac{1}{3}Q - \frac{2}{3}Q = -\frac{1}{3}Q.$$

Находим изменение высоты поршня:

$$mg\Delta h = -\frac{1}{3}Q; \quad \implies \quad \Delta h = -\frac{Q}{3mg}.$$

10.4. Пусть q_1 — величина точечного заряда, q_2 — полный заряд пластины, F — сила их взаимодействия. Тогда $q_1 + q_2 = Q$.

Сила взаимодействия пропорциональна произведению зарядов $q_1 q_2$.

$$q_1 = Q - q_2; \implies F \propto q_1 q_2 = (Q - q_2) q_2 = Q q_2 - q_2^2.$$

Это уравнение параболы относительно q_2 , поэтому максимальное значение силы будет достигаться при

$$q_2 = -\frac{Q}{2(-1)} = \frac{Q}{2}; \implies q_1 = \frac{Q}{2}.$$

Пусть E — поле, создаваемое пластиной в точке A , σ — поверхностная плотность заряда пластины. Тогда $E_{\perp} = k\sigma\Omega$, где Ω — телесный угол, под которым видна пластина из точки A .

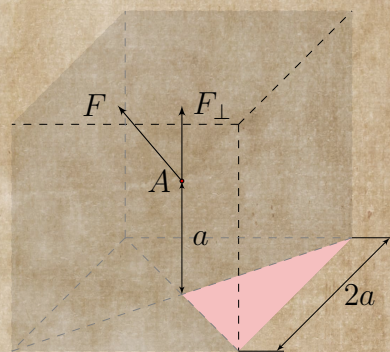
Заметим, что пластина — это четверть квадрата со стороной $2a$, а он является гранью куба с ребром $2a$, для которого точка A — центр куба. Значит в силу симметрии

$$\Omega = \frac{4\pi}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

Пусть S — площадь пластины, $S = \frac{(2a)^2}{4} = a^2$. Тогда $\sigma = \frac{q_2}{S} = \frac{Q}{2a^2}$. Значит

$$F_{max\perp} = E_{\perp} q_1 = k\sigma\Omega q_1 = \frac{\pi}{24} \frac{kQ^2}{a^2}.$$

10.5. Смотрите решение 4 задачи 9 класса.



Критерии 10 класс

Критерии 1 задача

Смотрите критерии 1 задачи 9 класса.

Критерии 2 задача

1. Указано, что нить нерастяжима — 1 балл.
2. Получено уравнение на ускорения из кинематической связи — 1 балл.
3. Записан второй закон Ньютона для m_1 — 2 балла.
4. Записан второй закон Ньютона для m_2 — 1 балла.
5. Записан второй закон Ньютона для m_3 — 1 балла.
6. Получено выражение для ускорения — 2 балла.
7. Проанализировано выражение для ускорения — 2 балла.
8. Получен диапазон возможных углов — 1 балл.

Критерии 3 задача

1. Найдены q_1 и q_2 — 4 балла.
2. Записана формула $E_{\perp} = k\sigma\Omega$ — 2 балла.
3. Найден телесный угол Ω — 3 балла.
4. Получена поверхностная плотность заряда σ и нормальная составляющая силы $F_{max\perp}$ — 1 балл.

Критерии 4 задача

1. Записан первый закон термодинамики с учетом выражения для изменения внутренней энергии — 2 балла.
2. Получено соотношение $Vdp = -2pdV$ — 2 балла.
3. Получено соотношение для полной работы газа $A = -2Q/3$ — 2 балла.
4. Найдено изменение энергии ΔE — 2 балла.
5. Найдено изменение высоты поршня — 2 балла.

Критерии 5 задача

Смотрите критерии 4 задачи 9 класса.