Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Чудновский А.	1. Чудновский А.	1. Тарнопольский Г., Чудновский А.
2. Мельниковский Л.	2. Шведов О.	2. Шведов О.
3. Соболев М.	3. Варгин А.	3. Лесничий Я.
4. Гуденко А.	4. Чудновский А.	4. Чивилёв В.
	5. Шведов О.	5. Александров Д.

Ответственные за классы

9 класс	10 класс	11 класс
Шведов О.	Чудновский А.	Чивилёв В.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В., Чудновский А.

Оформление и вёрстка — Чудновский А., Гусихин П.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.
© Авторский коллектив
Подписано в печать 14 марта 2006 г. в 09:42.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Грозовая туча

Экспериментатор Глюк наблюдал с безопасного расстояния за движением грозовой тучи. Увидев первую молнию, он засёк время и обнаружил, что услышал гром от неё только через $t_1 = 20$ с. Через $\tau_1 = 3$ мин после первой вспышки произошла вторая, а гром грянул с опозданием на $t_2 = 5$ с. Подождав ещё $\tau_2 = 4$ мин после второй вспышки, Глюк увидел, как сверкнула последняя молния, и услышал звук грома от неё через $t_3 = 20$ с. Предполагая, что туча двигалась с постоянной скоростью, определите, скорость v её движения и минимальное расстояние h от Глюка за время наблюдения. Скорость звука в воздухе $u \approx 330$ м/с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 2. Шаланда

Лодку массой $m = 100$ кг тянули за верёвку по озеру с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с. В некоторый момент верёвка оторвалась. Какой путь L пройдёт лодка после этого? Считайте, что сила сопротивления зависит только от скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ лодки и определяется выражением: $\vec{F} = -\alpha\vec{v} - \beta\vec{a}$, где $\alpha = 10$ Н·с/м, $\beta = 50$ Н·с^2/м.

Задача 3. Электрическая батарея

Дачный домик отапливается с помощью электрических батарей. При температуре батарей $T_{Б1}$ и температуре наружного воздуха $T_1 = -10$°C в домике устанавливается температура $T = 20$°C. Во сколько раз нужно увеличить силу тока в батареях, чтобы в комнате поддерживалась прежняя температура в холодные дни при наружной температуре $T_2 = -25$°C? Какова при этом будет температура батарей $T_{Б2}$? Электрическое сопротивление нагревательных элементов батарей можно считать не зависящим от температуры.

Задача 4. Вращающееся зеркало

Экран AB и плоское зеркало AD образуют две боковые грани прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Вдоль ребра C проходит ось вращения небольшого плоского зеркальца M, которое равномерно вращается и совершает один оборот за время $T = 12$ мин. Из небольшого отверстия в ребре A в центр этого зеркальца светит луч лазера (рис. 1). Какое время t в течение одного оборота зеркальца лазерный зайчик Z скользит по экрану AB?

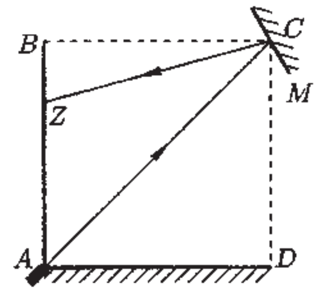

Рис. 1

10 класс

Задача 1. Длинная пружина

К невесомой пружине, имеющей 500 витков, подвесили груз, в результате чего она удлинилась на $x_0 = 10$ см. Затем груз убрали и нерастяжимыми нитями связали виток №100 с витком №300, а виток №200 с витком №400 (рис. 2). Длина каждого куска нити равна длине участка пружины между связываемыми витками в свободном состоянии. На какую величину x удлинится пружина при наличии нитей, если к ней подвесить тот же груз?

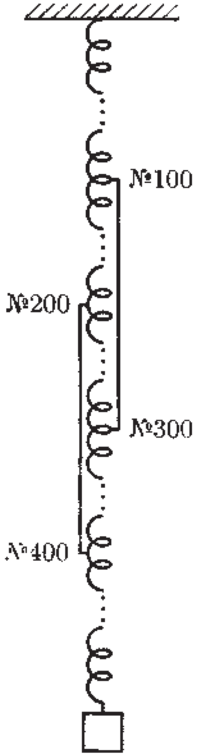

Рис 2

Задача 2. Обруч и клин

На горизонтальной поверхности находится клин массой m с углом $\alpha = 45°$ при основании. На клин ставят обруч той же массы радиусом R. Систему отпускают без начальной скорости.

1. Найдите ускорение a_1 центра обруча при достаточно большом коэффициенте трения μ между клином и горизонтальной поверхностью (клин неподвижен).

2. При каком минимальном значении μ клин останется неподвижным?

3. С каким ускорением a_2 будет двигаться клин в случае гладкой горизонтальной поверхности?

Обруч катится по клину без проскальзывания.

Задача 3. Микротрещина

На поверхность планеты, атмосфера которой имеет среднюю молярную массу $\mu = 43$ г/моль и состоит только из аргона и углекислого газа (молярные массы $\mu_1 = 40$ г/моль и $\mu_2 = 44$ г/моль соответственно), опустился космический аппарат с вакуумированной полостью. От удара о поверхность планеты в стенке полости образовалась микротрещина, размеры которой меньше длины свободного пробега молекулы. Через неё в полость начал поступать газ из атмосферы планеты. Определите отношение α концентраций аргона и углекислого газа в полости космического аппарата через малый промежуток времени после образования микротрещины. Для простоты вычислений считайте, что все молекулы газа имеют одинаковую кинетическую энергию.

Задача 4. Труба различного диаметра

Сосуд, состоящий из двух цилиндрических участков разного диаметра, запаян с узкого конца. Широкой частью он насажен на гладкий неподвижный поршень (рис. 3). Образовавшаяся герметичная полость частично заполнена водой, так что вода присутствует и в верхней части сосуда, а остальной объём занимает воздух при давлении $p_0 = 140$ кПа. Система находится в равновесии. На торец узкой части сосуда поместили гирю массой, равной массе пустого сосуда. Когда система вновь пришла в равновесие при неизменной температуре, оказалось, что сосуд опустился на $\Delta h = 7$ см. Найдите в этом состоянии высоту x столба воздуха в сосуде. Полная длина узкой части сосуда $H = 5$ м, площадь её поперечного сечения составляет $\alpha = 0{,}1$ от площади сечения широкой части. Атмосферное давление $p_{\text{атм}} = 1$ атм $= 100$ кПа.

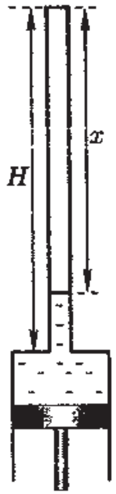

Рис. 3

Задача 5. Комплект пластин

Четыре пластины 1, 2, 3 и 4 площадью S расположены параллельно друг другу на расстояниях $(1-x)l$, xl и $(1-x)l$, малых по сравнению с размерами пластин (рис. 4). К пластинам 1 и 3 подключены батарейка с ЭДС $\mathscr{E}$, резистор R_1 и ключ K_1, к пластинам 2 и 4 — ключ K_2 и резистор R_2. В начальный момент времени ключи разомкнуты, пластины незаряжены.

1. Ключ K_1 замыкают. Какими будут заряды на пластинах после установления равновесия? Какое количество теплоты Q_0 выделится на резисторе R_1?

2. После установления равновесия замыкают ключ K_2. Найдите установившиеся заряды на пластинах и суммарное количество теплоты Q, которое выделится на резисторах R_1 и R_2 после замыкания ключа K_2.

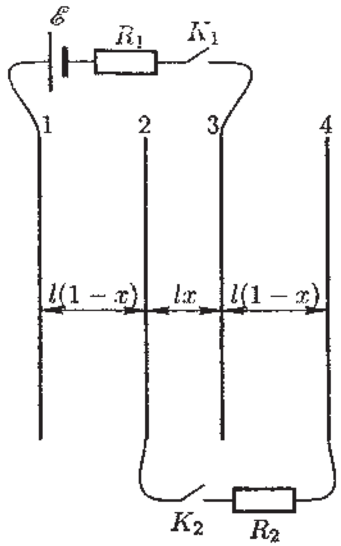

Рис. 4

11 класс

Задача 1. Муха в паутине

Паук сплёл паутинку в виде правильного шестиугольника со стороной $l = 45$ см (рис. 5), и закрепил крайние точки радиальных нитей радиусом $r = 0{,}01$ мм так, что сила их натяжения оказалась равна $F_0 = 6$ мН. Считайте деформации паутины упругими, а её модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^8$ Па. При относительном удлинении, превышающем $\varepsilon_{\max} = 0{,}2$, нить паутины рвётся.

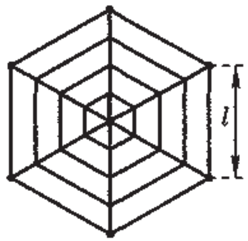

Рис. 5

1. Найдите максимальную массу M мухи, которая, попав в паутину, не порвёт её, если скорость мухи $v = 2$ м/с. Считайте, что муха попадает в центр паутины перпендикулярно её плоскости.

2. В центр паутины попалась муха массой $m = 0{,}1$ г. Найдите период T малых колебаний мухи вдоль перпендикуляра к плоскости паутины Попав в паутину, махать крыльями муха не может

Задача 2. Работа при смешивании газов

В цилиндре, температура которого T поддерживается постоянной, находятся ν_X молей идеального газа X и ν_Y молей идеального газа Y. В цилиндр вдвинуты два полупроницаемых поршня (рис. 6), первый из которых пропускает только молекулы газа X, второй – только молекулы газа Y. В начальный момент времени поршни расположены так, что они касаются друг друга и чистые вещества X и Y занимают объёмы V_{X0} и V_{Y0}. Поршни начинают медленно раздвигать, и в конце процесса образуется смесь газов X и Y объёма $V_{X0} + V_{Y0}$. Какая суммарная работа A совершается газами в данном процессе?

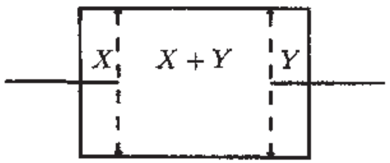

Рис 6

Примечание. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 1/x$ и прямыми $y = 0$, $x = x_1$ и $x = x_2$ составляет $S(x_1, x_2) = \ln\frac{x_2}{x_1}$.

Задача 3. Мыльный пузырь

Найдите скорость u уменьшения радиуса R мыльного пузыря при его сдувании через трубку радиусом $r \ll R$. Объём трубки пренебрежимо мал по сравнению с объёмом пузыря, воздух в пузыре можно считать неподвижным. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ. Считайте, что при истечении из пузыря воздух ведёт себя как идеальная невязкая несжимаемая жидкость протностью ρ.

Задача 4. Проводящая сфера

Внутри тонкостенной незаряженной проводящей сферы радиусом R находится точечный заряд Q_1 на расстоянии $R/3$ от центра сферы O (рис. 7). Снаружи сферы находится точечный заряд Q_2 на расстоянии $2R$ от центра сферы. Сфера расположена на расстоянии от Земли значительно большем R и соединена с Землёй через источник с ЭДС $\mathscr{E}$ и ключ K. Потенциал Земли примите равным нулю.

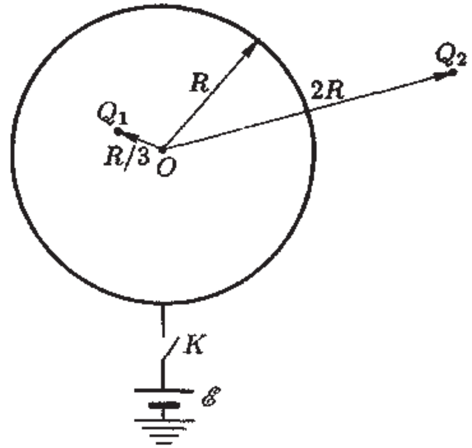

Рис 7

1. Найдите потенциал φ в центре сферы при разомкнутом ключе K.
2. Найдите заряд Q сферы после замыкания ключа K и наступления равновесия.

Задача 5. Цепь и соленоид

Электрическая цепь состоит из двух резиторов сопротивлениями R_1 и R_2 и конденсатора ёмкостью C (рис. 8). Участок AB провода проходит вдоль диаметра одного из витков длинного соленоида, сила тока в котором линейно растёт со временем. Найдите заряд q конденсатора в установившемся режиме, если ток в резисторе R_1 при этом равен I_1.

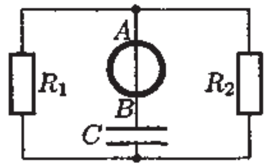

Рис. 8

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Грозовая туча

Поскольку $t_1 = t_3$, то туча находилась ближе всего к Глюку, когда прошла ровно половина времени между первой и последней вспышкой молнии (рис. 9). Используя этот факт, запишем теоремы Пифагора для треугольников ADE и BDE:

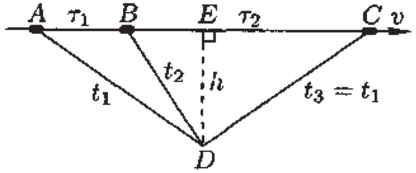

Рис. 9

$$v^2\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)^2 + h^2 = u^2t_1^2, \qquad v^2\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{2}\right)^2 + h^2 = u^2t_2^2.$$

Решая уравнения совместно, найдём

$$v = u\sqrt{\frac{t_1^2-t_2^2}{\tau_1\tau_2}} \approx 32 \text{ м/с}, \qquad h = u\sqrt{t_1^2 - \frac{(t_1^2-t_2^2)(\tau_1+\tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2}} \approx 1{,}4 \text{ км}.$$

Критерии оценивания

Использование соотношения $t_1 = t_3$ 2
Теорема Пифагора для треугольника ADE 2
Теорема Пифагора для треугольника BDE 2
Окончательное выражение для v 1
Численное значение v 1
Окончательное выражение для h 1
Численное значение h 1

Задача 2. Шаланда

Запишем для лодки второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\alpha\vec{v} - \beta\vec{a}.$$

Собрав члены с ускорением в левой части:

$$(m+\beta)\vec{a} = -\alpha\vec{v},$$

можно заметить, что движение лодки совпадает с движением тела массой $(m+\beta)$ под действием силы $\vec{F}' = -\alpha\vec{v}$. Это тело движется по прямой. Перейдём к проекциям на направление движения и определим изменение его импульса $\Delta p'$ за малый промежуток времени Δt:

$$\Delta p' = F'\Delta t = -\alpha v\Delta t, \qquad \text{или} \qquad \Delta p' = -\alpha\Delta x,$$

где Δx — смещение тела за время Δt. Из постоянства α следует, что последнее соотношение выполняется для любого (не обязательно малого) смещения Δx и, в частности, для полного смещения до остановки L:

$$-(m+\beta)v_0 = -\alpha L, \qquad \text{откуда} \qquad L = v_0\frac{(m+\beta)}{\alpha} = 15 \text{ м}.$$

Примечание. В гидродинамике величина β называется присоединённой массой.

Критерии оценивания

Второй закон Ньютона для лодки 2
Переход к эквивалентным массе и силе 2
Связь между изменением импульса и смещением тела 3
Окончательное выражения для L 2
Численное значение L 1

Задача 3. Электрическая батарея

При установившейся температуре в комнате

$$k(T_{Б1} - T) = K(T - T_1),$$

где k — коэффициент теплопроводности между батареями и комнатным воздухом, K — коэффициент теплопроводности между комнатой и наружним воздухом. Поскольку $T_{Б1} - T = T - T_1$, то $k = K$. При установившейся температуре в комнате в холодные дни

$$k(T_{Б2} - T) = K(T - T_2), \qquad T_{Б2} - T = T - T_2, \qquad T_{Б2} = 2T - T_2 = 65°\text{C}.$$

Отношение мощностей батарей в холодный и в обычный день:

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = \frac{T_{Б2} - T_2}{T_{Б1} - T_1},$$

где I_1 — сила тока в батреях в обычный день, I_2 — в холодный день. Отсюда

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{T_{Б2} - T_2}{T_{Б1} - T_1}} \approx 1{,}22.$$

Критерии оценивания

Условие постоянства температуры в комнате в день с $T_1 = -10°$C 2
Условие постоянства температуры в комнате в день с $T_2 = -25°$C 2
Окончательное выражение для $T_{Б2}$ 1
Численное значение $T_{Б2}$ 1
Выражение отношения мощностей батарей через отношение сил токов 2
Окончательное выражение для I_2/I_1 1
Численное значение I_2/I_1 1

Задача 4. Вращающееся зеркало

Лазерный зайчик может скользить по экрану AB как в результате отражения лазерного луча непосредственно от зеркальца M, так и при последовательном отражении от зеркальца M и зеркала AD. На рисунке 10 дуга KNP представляет собой геометрическое место изображений лазера, излучение от которых попадёт на экран AB. Угол $\angle NCP = 45°$. Пусть длина экрана равна L. Тогда длина отрезка $EC = L\sqrt{5}$. Величину угла $\varphi = \angle NCK$ найдём по теореме синусов:

$$\frac{L}{\sin\varphi} = \frac{L\sqrt{5}}{\sin 135°},$$

откуда $\sin\varphi = 1/\sqrt{10}$, $\varphi \approx 18{,}4°$.

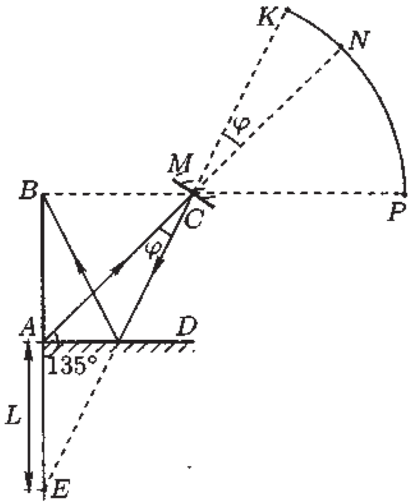

Рис. 10

Следовательно, угловая мера дуги $KNP = 45° + 18{,}4° = 63{,}4°$, а угол поворота α зеркальца M будет в два раза меньше, то есть $\alpha = 31{,}7°$. Искомое время движения зайчика по экрану найдём из пропорции:

$$\frac{t}{T} = \frac{\alpha}{360°}, \qquad \text{откуда} \qquad t \approx 63 \text{ с}.$$

Критерии оценивания

Определение положений M, при которых луч сразу попадает на AB 1
Определение положения точки E 2
Нахождение угла φ 3
Нахождение угла α 2
Окончательное выражение для t 1
Численное значение t 1

10 класс

Задача 1. Длинная пружина

Если при наличии нитей растягивать участок пружины между витками №100 и №400, то происходит не только растяжение участков между витками №100 и №200 и между №300 и №400, но и сжатие участка между витками №200 и №300. Пружина в целом не теряет упругих свойств при удалении любых двух из этих трёх участков (№100-№200, №200-№300, №300-№400), что означает, что они фактически являются параллельными. Вся система из пружин и ниток эквивалентна системе (рис. 11), где пружина 1 соответствует участку между витками №1 и №100, 2 — между №100 и №200, 3 — между №200 и №300, 4 — между №300 и №400, 5 — между №400 и №500.

Пусть k_0 — жёсткость пружины при отсутствии нитей. Жёсткость куска пружины обратно пропорциональна числу его витков, поэтому жёсткость любого участка, содержащего 100 витков (в частности между началом первого витка и витком №100),

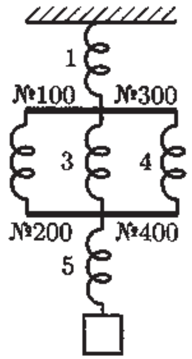

Рис. 11

$$k_1 = \frac{500}{100}k_0 = 5k_0.$$

Участок между витками №100 и №400 является, как уже было показано, параллельным соединением трёх участков по 100 витков, а его жёсткость

$$k_2 = 3k_1 = 15k_0.$$

Последний участок (между витками №400 и №500) имеет жёсткость

$$k_3 = k_1 = 5k_0.$$

Пружина в целом состоит из трёх последовательных участков (№100-№200, №200-№400, №400-№500), поэтому её жёсткость при наличии нитей

$$k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5k_0} + \frac{1}{15k_0} + \frac{1}{5k_0}\right)^{-1} = \frac{15}{7}k_0.$$

Удлинение пружины обратно пропорционально её жёсткости, поэтому

$$x = \frac{k_0}{k}x_0 = \frac{7}{15}x_0 \approx 4{,}7 \text{ см}.$$

Критерии оценивания

Нахождение эквивалентной системы пружин 4
Связь между жёсткостью пружины и количеством витков в ней 2
Выражение для жёсткости параллельно соединённых пружин 1
Выражение для жёсткости последовательно соединённых пружин 1
Окончательное выражение для x 1
Численное значение x 1

Задача 2. Обруч и клин

1. Обозначим через v скорость центра масс обруча, через y — его высоту. Энергия обруча складывается из кинетической энергии $mv^2/2$ поступательного движения и энергии $mv^2/2$ вращательного движения, а также потенциальной энергии mgy в поле тяжести. Следовательно, по закону сохранения энергии

$$mv^2 + mgy = \text{const}.$$

После дифференцирования по времени и замены $\dot{y} = v_y = v\sin\alpha$ получим:

$$2mva_1 - mgv\sin\alpha = 0, \qquad \text{откуда} \qquad a_1 = \frac{g\sin\alpha}{2} = \frac{g}{2\sqrt{2}}.$$

2. Со стороны обруча на клин действует сила

$$\vec{F} = m(\vec{g} - \vec{a}_1),$$

с проекциями $F_x = -ma_1\cos\alpha = mg/4$, $F_y = -mg + ma_1\sin\alpha = -3mg/4$, откуда сила реакции, действующая на клин со стороны горизонтальной поверхности, $N = 7mg/4$. Чтобы клин не двигался, необходимо, чтобы $\mu N \geqslant mg/4$. Значит, минимальное значение $\mu = 1/7$.

3. Пусть v_x и v_y – проекции скорости обруча, V — скорость клина.

Поскольку обруч катится по клину без отрыва, то

$$v_y = (v_x - V)\operatorname{tg}\alpha = v_x - V. \tag{1}$$

Из закона сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось следует:

$$v_x = -V. \tag{2}$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$E_{\text{п}} + E_{\text{ кл}} + E_{\text{пост}} + E_{\text{вр}} = \text{const}, \tag{3}$$

где $E_{\text{п}} = mgy$ – потенциальная энергия обруча, $E_{\text{ кл}} = mV^2/2$ — кинетическая энергия клина, $E_{\text{пост}} = m(v_x^2 + v_y^2)/2$ — энергия поступательного движения обруча, $E_{\text{вр}} = mu^2/2$ – энергия вращательного движения обруча, где u — скорость точек обруча в системе отсчёта связанной с центром обруча. Поскольку эта скорость

$$u = \sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2},$$

то, продифференцировав (3) по времени, с учётом (1) и (2) получим

$$-2mgV + mVa_2 + 5mVa_2 + 8mVa_2 = 0, \qquad \text{откуда} \qquad a_2 = \frac{g}{7}.$$

Критерии оценивания

Закон сохранения энергии для 1-го случая 1
Окончательное выражение выражение для a_1 1
Проекции силы, действующей на клин со стороны обруча на оси x и y 2
Значение μ 1
Условие качения обруча без отрыва от клина в случае гладкой поверхности 1
Связь между v_x и V 1
Закон сохранения энергии в случае гладкой поверхности 2
Окончательное выражение для a_2 1

Задача 3. Микротрещина

За малое время Δt изменение количества атомов аргона в полости равно

$$\Delta N_1 = \frac{1}{6}n_1v_1S\Delta t, \tag{4}$$

где n_1 — концентрация аргона в атмосфере, v_1 — скорость атомов аргона в атмосфере, S — площадь микротрещины. Аналогично, изменение количества молекул углекислового газа в полости за тот же промежуток времени равно

$$\Delta N_2 = \frac{1}{6}n_2v_2S\Delta t, \tag{5}$$

где n_2 — концентрация молекул углекислого газа в атмосфере, v_2 — скорость молекул углекислого газа в атмосфере. Поскольку отношение концентраций газов в полости равно отношению количеств их молекул, то с учётом (4) и (5) получаем

$$\alpha = \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{n_1v_1}{n_2v_2}. \tag{6}$$

Найдём отношение концентраций аргона и углекислого газа в атмосфере. Рассмотрим объём газа V. Средняя молярная масса газа в этом объёме

$$\mu = \frac{\mu_1\frac{n_1V}{N_A} + \mu_2\frac{n_2V}{N_A}}{\frac{n_1V}{N_A} + \frac{n_2V}{N_A}} = \frac{\mu_1n_1 + \mu_2n_2}{n_1 + n_2},$$

где N_A — число Авогадро, откуда

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\mu_2 - \mu}{\mu - \mu_1}. \tag{7}$$

Выразим скорости молекул через их кинетическую энергию E:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E}{m_1}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2E}{m_2}},$$

где m_1 и m_2 — массы атомов аргона и молекул углекислого газа соответственно. Поскольку

$$m_1 = \frac{\mu_1}{N_A}, \qquad m_2 = \frac{\mu_2}{N_A}, \qquad \text{то} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \tag{8}$$

Подставив (7) и (8) в (6), получим

$$\alpha = \frac{\mu_2 - \mu}{\mu - \mu_1}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \approx 0{,}35.$$

Примечание. Более точный расчёт даёт в формулах (4) и (5) коэффициент $1/4$ вместо $1/6$, однако на ответ это не влияет.

Критерии оценивания

Изменение количества атомов аргона в полости в единицу времени 1
Изменение количества атомов углекислого газа в единицу времени 1
Связь между μ, μ_1 и μ_2 2
Выражение для отношения концентраций газов в атмосфере 2
Связь между скоростями молекул газа и их энергиями 1
Выражение для отношения скоростей молекул газов 1
Окончательное выражение для α 1
Численное значение α 1

Задача 4. Труба различного диаметра

По вертикали на сосуд действуют несколько сил: сила атмосферного давления, сила тяжести, сила давления воздуха под крышкой, сила давления воды на горизонтальный участок на стыке верхней и нижней частей сосуда, а во втором состоянии — ещё и вес гири. Пусть M — масса сосуда, x_0 — высота столба воздуха в начальном состоянии, S и s — площади поперечных сечений соответственно сосуда и трубы. Запишем условие равновесия для начального состояния:

$$-p_{\text{атм}}S - Mg + p_0 s + (p_0 + \rho g(H - x_0))(S - s) = 0,$$

или в приведённом виде

$$\rho g(H - x_0)(1 - \alpha) + p_0 - p_{\text{атм}} - \frac{Mg}{S} = 0. \qquad (9)$$

Воздух был при одной и той же температуре в обоих состояниях, поэтому его давление в конечном состоянии $p_1 = p_0 x_0/x$. Аналогично (9) запишем условие равновесия для конечного состояния:

$$\rho g(H - x)(1 - \alpha) + p_0\frac{x_0}{x} - p_{\text{атм}} - \frac{2Mg}{S} = 0. \qquad (10)$$

Исключим Mg/S из (9) и (10):

$$\rho g(H - 2x_0 + x)(1 - \alpha) + 2p_0 - p_0\frac{x_0}{x} - p_{\text{атм}} = 0. \qquad (11)$$

Из несжимаемости воды следует соотношение между опусканием сосуда и уменьшением высоты столба воздуха: $S\Delta h = s(x_0 - x)$. После подстановки $x_0 = x + \Delta h/\alpha$ в (11) и приведения получим:

$$\rho g(1 - \alpha)x^2 - \left(\rho g(1 - \alpha)\left(H - 2\frac{\Delta h}{\alpha}\right) + p_0 - p_{\text{атм}}\right)x + p_0\frac{\Delta h}{\alpha} = 0,$$

откуда

$$x_\pm = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\rho g(1 - \alpha)p_0\Delta h/\alpha}}{2\rho g(1 - \alpha)},$$

где

$$b = \rho g(1 - \alpha)\left(H - 2\frac{\Delta h}{\alpha}\right) + p_0 - p_{\text{атм}} = 71{,}75 \text{ кПа}.$$

Подставив численные значения, получим $x_+ = 6{,}40$ м, $x_- = 1{,}74$ м. Корень $x_+ > H$ не имеет смысла, поэтому искомая высота $x = x_- = 1{,}74$ м.

Критерии оценивания

Условие равновесия для начального состояния 2
Выражение для p_1 1
Условие равновесия для конечного состояния 2
Соотношение между Δh, x_0 и x 1
Окончательное выражение для x 2
Численное значение x 1
Исключение корня $x > H$ 1

Задача 5. Комплект пластин

1. Рассмотрим равновесное состояние системы после замыкания первого ключа. Пластина 1 заряжается до некоторого заряда q_{01}, пластина 3 — до противоположного заряда $-q_{01}$, пластины 2 и 4 остаются незаряженными. Напряженность электрического поля между пластинами 1 и 3 равна $E_0 = q_{01}/(\varepsilon_0 S)$, разность потенциалов между ними $E_0 l$ совпадает с ЭДС батарейки:

$$\mathscr{E} = \frac{q_{01}l}{\varepsilon_0 S}.$$

Следовательно, на пластине 1 устанавливается заряд

$$q_{01} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}}{l}.$$

Выделяющееся в данном процессе количество теплоты Q_0 рассчитывается из закона сохранения энергии, как разность работы источника

$$W_{0\text{бат}} = q_{01}\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{l}$$

и конечной электростатической энергии

$$W_{0\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}Sl = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{2l}$$

Следовательно,

$$Q_0 = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{2l}.$$

2. Рассмотрим теперь второй этап процесса, после замыкания ключа K_2. В этом процессе происходит перераспределение зарядов как между пластинами 1 и 3, так и между пластинами 2 и 4. Пусть q_1 и q_2 — установившиеся заряды

на пластинах 1 и 2, тогда заряды на пластинах 3 и 4 равны $-q_1$ и $-q_2$ соответственно. Напряженности электрического поля между пластинами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 соответственно равны:

$$E_{12} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}, \qquad E_{23} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0 S}, \qquad E_{34} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между пластинами 2 и 4 должна быть равна нулю:

$$0 = E_{23}lx + E_{34}l(1-x),$$

откуда $q_2 = -q_1 x$. Разность потенциалов между пластинами 1 и 3 равна $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = E_{12}l(1-x) + E_{23}x,$$

следовательно,

$$q_1 = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}}{l(1-x^2)}, \qquad q_2 = -q_1 x = -\frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}x}{l(1-x^2)}.$$

Конечная электростатическая энергия системы

$$W_{эл} = Sl(1-x)\frac{\varepsilon_0 E_{12}^2}{2} + Slx\frac{\varepsilon_0 E_{23}^2}{2} + Sl(1-x)\frac{\varepsilon_0 E_{34}^2}{2} =$$

$$= \frac{l}{2\varepsilon_0 S}(q_1^2 + q_2^2 + 2xq_1q_2) = \frac{\varepsilon_0 S}{2l}\frac{\mathscr{E}^2}{1-x^2}.$$

Её изменение на втором этапе

$$W_{эл} - W_{0эл} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 x^2}{2l(1-x^2)}.$$

Работа батарейки на втором этапе

$$W_{бат} = \mathscr{E}(q_1 - q_{01}) = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 x^2}{l(1-x^2)}.$$

Следовательно, на резисторах выделится количество теплоты

$$Q = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 x^2}{2l(1-x^2)}.$$

Критерии оценивания

Окончательное выражение для q_{01} 1
Работа источника после замыкания K_1 1
Электростатическая энергия после замыкания K_1 1
Окончательное выражение для Q_0 1

Напряжённости поля между пластинками 1
Разность потенциалов между пластинками 1 и 3 1
Разность потенциалов между пластинками 2 и 4 1
Конечная электростатическая энергия системы 1
Работа источника после замыкания K_2 1
Окончательное выражение для Q 1

11 класс

Задача 1. Муха в паутине

1. При попадании мухи в центр паутины перпендикулярно её плоскости будут растягиваться только радиальные нити. Из закона Гука находим их начальное относительное удлинение

$$\varepsilon_0 = \frac{F_0}{ES},$$

где $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения нити паутины.

Максимальную массу M мухи найдём из условия, что муха остановилась, когда натяжение паутины достигло предельного значения. Энергия упругой деформации 6 радиальных нитей при относительном удлинении ε имеет вид:

$$W = 6 \cdot \frac{E\varepsilon^2}{2} \cdot Sl.$$

Напомним попутно, что $E\varepsilon^2/2$ имеет смысл плотности энергии деформации. Из закона сохранения энергии

$$\frac{Mv^2}{2} + 6 \cdot \frac{E\varepsilon_0^2}{2} \cdot Sl = 6 \cdot \frac{E\varepsilon_{max}^2}{2} \cdot Sl \qquad (12)$$

получим

$$M = \frac{6ESl}{v^2}\left(\varepsilon_{max}^2 - \varepsilon_0^2\right) = \frac{6\pi r^2 lE}{v^2}\left(\varepsilon_{max}^2 - \frac{F_0^2}{\pi^2 r^4 E^2}\right) \approx 1{,}3 \text{ г}.$$

2. При малых колебаниях можно пренебречь возникающим переменным удлинением радиальных нитей по сравнению с начальным ε_0, так как по теореме Пифагора это удлинение будет порядка второй степени малого смещения x мухи (перпендикулярного плоскости паутины). Возвращающая сила F создаётся проекциями 6 радиальных сил F_0 на направление колебаний:

$$F \approx -6 \cdot F_0 \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx -\frac{6F_0}{l} \cdot x.$$

Таким образом, эффективная жёсткость $k = 6F_0/l$, а период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{6F_0}} \approx 0{,}22 \text{ с}.$$

Критерии оценивания

Начальное относительное удлинение нитей 2
Закон сохранения энергии при столкновении мухи с паутиной 2
Окончательное выражение для M 1
Численное значение M 1
Выражение для возвращающей силы при колебаниях 2
Окончательное выражение для T 1
Численное значение T 1

Задача 2. Работа при смешивании газов

Пусть V_X — объём, занимаемый чистым веществом X (слева от поршней), V_Y — объём, занимаемый чистым веществом Y (справа от поршней), V_{XY} — объём смеси газов X и Y. При этом газ X равномерно распределен по объёму $V_1 = V_X + V_{XY}$, газ Y — по объёму $V_2 = V_{XY} + V_Y$. На левый поршень со стороны газов действует сила давления $p_2 = \nu_Y RT/V_2$ газа Y, на правый поршень — сила давления $p_1 = \nu_X RT/V_1$ газа X. Следовательно, при малом раздвижении поршней газы совершат работу

$$\Delta A = p_1\Delta V_1 + p_2\Delta V_2 = \nu_X RT\frac{\Delta V_1}{V_1} + \nu_Y RT\frac{\Delta V_2}{V_2}.$$

Суммарная работа, совершаемая газами, представляется в виде суммы

$$A = \sum\Delta A = \nu_X RT\sum\frac{\Delta V_1}{V_1} + \nu_Y RT\sum\frac{\Delta V_2}{V_2}.$$

Каждый равен площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$\sum\frac{\Delta V_1}{V_1} = S(V_{01}, V_1'), \quad \sum\frac{\Delta V_2}{V_2} = S(V_{02}, V_2'),$$

где V_{01}, V_{02} — начальные значения объёмов V_1, V_2, V_1', V_2' — их конечные значения. Отсюда

$$A = \nu_X RT\ln\frac{V_1'}{V_{01}} + \nu_Y RT\ln\frac{V_2'}{V_{02}}.$$

Учтём, что

$$V_{10} = V_{X0}, \qquad V_{20} = V_{Y0}, \qquad V_1' = V_2' = V_{X0} + V_{Y0}.$$

Отсюда получим:

$$A = \nu_X RT\ln\frac{V_{X0}+V_{Y0}}{V_{X0}} + \nu_Y RT\ln\frac{V_{X0}+V_{Y0}}{V_{Y0}}.$$

Критерии оценивания

Выражение для p_1 2
Выражение для p_2 2

Работа газов при малом раздвижении поршней 2
Нахождение площадей соответствующих криволинейных трапеций 2
Окончательное выражение для A 2

Задача 3. Мыльный пузырь

Поверхностное натяжение мыльной плёнки создает в пузыре дополнительное давление, равное

$$\Delta p = 2\cdot\frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{R}, \tag{13}$$

так как у плёнки две поверхности. Работа, совершаемая мыльной плёнкой, идёт на сообщение кинетической энергии вытекающему воздуху:

$$\Delta p\Delta V = \frac{\Delta m v^2}{2},$$

где ΔV — уменьшение объёма мыльного пузыря, Δm — масса вытесненного воздуха, v — скорость движения воздуха в трубке. Отсюда

$$\frac{\rho v^2}{2} = \Delta p, \qquad v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \tag{14}$$

где $\rho = \Delta m/\Delta V$ — плотность воздуха. Скорость уменьшения объёма V пузыря

$$\frac{dV}{dt} = vS, \tag{15}$$

где $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения трубки. Подставив в (15) выражение для объёма пузыря $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а также выражения (13) и (14), получим

$$4\pi R^2\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R}}\cdot\pi r^2, \qquad \text{откуда} \qquad u = \frac{dR}{dt} = \frac{r^2}{R^{5/2}}\sqrt{\frac{\sigma}{2\rho}}.$$

Критерии оценивания

Давление, создаваемое мыльной плёнкой 2
Закон сохранения энергии 2
Скорость движения воздуха на выходе из трубки 2
Скорость изменения объёма пузыря 2
Окончательное выражение для u 2

Задача 4. Проводящая сфера

1. До замыкания ключа заряды на внутренней и внешней поверхностях сферы распределяются неравномерно, но их суммарный заряд равен нулю. Потенциал в центре сферы

$$\varphi = k\frac{Q_1}{R/3} + k\frac{Q_2}{2R} = \frac{k}{R}\left(3Q_1 + \frac{Q_2}{2}\right).$$

2. После замыкания ключа на внутренней и внешней поверхностях сферы появятся заряды q_1 и q_2. Причём $q_1 = -Q_1$ Найдём q_2 Потенциал сферы равен $\mathscr{E}$ и создаётся зарядами Q_2 и q_2, так как заряды Q_1 и q_1 вне сферы поля не создают. Уберём мысленно заряды Q_1 и q_1. Распределение заряда q_2 при этом не изменится. В поле, создаваемом зарядами Q_2 и q_2, потенциал сферы (равный $\mathscr{E}$) равен потенциалу в центре сферы:

$$k\frac{q_2}{R} + k\frac{Q_2}{2R} = \mathscr{E}.$$

Откуда

$$q_2 = \frac{\mathscr{E}R}{k} - \frac{Q_2}{2} = 4\pi\varepsilon_0\mathscr{E}R - \frac{Q_2}{2}.$$

$$Q = q_1 + q_2 = -Q_1 - \frac{Q_2}{2} + 4\pi\varepsilon_0 R\mathscr{E}.$$

Критерии оценивания

Суммарный заряд на сфере до замыкания ключа равен нулю 1
Окончательное выражение для φ 2
Величина заряда на внутренней поверхности сферы 1
Мысленное удаление Q_1 и q_1 2
Потенциал сферы после замыкания K 1
Потенциал в центре сферы в поле зарядов Q_2 и q_2 1
Нахождение заряда на внешней поверхности сферы 1
Окончательное выражение для Q 1

Задача 5. Цепь и соленоид

Из-за изменения магнитного поля в каждом контуре возникает ЭДС индукции, равная скорости изменения потока через этот контур. Пусть $\mathscr{E}$ – ЭДС в контуре, содержащем R_1 и C (рис. 12), тогда в контуре, содержащем R_1 и R_2, ЭДС равна $2\mathscr{E}$. Запишем второе правило Кирхгофа для этих контуров:

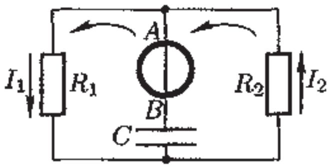

Рис. 12

$$\mathscr{E} = I_1R_1 + \frac{q}{C}, \qquad 2\mathscr{E} = I_1R_1 + I_2R_2.$$

В установившемся режиме заряд конденсатора постоянен, ток через него не идёт, и, следовательно, $I_1 = I_2$. Решая уравнения, находим

$$q = \frac{1}{2}CI_1(R_2 - R_1).$$